УДК 517.5

В. Д. Диденко (Одес. гос. акад. техн. регулирования и качества),
А. А. Кореновский (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова),
Н. Д. Туа (Ун-т Брунея)

ЧИСЛЕННАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НЕРАВЕНСТВА ГУРОВА – РЕШЕТНЯКА НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

We find the “norm” of a power function in the Gurov – Reshetnyak class on the real line. Moreover, as a result of numerical experiments, we establish a lower bound for the norm of the operator of even extension from the semiaxis onto the entire real line in the Gurov – Reshetnyak class.

Обчислено „норму” степеневої функції в класі Гурова – Решетняка на дійсній осі. Крім того, в результаті числових експериментів отримано оцінку знизу норми оператора парного продовження функції з класу Гурова – Решетняка з напівосі на всю дійсну вісь.

Введение. Рассматриваются функции $f : R \mapsto \mathbb{R}^+$, где R — интервал из $\mathbb{R}$. В дальнейшем в качестве R будем использовать всю действительную ось $\mathbb{R}$ или полуось $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Предполагается, что функция f локально суммируема на R, т. е. суммируема на каждом ограниченном подынтервале I из R.

Среднее интегральное значение функции f на ограниченном интервале I определяется равенством

$$f_I = \frac{1}{|I|} \int\limits_I f(x)\, dx,$$

а средним интегральным колебанием этой функции называется

$$\Omega(f; I) = \frac{1}{|I|} \int\limits_I |f(x) - f_I|\, dx,$$

где $|\cdot|$ означает меру Лебега.

Для заданного $\varepsilon \in (0, 2]$ класс Гурова – Решетняка $\mathcal{GR} = \mathcal{GR}(\varepsilon) = \mathcal{GR}_R(\varepsilon)$ определяется как совокупность всех неотрицательных, локально суммируемых на R функций f, удовлетворяющих условию Гурова – Решетняка

$$\Omega(f; I) \le \varepsilon\, f_I$$

на каждом ограниченном интервале $I \subset R$ (см. [7]). Поскольку каждая неотрицательная функция f на любом интервале I удовлетворяет неравенству $\Omega(f; I) \le 2 f_I$, то класс $\mathcal{GR}_R(2)$ тривиален и совпадает с классом всех локально суммируемых на R функций. С другой стороны, если $\varepsilon \in (0, 2)$, то класс $\mathcal{GR}_R(\varepsilon)$ не является тривиальным (см. [10, с. 112; 16]). Если I — подынтервал из R, то выражение $\langle\, f\,\rangle_I = \Omega(f; I)/f_I$ называется относительным колебанием функции f на интервале I. Далее, величина $\langle\!\langle f \rangle\!\rangle_R = \sup\limits_{I \subset R} \langle\, f\,\rangle_I$ называется „нормой” функции f в классе Гурова – Решетняка $\mathcal{GR}_R$.

Фундаментальное свойство функции из класса Гурова – Решетняка заключается в возможности повышения показателя ее суммируемости. На использовании этого свойства основаны многочисленные приложения этих классов функций. Именно, для любого $\varepsilon \in (0,2)$ существуют такие $p_R^+ = p_R^+(\varepsilon) > 1$ и $p_R^- = p_R^-(\varepsilon) < 0$, что из условия $f \in \mathcal{GR}_R(\varepsilon)$ следует локальная суммируемость функции f^p при любых $p \in (p_R^-, p_R^+)$ (см. [1, 3 – 5, 7, 8, 16, 18]). Для $R = \mathbb{R}^+$ точным предельным значением $p_{\mathbb{R}_+}^+ = p_{\mathbb{R}_+}^+(\varepsilon) > 1$ положительного показателя суммируемости p является корень уравнения

$$\frac{p^p}{(p-1)^{p-1}} = \frac{2}{\varepsilon},$$

а $p_{\mathbb{R}_+}^- = 1 - p_{\mathbb{R}_+}^+ < 0$. Точность этих значений $p_{\mathbb{R}_+}^-$ и $p_{\mathbb{R}_+}^+$ может быть установлена на примере степенных функций $g(x) = x^{1/(p-1)}$ и $h(x) = x^{-1/p}$ $(x \in \mathbb{R}_+,\ p > 1)$ соответственно. Именно,

$$\varepsilon_{\mathbb{R}_+}(p) \equiv \langle\!\langle g \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}_+} = \langle\!\langle h \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}_+} = 2\frac{(p-1)^{p-1}}{p^p} \tag{1}$$

[10, с. 131, 144; 11, 12, 14, 15]. Эти примеры также показывают, что для функций $f \in \mathcal{GR}_{\mathbb{R}_+}(\varepsilon)$ функция f^p не должна быть локально суммируемой с предельным показателем $p = p_{\mathbb{R}_+}^-(\varepsilon) < 0$ или $p = p_{\mathbb{R}_+}^+(\varepsilon) > 1$.

С другой стороны, для $R = \mathbb{R}$ точные предельные показатели суммируемости $p_{\mathbb{R}}^-(\varepsilon) < 0$ и $p_{\mathbb{R}}^+(\varepsilon) > 1$ функций $f \in \mathcal{GR}_{\mathbb{R}}(\varepsilon)$ неизвестны. Очевидно, что $p_{\mathbb{R}}^-(\varepsilon) \le p_{\mathbb{R}_+}^-(\varepsilon)$, $p_{\mathbb{R}}^+(\varepsilon) \ge p_{\mathbb{R}_+}^+(\varepsilon)$. Как и при $R = \mathbb{R}_+$, естественно предположить, что для $R = \mathbb{R}$ степенные функции $f_\alpha(x) = |x|^\alpha$ $(x \in \mathbb{R},\ \alpha > -1)$ при $\alpha = 1/(p-1)$ и $\alpha = -1/p$ $(p > 1)$ также являются экстремальными. Однако вычисление „норм” Гурова – Решетняка $\varepsilon_{\mathbb{R}}^-(p) \equiv \langle\!\langle f_{1/(p-1)} \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}}$ и $\varepsilon_{\mathbb{R}}^+(p) \equiv \langle\!\langle f_{-1/p} \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}}$ в этом случае не является таким простым, как для $R = \mathbb{R}_+$. Как показано в работе [11], $\varepsilon_{\mathbb{R}}^-(p) > \varepsilon_{\mathbb{R}_+}(p)$ и $\varepsilon_{\mathbb{R}}^+(p) > \varepsilon_{\mathbb{R}_+}(p)$.

Один из главных результатов данной работы состоит в вычислении „нормы” $\langle\!\langle f_\alpha \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}}$ функции f_α в классе Гурова – Решетняка на действительной оси $\mathbb{R}$ (см. теорему 1). Из этой теоремы, в частности, вытекает равенство $\varepsilon_{\mathbb{R}}^-(p) = \varepsilon_{\mathbb{R}}^+(p) \equiv \varepsilon_{\mathbb{R}}(p)$ $(p > 1)$ (см. следствие 3).

Затронутый выше вопрос можно также трактовать следующим образом: если монотонная функция f принадлежит классу $\mathcal{GR}_{\mathbb{R}_+}(\varepsilon)$ при некотором $\varepsilon \in (0,2)$, то ее четное продолжение на $\mathbb{R}$, которое также обозначим через f, тоже принадлежит классу Гурова – Решетняка $\mathcal{GR}_{\mathbb{R}}(\varepsilon')$ при некотором $\varepsilon' \in [\varepsilon, 2)$ (см. лемму 1). Таким образом, естественно возникает вопрос о норме

$$\|\mathbf{T}\|_{\mathcal{GR}}^{(\varepsilon)} \equiv \frac{1}{\varepsilon}\sup\left\{\langle\!\langle f \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}} : \langle\!\langle f \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}_+} = \varepsilon\ (0 < \varepsilon < 2)\right\}, \qquad \|\mathbf{T}\|_{\mathcal{GR}} \equiv \sup_{0<\varepsilon<2}\|\mathbf{T}\|_{\mathcal{GR}}^{(\varepsilon)}$$

оператора $\mathbf{T}$ четного продолжения монотонных функций $f \in \mathcal{GR}_{\mathbb{R}_+}(\varepsilon)$ на действительную ось $\mathbb{R}$.

Ниже в таблице приведены результаты численных вычислений значений $\varepsilon_{\mathbb{R}}(p)$ при различных $p > 1$. Сравнивая эти результаты с известными значениями $\varepsilon_{\mathbb{R}_+}(p)$, получаем оценку снизу для норм $\|\mathbf{T}\|_{\mathcal{GR}}^{(\varepsilon)}$ и $\|\mathbf{T}\|_{\mathcal{GR}}$.

Аналогичный вопрос о норме оператора четного продолжения в классе BMO монотонных функций с ограниченным средним колебанием изучался в [9]. Некоторые оценки нормы такого продолжения получены также в [17]. Интересно отметить, что оценка снизу, приведенная в замечании 5 для нормы оператора четного продолжения $\|\mathbf{T}\|_{\mathcal{GR}}$ в данной работе, совпадает с оценкой снизу для оператора $\|\mathbf{T}\|_{BMO}$, полученной в [2] для соответствующего оператора четного продолжения монотонных функций $f \in BMO$ (см. замечание 6).

1. Неравенство Гурова – Решетняка для степенной функции на действительной оси. Напомним, что среднее интегральное значение $f_I = \gamma$ функции f на подынтервале I однозначно определяется условием[1]

$$\int\limits_{I(f\ge\gamma)} (f(x)-\gamma)\,dx = \int\limits_{I(f\le\gamma)} (\gamma - f(x))\,dx.$$

Легко видеть, что

$$\Omega(f;I) = \frac{2}{|I|}\int\limits_{I(f\ge f_I)} (f(x)-f_I)\,dx = \frac{2}{|I|}\int\limits_{I(f\le f_I)} (f_I - f(x))\,dx.$$

В соответствии с [11] „норма” Гурова – Решетняка монотонной функции f на $\mathbb{R}_+$ равна

$$\langle\!\langle f \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}_+} = \sup_{b>0} \langle\, f\,\rangle_{(0,b)}\,;$$

этот факт мы будем использовать в дальнейшем.

Сначала покажем, что четное продолжение монотонной функции из нетривиального класса Гурова – Решетняка $\mathcal{GR}_{\mathbb{R}_+}$ принадлежит нетривиальному классу $\mathcal{GR}_{\mathbb{R}}$.

Лемма 1. *Для любого $\varepsilon \in (0,2)$ существует такое $\varepsilon' \in (0,2)$, что принадлежность монотонной функции f классу $\mathcal{GR}_{\mathbb{R}_+}(\varepsilon)$ влечет принадлежность четного продолжения f из $\mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R}$ классу $\mathcal{GR}_{\mathbb{R}}(\varepsilon')$.*

Доказательство проведем в три шага.

Шаг 1. Пусть четная функция f принадлежит $\mathcal{GR}_{\mathbb{R}_+}(\varepsilon)$, $0<\varepsilon<2$. Тогда на любом интервале $I\subset\mathbb{R}_+$ выполнено неравенство Геринга[2]

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I f^q(x)\,dx\right)^{1/q} \le B\cdot\frac{1}{|I|}\int\limits_I f(x)\,dx, \tag{2}$$

где $q>1$ и $B>1$ зависят только от параметра ε [10, с. 131; 12].

Шаг 2. Покажем, что функция f удовлетворяет неравенству Геринга на $\mathbb{R}$. Для этого достаточно рассматривать только лишь интервалы вида $I=(-a,b)$, где $0<a<b$. Учитывая, что f — четная функция, и применяя неравенство (2) на интервале $(0,b)$, получаем

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I f^q(x)\,dx\right)^{1/q} \le \left(\frac{2}{a+b}\int\limits_0^b f^q(x)\,dx\right)^{1/q} \le$$

[1]Через $E(P)$ обозначается множество всех точек $x\in E$, удовлетворяющих условию $P=P(x)$.

[2]Напомним, что неравенство Геринга определено в [6].

$$\leq \left(\frac{2b}{a+b}\right)^{1/q} B\frac{1}{b}\int\limits_0^b f(x)\,dx \leq 2^{1/q}\left(\frac{b}{a+b}\right)^{1/q-1} B\frac{1}{a+b}\int\limits_{-a}^b f(x)\,dx \leq$$

$$\leq 2B\frac{1}{|I|}\int\limits_I f(x)\,dx.$$

Шаг 3. Остается лишь учесть, что из неравенства Геринга следует неравенство Гурова – Решетняка с некоторым $\varepsilon' \in (0,2)$ (см. [10, с. 114; 13]).

Лемма 1 доказана.

***Замечание* 1.** Получаемое таким образом значение $\varepsilon' \equiv \varepsilon'(\varepsilon)$ не является точным, поскольку на каждом шаге доказательства леммы 1 используются завышенные значения параметров.

***Замечание* 2.** При $\varepsilon < 1$ доказательство леммы 1 можно упростить. В этом случае достаточно воспользоваться неравенством [2]

$$\Omega(f;(-\delta b,b)) \leq \frac{2}{1+\delta}\Omega(f;(0,b)), \quad 0 \leq \delta \leq 1, \ b > 0.$$

В самом деле, поскольку

$$f_{(-\delta b,b)} = \frac{1}{(1+\delta)b}\int\limits_{-\delta b}^b f(x)\,dx \geq \frac{1}{1+\delta}\frac{1}{b}\int\limits_0^b f(x)\,dx = \frac{1}{1+\delta}f_{(0,b)},$$

то

$$\frac{\Omega(f;(-\delta b,b))}{f_{(-\delta b,b)}} \leq (1+\delta)\frac{\Omega(f;(-\delta b,b))}{f_{(0,b)}} \leq (1+\delta)\frac{\frac{2}{1+\delta}\Omega(f;(0,b))}{f_{(0,b)}} \leq 2\langle\!\langle f \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}_+}.$$

Дальнейшие детали доказательства опускаются.

***Замечание* 3.** Из доказательства в замечании 2 следует, что если $\varepsilon \in (0,1)$, то $\|\mathbf{T}\|^{(\varepsilon)}_{\mathcal{GR}} \leq 2$. Однако, поскольку параметр ε' в лемме 1 удовлетворяет неравенству $\varepsilon' \leq 2$, неравенство $\|\mathbf{T}\|^{(\varepsilon)}_{\mathcal{GR}} \leq 2$ имеет место и при $\varepsilon \in [1,2)$. Следовательно, $\|\mathbf{T}\|_{\mathcal{GR}} \leq 2$. С другой стороны, ниже в замечании 5 приводится оценка снизу нормы $\|\mathbf{T}\|_{\mathcal{GR}}$, полученная в результате численных экспериментов.

Далее, перейдем к вычислению „нормы" степенной функции в классе Гурова – Решетняка. Используя линейную замену переменной, легко убедиться в том, что для функции $f_\alpha(x) = |x|^\alpha$ $(x \in \mathbb{R}, \alpha > -1)$ справедливы соотношения

$$\langle\!\langle f_\alpha \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}} = \sup_{0\leq\eta\leq 1}\langle\, f_\alpha \,\rangle_{(-\eta,1)}\,, \qquad \langle\!\langle f_\alpha \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}_+} = \langle\, f_\alpha \,\rangle_{(0,1)} = \frac{2|\alpha|}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)/\alpha}}.$$

Теорема 1. *Если* $\alpha > -1,\ \alpha \neq 0$, *то*

$$\langle\!\langle f_\alpha \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}} = \langle\!\langle f_\alpha \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}_+}\max_{0\leq\eta\leq 1}\psi(\alpha,\eta),$$

где

$$\psi(\alpha,\eta)=\begin{cases}\dfrac{\left(1+\eta^{\alpha+1}\right)^{1/\alpha}}{(1+\eta)^{(\alpha+1)/\alpha}}+\dfrac{(\alpha+1)^{(\alpha+1)/\alpha}}{\alpha}\left[\dfrac{1}{1+\eta^{\alpha+1}}-\dfrac{1}{1+\eta}\right] & \textit{при}\quad 0\le\eta\le\eta_1,\\ 2\dfrac{\left(1+\eta^{\alpha+1}\right)^{1/\alpha}}{(1+\eta)^{(\alpha+1)/\alpha}} & \textit{при}\quad \eta_1\le\eta\le 1,\end{cases}$$

а $\eta_1=\eta_1(\alpha)\in(0,1)$ *является корнем уравнения*

$$\eta^\alpha=\frac{1}{1+\alpha(\eta+1)}. \tag{3}$$

Доказательство. Для фиксированного $\eta\in[0,1]$ обозначим $I=I(\eta)=(-\eta,1)$. Тогда

$$(f_\alpha)_I=\frac{1}{1+\eta}\int\limits_{-\eta}^{1}|x|^\alpha\,dx=\frac{1}{\alpha+1}\frac{1+\eta^{\alpha+1}}{1+\eta}.$$

Пусть $\eta_1\in(0,1)$ — корень уравнения $\eta=\left((f_\alpha)_I\right)^{1/\alpha}$. Это уравнение можно записать в виде (3). Легко видеть, что уравнение (3) имеет единственное решение. Далее, вычислим $\langle f_\alpha\rangle_I$. При этом будем различать два случая: 1) $\eta<\eta_1$, 2) $\eta\ge\eta_1$.

1. Если $\eta<\eta_1$, то

$$\Omega(f_\alpha;I)=\frac{2\operatorname{sign}\alpha}{1+\eta}\int\limits_{\left((f_\alpha)_I\right)^{1/\alpha}}^{1}\left(x^\alpha-(f_\alpha)_I\right)\,dx=$$

$$=\frac{2\operatorname{sign}\alpha}{1+\eta}\left[\frac{\alpha}{\alpha+1}\left((f_\alpha)_I\right)^{(\alpha+1)/\alpha}-(f_\alpha)_I+\frac{1}{\alpha+1}\right].$$

Обозначим

$$\varphi_0(\alpha,\eta)\equiv\langle\, f_\alpha\,\rangle_I=\frac{\Omega(f_\alpha;I)}{(f_\alpha)_I}=$$

$$=\frac{2}{1+\eta}\frac{|\alpha|}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)/\alpha}}\left(\frac{1+\eta^{\alpha+1}}{1+\eta}\right)^{1/\alpha}-\frac{2\operatorname{sign}\alpha}{1+\eta}+\frac{2\operatorname{sign}\alpha}{1+\eta^{\alpha+1}}.$$

Учитывая, что

$$\varphi_0(\alpha,0)=\langle\, f_\alpha\,\rangle_{(0,1)}=\frac{2|\alpha|}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)/\alpha}},$$

получаем

$$\psi_0(\alpha,\eta)\equiv\frac{\langle\, f_\alpha\,\rangle_I}{\langle\, f_\alpha\,\rangle_{(0,1)}}=$$

$$=\frac{\left(1+\eta^{\alpha+1}\right)^{1/\alpha}}{(1+\eta)^{(\alpha+1)/\alpha}}+\frac{(\alpha+1)^{(\alpha+1)/\alpha}}{\alpha}\left[\frac{1}{1+\eta^{\alpha+1}}-\frac{1}{1+\eta}\right]. \tag{4}$$

2. Если же $\eta \geq \eta_1$, то

$$\Omega(f_\alpha; I) = \frac{2\operatorname{sign}\alpha}{1+\eta} \cdot 2 \int\limits_0^{\left((f_\alpha)_I\right)^{1/\alpha}} \left((f_\alpha)_I - x^\alpha\right)\, dx =$$

$$= \frac{4}{1+\eta}\frac{|\alpha|}{\alpha+1}\left((f_\alpha)_I\right)^{(\alpha+1)/\alpha}.$$

Рассмотрим выражение

$$\varphi_1(\alpha,\eta) \equiv \langle\, f_\alpha \,\rangle_I = \frac{\Omega(f_\alpha; I)}{(f_\alpha)_I} = \frac{4|\alpha|}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)/\alpha}} \frac{\left(1+\eta^{\alpha+1}\right)^{1/\alpha}}{(1+\eta)^{(\alpha+1)/\alpha}}.$$

Поскольку

$$\varphi_1(\alpha,1) = \frac{2|\alpha|}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)/\alpha}} = \varphi_0(\alpha,0) = \langle\, f_\alpha \,\rangle_{(0,1)},$$

то

$$\psi_1(\alpha,\eta) \equiv \frac{\langle\, f_\alpha \,\rangle_I}{\langle\, f_\alpha \,\rangle_{(0,1)}} = \frac{\varphi_1(\alpha,\eta)}{\varphi_1(\alpha,1)} = 2\frac{\left(1+\eta^{\alpha+1}\right)^{1/\alpha}}{(1+\eta)^{(\alpha+1)/\alpha}}. \tag{5}$$

Определим функцию ψ следующим образом:

$$\psi(\alpha,\eta) = \begin{cases} \psi_0(\alpha,\eta), & 0 \leq \eta \leq \eta_1, \\ \psi_1(\alpha,\eta), & \eta_1 \leq \eta \leq 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{\langle\!\langle f_\alpha \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}}}{\langle\!\langle f_\alpha \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}_+}} = \max_{0\leq\eta\leq 1} \psi(\alpha,\eta),$$

что и завершает доказательство.

***Следствие* 1.** *Пусть ψ — функция, определенная в теореме* 1. *Тогда*

$$\psi\left(-\frac{\alpha}{\alpha+1}, \eta^{\alpha+1}\right) = \psi(\alpha,\eta), \qquad \alpha > -1, \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

Доказательство проводится с помощью непосредственных преобразований.

Для $p > 1$ положим $\alpha = 1/(p-1)$. Тогда

$$\alpha + 1 = p/(p-1), \quad -\alpha/(\alpha+1) = -1/p,$$

и следствие 1 можно сформулировать следующим образом.

***Следствие* 2.** *Пусть $p > 1$ и ψ — функция, определенная в теореме* 1. *Тогда*

$$\psi\left(-\frac{1}{p}, \eta^{p/(p-1)}\right) = \psi\left(\frac{1}{p-1}, \eta\right), \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

Напомним, что „нормы” в классе Гурова – Решетняка обозначены через $\varepsilon^-_{\mathbb{R}}(p) \equiv \langle\!\langle f_{1/(p-1)} \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}}$ и $\varepsilon^+_{\mathbb{R}}(p) \equiv \langle\!\langle f_{-1/p} \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}}$, $p > 1$. При этом

$$\langle\!\langle f_{1/(p-1)} \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}_+} = \langle\!\langle f_{-1/p} \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}_+} \equiv \varepsilon_{\mathbb{R}_+}(p),$$

а теорема 1 и следствие 2 приводят к следующему результату.

***Следствие* 3.** *Если* $p > 1$, *то*

$$\langle\!\langle f_{1/(p-1)} \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}} = \langle\!\langle f_{-1/p} \rangle\!\rangle_{\mathbb{R}} \equiv \varepsilon_{\mathbb{R}}(p) = \varepsilon_{\mathbb{R}_+}(p) \max_{0 \le \eta \le 1} \psi\left(\frac{1}{p-1}, \eta\right).$$

Следующее следствие позволяет улучшить теорему 1, а именно, уточнить то множество, на котором функция ψ достигает своего максимального значения.

***Следствие* 4.** *Пусть* $\alpha > -1$ *и* $\alpha \ne 0$. *Тогда*

$$\max_{0 \le \eta \le 1} \psi(\alpha, \eta) = \max_{0 \le \eta \le \eta_1} \psi_0(\alpha, \eta),$$

где функция $\psi_0(\alpha, \eta)$ *определена равенством* (4), *а число* $\eta_1 = \eta_1(\alpha) \in (0, 1)$ *определяется как корень уравнения* (3).

Доказательство. Поскольку функция $\psi(\alpha, \eta)$ непрерывна на интервале $[0, 1]$ по переменной η, достаточно показать, что для любого фиксированного α функция $\psi_1(\alpha, \eta)$, определенная равенством (5), убывает на интервале $[\eta_1, 1]$. Для этого вычислим производную

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\psi_1(\alpha, \eta) = 2\frac{\alpha+1}{\alpha}\frac{\left(1+\eta^{\alpha+1}\right)^{1/\alpha-1}}{(1+\eta)^{2+1/\alpha}}\left[\eta^\alpha - 1\right]$$

и заметим, что при $0 < \eta < 1$ эта производная отрицательна.

Следствие 4 доказано.

Следствия 2 и 4 приводят к следующему результату.

***Следствие* 5.** *Если* $p > 1$, *то*

$$\max_{0 \le \eta \le \eta_1(1/(p-1))} \psi_0\left(\frac{1}{p-1}, \eta\right) = \max_{0 \le \eta \le \eta_1(-1/p)} \psi_0\left(-\frac{1}{p}, \eta\right).$$

Вычислим производную функции $\psi_0(\alpha, \eta)$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\psi_0(\alpha, \eta) = \frac{(\alpha+1)^{(\alpha+1)/\alpha}}{\alpha}\frac{\alpha+1}{1+\eta^{\alpha+1}}\frac{1}{1+\eta}\times$$

$$\times\left\{\left[1 - \left(\frac{1}{\alpha+1}\frac{1+\eta^{\alpha+1}}{1+\eta}\right)^{1/\alpha}\right]\left[\frac{1}{\alpha+1}\frac{1+\eta^{\alpha+1}}{1+\eta} - \eta^\alpha\right] - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{\alpha}{\alpha+1}\left(\frac{1}{\alpha+1}\frac{1+\eta^{\alpha+1}}{1+\eta}\right)^{(\alpha+1)/\alpha} - \frac{1}{\alpha+1}\frac{1+\eta^{\alpha+1}}{1+\eta} + \frac{1}{\alpha+1}\right]\eta^\alpha\frac{(\alpha+1)(1+\eta)}{1+\eta^{\alpha+1}}\right\}.$$

Заметим, что при $\eta = \eta_1$ второй множитель во второй строке этого равенства равен нулю. Далее, выражение в квадратных скобках в третьей строке представляет собой $(1+\eta)\Omega(f_\alpha; I)/(2\,\mathrm{sign}\,\alpha)$, и, таким образом, элементарные вычисления приводят к следующему представлению производной функции $\psi_0(\alpha,\eta)$:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\psi_0(\alpha,\eta)=\frac{\alpha+1}{\alpha}\frac{1}{(1+\eta)^{2+1/\alpha}\left(1+\eta^{\alpha+1}\right)^2}\times$$

$$\times\left[\left(1+\eta^{\alpha+1}\right)^{(\alpha+1)/\alpha}(\eta^\alpha-1)+(\alpha+1)^{1/\alpha}\left(1+\eta^{\alpha+1}\right)^2(1+\eta)^{1/\alpha}-\right.$$

$$\left.-(\alpha+1)^{(\alpha+1)/\alpha}\eta^\alpha(1+\eta)^{2+1/\alpha}\right].$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\psi_0(\alpha,0)=\frac{\alpha+1}{\alpha}\left[(\alpha+1)^{1/\alpha}-1\right]>0\quad\text{при}\quad\alpha>0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\psi_0(\alpha,0+)=+\infty\quad\text{при}\quad-1<\alpha<0.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\psi_0\left(\alpha,\eta_1\right)=-\frac{(\alpha+1)^{(3\alpha+1)/\alpha}}{2|\alpha|}\frac{1+\eta_1}{\left(1+\eta_1^{\alpha+1}\right)^2}\eta_1^\alpha\Omega\left(f_\alpha;I\left(\eta_1\right)\right)<0.$$

Это приводит к следующему результату.

***Следствие* 6.** *При любом фиксированном α функция $\psi_0(\alpha,\eta)$ достигает своего наибольшего значения на интервале $[0,\eta_1]$ во внутренней точке $\eta_{\max}=\eta_{\max}(\alpha)\in(0,\eta_1)$, т. е. там, где*

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\psi_0(\alpha,\eta)=0.$$

Следствие 6 означает, что $\eta_{\max}$ является корнем уравнения

$$\left(1+\eta^{\alpha+1}\right)^{(\alpha+1)/\alpha}(\eta^\alpha-1)+(\alpha+1)^{1/\alpha}\left(1+\eta^{\alpha+1}\right)^2(1+\eta)^{1/\alpha}-$$

$$-(\alpha+1)^{(\alpha+1)/\alpha}\eta^\alpha(1+\eta)^{2+1/\alpha}=0. \tag{6}$$

Однако, даже в простейшем случае $\alpha=1$ авторам неизвестно явное решение этого уравнения (см. пример 1).

***Замечание* 4.** Результаты численных исследований поведения функции $\psi_0(\alpha,\eta)$ при различных значениях α показывают, что производная $\dfrac{\partial}{\partial\eta}\psi_0(\alpha,\eta)$ имеет единственный корень $\eta_{\max}=\eta_{\max}(\alpha)$ на интервале $(0,\eta_1)$, однако доказательство этого факта авторам неизвестно.

2. Численные результаты, примеры и комментарии. Зафиксируем $\varepsilon\in(0,2)$. Положим $p=p(\varepsilon)=p_R^+(\varepsilon)>1$, $\alpha=\alpha(\varepsilon)=1/(p(\varepsilon)-1)$ и определим $\eta_1=\eta_1(\varepsilon)$ равенством (3). Согласно теореме 1 и следствию 4,

$$\|\mathbf{T}\|_{\mathcal{GR}}^{(\varepsilon)}\geq\max_{0\leq\eta\leq\eta_1}\psi_0(\alpha,\eta)\equiv C_\varepsilon,\qquad\|\mathbf{T}\|_{\mathcal{GR}}\geq\sup_{0<\varepsilon<2}C_\varepsilon\equiv C. \tag{7}$$

В таблице представлены некоторые значения параметров, полученных в результате численных экспериментов, где в столбцах 6 и 8 содержатся точки максимума функции $\psi_0\left(\alpha,\eta\right)$ при $\alpha=1/(p-1)$ и $\alpha=-1/p$ соответственно.

p	$\varepsilon = \varepsilon_{\mathbb{R}_+}$	$\varepsilon_{\mathbb{R}}$	$C_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_{\mathbb{R}}}{\varepsilon_{\mathbb{R}_+}}$	$\alpha = \dfrac{1}{p-1}$	$\eta^+_{\max}$	$\alpha = -\dfrac{1}{p}$	$\eta^-_{\max}$
1	2	3	4	5	6	7	8
1,15	1,2813	1,4647	1,143133	6,6667	0,5484	–0,8696	0,0100
1,20	1,1647	1,3542	1,162679	5,0000	0,4936	–0,8333	0,0145
1,33	0,9493	1,1346	1,195193	3,0303	0,4030	–0,7519	0,0257
1,50	0,7698	0,9378	1,218204	2,0000	0,3372	–0,6667	0,0383
1,67	0,6513	0,8018	1,231116	1,4993	0,2982	–0,5999	0,0486
2,00	**0,5000**	**0,6224**	**1,244737**	**1,0000**	**0,2531**	**–0,5000**	**0,0640**
3,00	**0,2963**	**0,3726**	**1,257683**	**0,5000**	**0,2001**	–0,3333	0,0895
6,00	0,1340	0,1692	1,263337	0,2000	0,1638	–0,1667	0,1141
11,00	0,0701	0,0886	1,264397	0,1000	0,1508	–0,0909	0,1248
21,00	0,0359	0,0454	1,264692	0,0500	0,1442	–0,0476	0,1309
101,00	0,0073	0,0093	1,264793	0,0100	0,1388	–0,0099	0,1361
1001,00	0,0007	0,0009	1,264797	0,0010	0,1376	–0,0010	0,1373
9999,00	0,0001	0,0001	**1,264797**	0,0001	0,1375	–0,0001	0,1374

Графическая интерпретация численных результатов представлена на рис. 1 и 2.

Нижняя кривая в левой части рис. 1, *а* отражает зависимость „нормы" Гурова – Решетняка $\varepsilon_{\mathbb{R}_+}(p)$ от параметра p. Эти результаты получены из формулы (1). Отметим, что данные представлены в логарифмической шкале и включают не все результаты из второго столбца таблицы. Верхняя кривая показывает зависимость показателя $\varepsilon_{\mathbb{R}}(p)$ от p, полученную в следствии 3.

На рис. 1, *б* приведены графики обратных зависимостей, т. е. те значения параметра p, при которых функция $f_{1/(p-1)}$ принадлежит классу $\mathcal{GR}_{\mathbb{R}_+}(\varepsilon)$ (нижняя кривая) или классу $\mathcal{GR}_{\mathbb{R}}(\varepsilon)$ (верхняя кривая) при заданном ε.

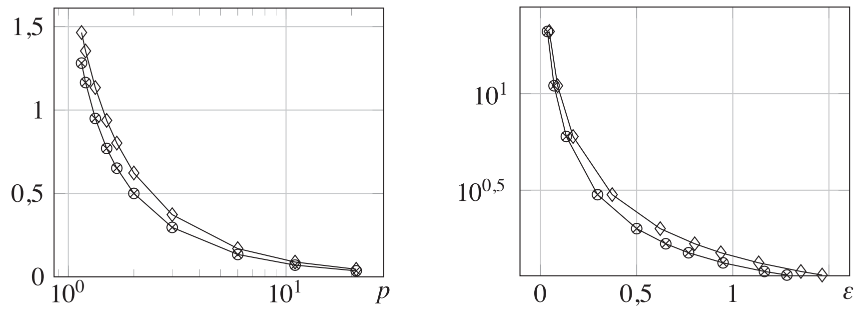
На рис. 2, *а* показана зависимость отношения „норм" функции $f_{1/(p-1)}$ в классах $\mathcal{GR}_{\mathbb{R}}$ и $\mathcal{GR}_{\mathbb{R}_+}$ от параметра p, а на рис. 2, *б* — зависимость значения параметра C_ε (см. (7)) от ε. В обоих случаях переменные p и ε представлены в логарифмической шкале.

***Замечание* 5.** Как видно из таблицы, норму оператора $\mathbf{T}$ можно оценить снизу следующим образом:

$$\|\mathbf{T}\|_{\mathcal{GR}} \geq C = \lim_{\varepsilon \to 0+} C_\varepsilon \approx 1{,}264797,$$

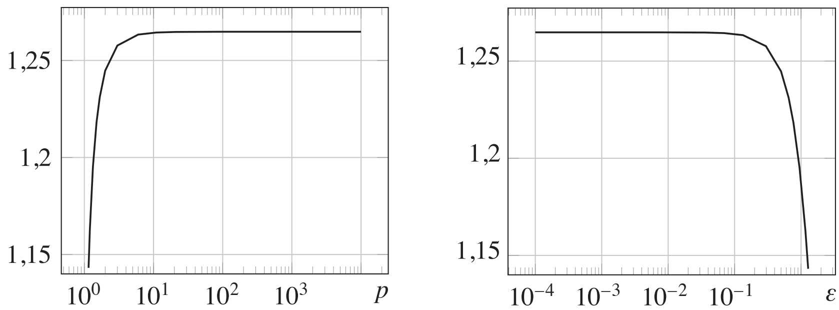
где постоянная C определена в (7). Соответствующее численное значение выделено жирным шрифтом в последней строке таблицы.

***Замечание* 6.** Для функций $f \in BMO$ с ограниченным средним колебанием вопрос о точном значении нормы $\|f\|_{BMO,\mathbb{R}} = \sup_{I \subset \mathbb{R}} \Omega(f; I)$ четного продолжения из $\mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R}$ моно-



а *б*

Рис. 1. Зависимость между p и ε.



а *б*

Рис. 2. Рост „норм” при продолжении из $\mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R}$.

тонной на полуоси $\mathbb{R}_+$ функции сформулирован в [9] и, насколько авторам известно, открыт. В [2] найдена BMO-норма функции $f_0(x) = \ln(1/|x|)$ — типичного представителя этого класса. Именно,

$$\|f_0\|_{BMO,\mathbb{R}} = \frac{2}{e}\frac{1}{t+1}\left[\exp\left(\frac{t\,\ln t}{t+1}\right) + e\frac{t\,\ln t}{t+1}\right],$$

где $t > 1$ — корень уравнения

$$\exp\left(\frac{t\,\ln t}{t+1}\right) = e\left(t - 1 - \frac{t+1}{\ln t}\right). \tag{8}$$

Поскольку $\|f_0\|_{BMO,\mathbb{R}_+} = 2/e$, то численное решение уравнения (8) приводит к оценке (см. [2])

$$\|\mathbf{T}\|_{BMO} = \sup_{\substack{f \text{ — четная на } \mathbb{R} \\ \text{и монотонная на } \mathbb{R}_+}} \frac{\|f\|_{BMO,\mathbb{R}}}{\|f\|_{BMO,\mathbb{R}_+}} \geq \frac{\|f_0\|_{BMO,\mathbb{R}}}{\|f_0\|_{BMO,\mathbb{R}_+}} \equiv C_0 \approx 1{,}264797.$$

Отметим, что значения C и C_0 совпадают с точностью до шести знаков после запятой, т. е. оценки снизу для норм $\|\mathbf{T}\|_{\mathcal{GR}}$ и $\|\mathbf{T}\|_{BMO}$ оператора четного продолжения $\mathbf{T}$ совпали с использованной точностью вычислений.

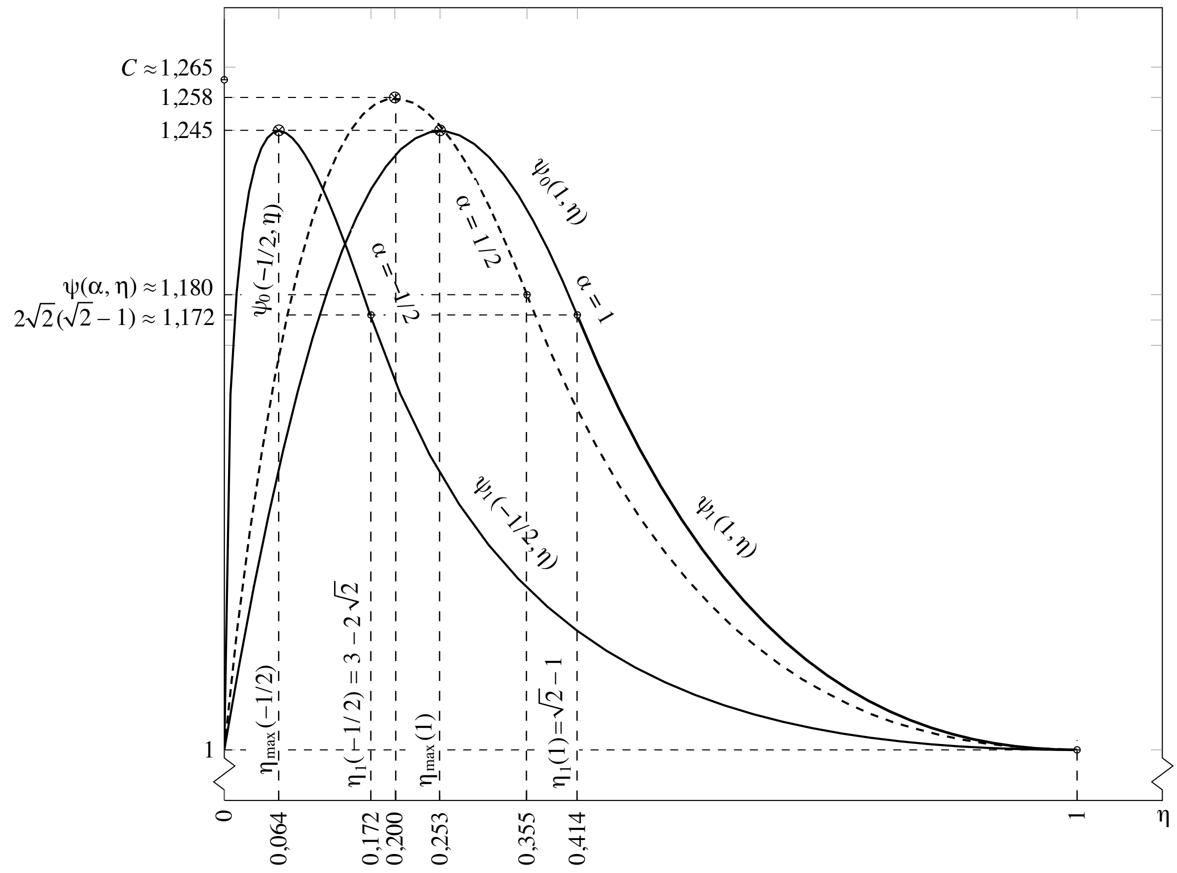


Рис. 3. Графики функций $\psi(1,\eta)$, $\psi\,(-1/2,\eta)$ $(p=2)$ и $\psi\,(1/2,\eta)$ $(p=3)$.

***Пример* 1.** В простейшем случае $\varepsilon = 1/2$, $p = 2$ и $\alpha = 1$ или $\alpha = -1/2$ можем найти корни уравнения (3), равные $\eta_1(1) = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}414$, $\eta_1\,(-1/2) = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0{,}172$.

Соответствующая строка в таблице выделена жирным шрифтом. На рис. 3 графики функций $\psi\,(-1/2,\eta)$ и $\psi(1,\eta)$ изображены сплошными линиями. Отметим, что $\psi_0(1,\eta_1(1)) = \psi_0\,(-1/2,\eta_1\,(-1/2)) = 2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right) \approx 1{,}172$. Для этих значений параметров уравнение (6), из которого определяется $\eta_{\max} = \eta_{\max}(1) \in (0,\eta_1)$, принимает вид

$$3\eta^5 - 3\eta^4 - 6\eta^3 - 10\eta^2 - \eta + 1 = 0.$$

Решение этого уравнения вызывает затруднение. Однако можно показать, что на интервале $(0,\eta_1)$ это уравнение имеет единственное решение (см. замечание 4). Действительно, поскольку вторая производная функции $\psi_0(1,\eta)$ равна

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\psi_0(1,\eta) = -4\left(\frac{3\eta}{(1+\eta)^4} + 2\frac{1-3\eta^2}{(1+\eta^2)^3}\right)$$

и $1 - 3\eta^2 > 0$ при $0 < \eta < \sqrt{2} - 1$, то $\dfrac{\partial^2}{\partial\eta^2}\psi_0(1,\eta) < 0$ на интервале $(0,\eta_1)$. Это означает, что $\dfrac{\partial}{\partial\eta}\psi_0(1,\eta)$ строго убывает на интервале $(0,\eta_1)$ и, следовательно, имеет единственный корень на этом интервале. В силу следствия 2 производная $\dfrac{\partial}{\partial\eta}\psi_0(-1/2,\eta)$ также имеет единственный корень на интервале $(0,\eta_1(-1/2))$.

Отметим, что $\eta_{\max}(1) \approx 0{,}253$, $\eta_{\max}(-1/2) \approx 0{,}064$ являются приближенными значениями соответствующих корней и $C_{1/2} \approx 1{,}245$.

***Пример* 2.** Пусть $\alpha = 1/2$, $p = 3$, $\varepsilon \approx 0{,}296$. В таблице часть строки, содержащей соответствующие численные результаты, выделена жирным шрифтом. На рис. 3 график соответствующей функции изображен штриховой линией.

В этом случае уравнение (3) принимает вид

$$\sqrt{\eta} = \frac{2}{3+\eta}.$$

Решение этого уравнения

$$\eta_1 \equiv \eta_1\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} - 2 \approx 0{,}355$$

может быть получено с помощью формул Кардано. Также имеем

$$\psi_0\left(\frac{1}{2},\eta\right) = \frac{\left(1+\eta^{3/2}\right)^2}{(1+\eta)^3} + \frac{27}{4}\left[\frac{1}{1+\eta^{3/2}} - \frac{1}{1+\eta}\right],$$

$\psi\,(1/2,\eta_1) \approx 1{,}180$. Кроме того, уравнение (6) принимает вид

$$\left(1+\eta^{3/2}\right)^3\left(\eta^{1/2}-1\right) + \frac{9}{4}\left(1+\eta^{3/2}\right)^2(1+\eta)^2 - \frac{27}{8}\eta^{1/2}(1+\eta)^4 = 0,$$

и его приближенное решение $\eta_{\max}(1/2) \approx 0{,}200$. Окончательно получаем приближенное значение $C_{0{,}296} \approx 1{,}258$.

Литература

1. *Bojarski B.* Remarks on stability of the inverse Hölder inequalities and quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 1985. – **10**. – P. 291 – 296.
2. *Didenko V. D., Korenovskyi A. A., Tuah N. J.* Mean oscillations of the logarithmic function // Ric. mat. – 2013. – **62**, № 1. – P. 81 – 90.
3. *Franciosi M.* Higher integrability results and Hölder continuity // J. Math. Anal. and Appl. – 1990. – **150**, № 1. – P. 161 – 165.
4. *Franciosi M.* The Gurov – Reshetnyak condition and VMO // J. Math. Anal. and Appl. – 1994. – **181**, № 1. – P. 17 – 21.
5. *Franciosi M., Moscariello G.* Higher integrability results // Manuscripta Math. – 1985. – **52**, № 1. – P. 151 – 170.
6. *Gehring F. W.* The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping // Acta Math. – 1973. – **130**. – P. 265 – 273.
7. *Gurov L. G., Reshetnyak Y. G.* An analogue of the concept of functions with bounded mean oscillation // Sib. Math. J. – 1976. – **17**, № 3. – P. 417 – 422.
8. *Iwaniec T.* On L^p-integrability in PDE's and quasiregular mappings for large exponent // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 1982. – **7**, № 2. – P. 301 – 322.
9. *Klemes I.* A mean oscillation inequality // Proc. Amer. Math. Soc. – 1985. – **93**, № 3. – P. 497 – 500.
10. *Korenovskii A. A.* Mean oscillations and equimeasurable rearrangements of functions // Lect. Notes. Unione mat. ital. – Berlin: Springer, 2007. – **4**.
11. *Korenovskyi A.* The Gurov – Reshetnyak inequality on semi-axes // Ann. mat. pura and appl. – 2016. – **195**, № 2. – P. 659 – 680.

12. *Korenovskii A. A.* On the connection between mean oscillation and exact integrability classes of functions // Mat. Sb. – 1990. – **181**, № 12. – P. 1721 – 1727.
13. *Korenovskii A. A.* On the embedding of the Gehring class into the Gurov – Reshetnyak class // Visn. Odes. Nats. Univ. Mat. i Mekh. – 2003. – **8**, № 2. – P. 15 – 21.
14. *Korenovskii A. A.* Relation between the Gurov – Reshentnyak and the Muckenhoupt function classes // Mat. Sb. – 2003. – **194**, № 6. – P. 127 – 134.
15. *Korenovskii A. A.* About the Gurov – Reshetnyak class of functions // Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukrainy. Mat. Zastos. – 2004. – **1**, № 1. – P. 189 – 206.
16. *Korenovskii A. A., Lerner A. K., Stokolos A. M.* A note on the Gurov – Reshetnyak condition // Math. Res. Lett. – 2002. – **9**, № 5–6. – P. 579 – 583.
17. *Shanin R. V.* Extension of functions with bounded mean oscillation // J. Math. Sci. (N. Y.). – 2014. – **196**, № 5. – P. 693 – 704.
18. *Wik I.* Note on a theorem by Reshetnyak – Gurov // Dep. Math. Univ. Umea (Publ.). – 1985. – **6**. – P. 1 – 7.

Получено 19.11.15