УДК 519.62

М. В. Кутнів (Нац. ун-т „Львів. політехніка”, Україна; Жешув. технол. ун-т, Польща),
М. Круль (Жешув. технол. ун-т, Польща)

РЕАЛІЗАЦІЯ ТОЧНИХ ТРИТОЧКОВИХ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА ПІВПРЯМІЙ

New algorithmic realization of exact three-point difference schemes via the three-point difference schemes of high order of accuracy is proposed for the numerical solution of boundary-value problems for systems of nonlinear ordinary differential equations on the semiaxis. We study the existence and uniqueness of the solution of three-point difference schemes and estimatie the rate of convergence. The results of numerical experiments are also presented.

Для численного решения краевых задач для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений на полупрямой разработана новая алгоритмическая реализация точных трехточечных разностных схем через трехточечные разностные схемы высокого порядка точности. Исследуются существование и единственность решения трехточечных разностных схем, получена оценка скорости сходимости. Приведены результаты численных экспериментов.

1. Вступ. Для чисельного розв’язування крайових задач на нескінченному інтервалі часто крайові умови замінюють такими ж крайовими умовами в деяких скінченних точках, які знаходять методом проб (див., наприклад, [1]). Однак такий спосіб не дозволяє встановити апріорні оцінки точності. Інколи крайову задачу на нескінченному інтервалі можна замінити крайовою задачею на скінченному інтервалі з вільною межею [2]. Суть іншого підходу полягає у дослідженні асимптотичної поведінки розв’язку на нескінченності та заміні крайових умов асимптотичними умовами у скінченній точці (див., наприклад, [3 – 5]). Цей спосіб дає можливість встановити апріорні оцінки точності. Ще один підхід полягає у заміні змінних, яка дозволяє звести крайову задачу на нескінченному інтервалі до сингулярної крайової задачі другого роду на скінченному інтервалі. Для розв’язування таких сингулярних крайових задач у роботах [6, 7] використано метод колокацій.

У роботі [8] на основі теорії точних триточкових різницевих схем (див. [10 – 12]) побудовано усічені триточкові різницеві схеми рангу $\bar{n} = 2[(n+1)/2]$ ($n \in \mathbb{N}, [\cdot]$ — ціла частина виразу в дужках) на скінченній нерівномірній сітці для розв’язування скалярних нелінійних крайових задач на півпрямій вигляду

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} - m^2u(x) = -f(x,u), \qquad x \in (0,\infty),$$
$$u(0) = \mu_1, \qquad \lim_{x\to\infty} u(x) = 0,$$

де $m \neq 0$ — дійсна стала. Встановлено апріорну оцінку точності таких схем, а також доведено, що різницева схема рангу $\bar{n}$ має порядок точності $\bar{n}$. У статті [9] розроблено адаптивний алгоритм, який дозволяє розв’язати задачу з заданою точністю за допомогою триточкових різницевих схем високого порядку точності.

У даній статті на відміну від [8, 9] розроблено нову ефективну алгоритмічну реалізацію точної триточкової різницевої схеми для випадку систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, яка не вимагає розв’язування додаткової рекурентної системи рівнянь. Крім того, запропоновано усічені триточкові різницеві схеми, обґрунтовані за слабших умов, ніж у [8].

2. Існування та єдиність розв'язку крайової задачі. Розглянемо нелінійну крайову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered}\frac{d^2u(x)}{dx^2} - m^2u(x) = -f(x,u), \qquad x \in (0,\infty),\\ u(0) = \mu_1, \qquad \lim_{x\to\infty} u(x) = 0, \\ u\colon \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^s, \qquad f(x,u)\colon \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^s, \qquad \mu_1 \in \mathbb{R}^s,\end{gathered} \tag{1}$$

де $\mathbb{R}^s$ — простір s-вимірних векторів.

Достатні умови існування розв'язку задачі (1) наведено у [13, с. 101].

Введемо функцію $u^{(0)}(x) = \mu_1 \exp(-mx)$ і множину

$$\Omega(D,\beta) = \left\{u(x) : u \in C^1[0,\infty), \qquad \left\|u - u^{(0)}\right\|_{1,\infty,D} \le \beta, \qquad D \subseteq [0,\infty)\right\},$$

$$\|u\|_{1,\infty,D} = \max\left\{\|u\|_{0,\infty,D}, \qquad \left\|\frac{du}{dx}\right\|_{0,\infty,D}\right\}, \qquad \|u\|_{0,\infty,D} = \max_{x\in D}\|u(x)\|,$$

де (u,v) — скалярний добуток векторів $u,\ v \in \mathbb{R}^s$, $\|u\| = (u,u)^{1/2}$, $u \in \mathbb{R}^s$ — норма вектора.

Достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі (1), які випливають з методу лінеаризації та принципу стискаючих відображень, наведено в такій теоремі.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови*

$$f(x,u) = [f_i(x,u)]_{i=1}^s, \qquad f_i(x,\cdot) \in Q^0[0,\infty),$$

$$\|f(x,u)\| \le K(x) \le K_1 \qquad \forall x \in [0,\infty), \qquad u \in \Omega([0,\infty), r),$$

$$r = K_1 \max\left\{1/m^2, 1/m\right\},$$

$$\lim_{x\to\infty} \exp(-mx)\int\limits_0^x \exp(m\xi)K(\xi)\,d\xi = 0, \qquad \lim_{x\to\infty}\exp(mx)\int\limits_x^\infty \exp(-m\xi)K(\xi)\,d\xi = 0,$$

$$\|f(x,u) - f(x,v)\| \le L_1\|u - v\| \qquad \forall\, x \in [0,\infty)\ \forall\, u,v \in \Omega([0,\infty), r),$$

$$q = L_1 \max\left\{1/m^2, 1/m\right\} < 1.$$

Тоді задача (1) *в* $\Omega([0,\infty), r)$ *має єдиний розв'язок* $u(x)$, *який можна знайти методом послідовних наближень*

$$\begin{gathered}\frac{d^2u^{(k)}}{dx^2} - m^2u^{(k)} = -f\left(x, u^{(k-1)}\right), \qquad x \in (0,\infty),\\ u^{(k)}(0) = \mu_1, \qquad \lim_{x\to\infty} u^{(k)}(x) = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,\end{gathered}$$

з оцінкою похибки

$$\left\|u^{(k)} - u\right\|_{1,\infty,[0,\infty)} \le \frac{q^k}{1-q} r.$$

Тут $Q^0[0,\infty)$ — *клас кусково-неперервних функцій зі скінченною кількістю точок розриву першого роду.*

Доведення аналогічне скалярному випадку (див. [8]).

3. Триточкові різницеві схеми високого порядку точності. На інтервалі $[0,\infty)$ введемо нерівномірну сітку

$$\hat{\omega}_N = \left\{ x_j \in [0,\infty), j = 0,1,\ldots,N : x_0 = 0, h_j = x_j - x_{j-1} > 0, \sum_{j=1}^{N} h_j = x_N \right\}$$

так, щоб точки розриву функції $f(x,u)$ збігалися з вузлами сітки. Множину всіх точок розриву позначимо через ρ і будемо вважати N таким, що $\rho \subseteq \hat{\omega}_N$.

Згідно з [8] накладемо на кроки сітки такі обмеження:

$$c_1 \le \frac{h_{\max}}{h_{\min}} \le c_2, \tag{2}$$

де $|h| = h_{\max}$ і $h_{\min}$ позначають максимальну і мінімальну величину кроку відповідно, c_1, c_2 — дійсні сталі. Для досягнення максимального порядку збіжності різницевої схеми (див. теорему 2) потрібно, щоб

$$\frac{1}{h_{\max}} \le x_N \le \frac{1}{h_{\min}}. \tag{3}$$

З нерівностей $h_{\min} N \le x_N = h_1 + h_2 + \ldots + h_N \le h_{\max} N$ і (3) випливають співвідношення

$$h_{\max} \le \frac{c_2}{\sqrt{N}}, \qquad h_{\min} \ge \frac{1}{c_2\sqrt{N}}, \qquad \frac{\sqrt{N}}{c_2} \le h_{\min} N \le x_N \le h_{\max} N \le c_2\sqrt{N}. \tag{4}$$

Таким чином, $h_{\max} \to 0$, $x_N \to \infty$ при $N \to \infty$.

Для задачі (1) існує точна триточкова різницева схема (ТТРС) вигляду

$$\begin{gathered} (a u_{\bar{x}})_{\hat{x},j} - d(x_j)\, u_j = -\varphi(x_j,u), \qquad j = 1,2,\ldots,N-1, \\ u_0 = \mu_1, \qquad -a(x_N) u_{\bar{x},N} = \beta_2 u_N - \mu_2(x_N,u), \end{gathered} \tag{5}$$

де

$$u_{\bar{x},j} = \frac{u_j - u_{j-1}}{h_j}, \qquad u_{\hat{x},j} = \frac{u_{j+1} - u_j}{\hbar_j}, \qquad \hbar_j = \frac{h_j + h_{j+1}}{2},$$

$$\begin{gathered} a(x_j) = \frac{m h_j}{\sinh(m h_j)}, \qquad j = 1,2,\ldots,N, \qquad \beta_2 = m \frac{\exp(m h_N) - 1}{\sinh(m h_N)}, \\ d(x_j) = \frac{m}{\hbar_j} \left\{ \frac{\cosh(m h_j) - 1}{\sinh(m h_j)} + \frac{\cosh(m h_{j+1}) - 1}{\sinh(m h_{j+1})} \right\}, \qquad j = 1,2,\ldots,N-1, \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \varphi(x_j,u) = \frac{1}{\hbar_j} \left[Z_2^j(x_j,u) - Z_1^j(x_j,u) + \frac{m\left(\cosh(m h_j)\, Y_1^j(x_j,u) - u_{j-1}\right)}{\sinh(m h_j)} + \right. \\ \left. + \frac{m\left(\cosh(m h_{j+1})\, Y_2^j(x_j,u) - u_{j+1}\right)}{\sinh(m h_{j+1})} \right], \qquad j = 1,2,\ldots,N-1, \end{gathered} \tag{7}$$

$$\mu_2\left(x_N,u\right)=Z_2^N\left(x_N,u\right)+mY_2^N\left(x_N,u\right)-Z_1^N\left(x_N,u\right)+ \\ +\frac{m\left(\cosh\left(mh_N\right)Y_1^N\left(x_N,u\right)-u_{N-1}\right)}{\sinh\left(mh_N\right)}, \tag{8}$$

$Y_\alpha^j(x,u),\ Z_\alpha^j(x,u)\in\mathbb{R}^s,\ j=2-\alpha,3-\alpha,\ldots,N+1-\alpha,\ \alpha=1,2,$ є розв'язками задач Коші

$$\frac{dY_\alpha^j(x,u)}{dx}=Z_\alpha^j(x,u), \\ \frac{dZ_\alpha^j\left(x,u\right)}{dx}-m^2Y_\alpha^j\left(x,u\right)=-f\left(x,Y_\alpha^j\left(x,u\right)\right),\qquad x_{j+\alpha-2}<x<x_{j+\alpha-1}, \tag{9} \\ Y_\alpha^j\left(x_{j+(-1)^\alpha},u\right)=u\left(x_{j+(-1)^\alpha}\right),\qquad Z_\alpha^j\left(x_{j+(-1)^\alpha},u\right)=\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}},$$

а $Y_2^N(x,u),\ Z_2^N(x,u)\in\mathbb{R}^s$ — розв'язком задачі Коші

$$\frac{dY_2^N(x,u)}{dx}=Z_2^N(x,u),\quad \frac{dZ_2^N\left(x,u\right)}{dx}-m^2Y_2^N\left(x,u\right)=-f\left(x,Y_2^N\left(x,u\right)\right),\quad x>x_N, \\ \lim_{x\to\infty}Y_2^N\left(x,u\right)=0,\qquad \lim_{x\to\infty}Z_2^N\left(x,u\right)=0. \tag{10}$$

Для розв'язування задач (9) використаємо однокрокові методи (наприклад, метод рядів Тейлора або метод Рунге – Кутта) порядку точності $\bar{n}=2[(n+1)/2]$ ($n\in\mathbb{N}$, $[\cdot]$ — ціла частина) з відповідними функціями приросту $\Phi_1\left(x,u,y,h\right),\Phi_2\left(x,u,y,h\right)$:

$$Y_\alpha^{(\bar{n})j}(x_j,u)=u_{j+(-1)^\alpha}+(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},u'_{j+(-1)^\alpha},(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right), \\ Z_\alpha^{(n)j}(x_j,u)=u'_{j+(-1)^\alpha}+(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},u'_{j+(-1)^\alpha},(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right). \tag{11}$$

Значення наближеного розв'язку $Z_\alpha^{(n)j}(x_j,u)$ апроксимує значення $Z_\alpha^j(x_j,u)$ з порядком точності не менше n, $Y_\alpha^{(\bar{n})j}(x_j,u)$ апроксимує $Y_\alpha^j(x_j,u)$ з порядком точності $\bar{n}$. Тоді, якщо права частина диференціального рівняння диференційовна достатню кількість разів, існують розвинення

$$Y_\alpha^j(x_j,u)=Y_\alpha^{(\bar{n})j}(x_j,u)+[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{\bar{n}+1}\psi_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)+O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{n}+2}), \tag{12}$$

$$Z_\alpha^j(x_j,u)=Z_\alpha^{(n)j}(x_j,u)+[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{n+1}\tilde{\psi}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)+O(h_{j-1+\alpha}^{n+2}). \tag{13}$$

Знайдемо наближений розв'язок задачі (10). Використавши підстановку $x=1/t$, зведемо систему рівнянь (10) до вигляду

$$t^2\frac{dY_2^N(1/t,u)}{dt}=-Z_2^N(1/t,u), \\ t^2\frac{dZ_2^N(1/t,u)}{dt}+m^2Y_2^N(1/t,u)=f\left(1/t,Y_2^N\right),\qquad 0<t<1/x_N, \tag{14} \\ \lim_{t\to0}Y_2^N(1/t,u)=0,\qquad \lim_{t\to0}Z_2^N(1/t,u)=0.$$

Зауважимо, що з другого рівняння системи (14) випливає рівність

$$\lim_{t\to 0} f\left(1/t, Y_2^N\right) = 0.$$

Задачу Коші (14) будемо розв'язувати чисельно методом рядів Тейлора

$$\begin{aligned} Y_2^{(\bar{n}-1)N}(x_N, u) &= \sum_{p=1}^{\bar{n}-1} \left(\frac{1}{x_N}\right)^p \frac{1}{p!} \left.\frac{d^p Y_2^N}{dt^p}\right|_{t=0}, \\ Z_2^{(\bar{n}-1)N}(x_N, u) &= \sum_{p=1}^{\bar{n}-1} \left(\frac{1}{x_N}\right)^p \frac{1}{p!} \left.\frac{d^p Z_2^N}{dt^p}\right|_{t=0}, \end{aligned} \tag{15}$$

де

$$\left.\frac{d^p Y_2^N}{dt^p}\right|_{t=0} = \frac{1}{m^2}\left[\lim_{t\to 0} \frac{d^p f\left(1/t, Y_2^N\right)}{dt^p} - (p-1)p \left.\frac{d^{p-1} Z_2^N}{dt^{p-1}}\right|_{t=0}\right], \tag{16}$$

$$\left.\frac{d^p Z_2^N}{dt^p}\right|_{t=0} = -(p-1)p \left.\frac{d^{p-1} Y_2^N}{dt^{p-1}}\right|_{t=0}, \qquad p = 1, 2, \ldots, \bar{n}-1. \tag{17}$$

Для частинних похідних вектор-функції $f(1/t, u)$ по першому і другому аргументах введемо позначення $f_t(1/t, u),\ f_u(1/t, u)$ і подібні позначення для вищих похідних. Під їх значенням у точці $(\infty, 0)$ будемо розуміти границю при $t \to 0$ та $u = 0$. Використавши правило диференціювання складної функції (див., наприклад, [14, с. 248]) та елементарні диференціали (див. [15, с. 135]), знайдемо похідні $d^p f/dt^p,\ p = 1, 2, \ldots$. Тоді з рівностей (16), (17) випливають співвідношення

$$\left[I - \frac{1}{m^2} f_u(\infty, 0)\right] \left.\frac{dY_2^N}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{m^2} f_t(\infty, 0), \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \left[I - \frac{1}{m^2} f_u(\infty, 0)\right] \left.\frac{d^2 Y_2^N}{dt^2}\right|_{t=0} &= \frac{1}{m^2}\left[f_{tt}(\infty, 0) + 2 f_{tu}(\infty, 0) \left.\frac{dY_2^N}{dt}\right|_{t=0} + \right. \\ &\left. + f_{uu}(\infty, 0)\left(\left.\frac{dY_2^N}{dt}\right|_{t=0}, \left.\frac{dY_2^N}{dt}\right|_{t=0}\right)\right], \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \left[I - \frac{1}{m^2} f_u(\infty, 0)\right] \left.\frac{d^3 Y_2^N}{dt^3}\right|_{t=0} &= \frac{1}{m^2}\left[f_{ttt}(\infty, 0) + 3 f_{ttu}(\infty, 0) \left.\frac{dY_2^N}{dt}\right|_{t=0} + \right. \\ &+ 3 f_{tuu}(\infty, 0)\left(\left.\frac{dY_2^N}{dt}\right|_{t=0}, \left.\frac{dY_2^N}{dt}\right|_{t=0}\right) + 3 f_{tu}(\infty, 0) \left.\frac{d^2 Y_2^N}{dt^2}\right|_{t=0} + \\ &+ 3 f_{uu}(\infty, 0)\left(\left.\frac{d^2 Y_2^N}{dt^2}\right|_{t=0}, \left.\frac{dY_2^N}{dt}\right|_{t=0}\right) + \\ &\left. + f_{uuu}(\infty, 0)\left(\left.\frac{dY_2^N}{dt}\right|_{t=0}, \left.\frac{dY_2^N}{dt}\right|_{t=0}, \left.\frac{dY_2^N}{dt}\right|_{t=0}\right) + 12 \left.\frac{dY_2^N}{dt}\right|_{t=0}\right], \end{aligned} \tag{20}$$

. . . .

з яких за умови, що матриця $I - \dfrac{1}{m^2} f_u(\infty, 0)$ не вироджена, можна послідовно обчислити похідні

$$\left.\frac{d^p Y_2^N}{dt^p}\right|_{t=0}, \qquad \left.\frac{d^p Z_2^N}{dt^p}\right|_{t=0}, \qquad p = 1, 2, \ldots, \bar{n} - 1.$$

Зауважимо, що якщо система рівнянь (1) автономна, то згідно з (17)–(20)

$$\left.\frac{d^p Y_2^N}{dt^p}\right|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{d^p Z_2^N}{dt^p}\right|_{t=0} = 0, \qquad p = 1, 2, \ldots, \bar{n} - 1.$$

Справджується така лема.

Лема 1. *Нехай*

$$f(x, u) \in \bigcup_{j=1}^{N} C^{n+1}\left([x_{j-1}, x_j] \times \Omega\left([0, \infty), r + \Delta\right)\right) \cup C^{n+1}\left([x_N, \infty) \times \Omega\left([0, \infty), r + \Delta\right)\right),$$

матриця $I - \dfrac{1}{m^2} f_u(\infty, 0)$ *не вироджена і для чисельного методу* (11) *існують розвинення* (12), (13). *Тоді справджуються співвідношення*

$$Y_\alpha^j(x_j, u) = Y_\alpha^{(\bar{n})j}(x_j, u) + (-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}^{\bar{n}+1} \psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}, u) + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{n}+2}), \tag{21}$$

$$Z_\alpha^j(x_j, u) = Z_\alpha^{(n)j}(x_j, u) + \left[(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}\right]^{n+1} \tilde{\psi}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}, u) + O(h_{j-1+\alpha}^{n+2}), \tag{22}$$

$$Y_2^N(x_N, u) = Y_2^{(\bar{n}-1)N}(x_N, u) + O\left(1/x_N\right)^{\bar{n}}, \tag{23}$$

$$Z_2^N(x_N, u) = Z_2^{(\bar{n}-1)N}(x_N, u) + O\left(1/x_N\right)^{\bar{n}}. \tag{24}$$

Доведення аналогічне скалярному випадку (див. [8]).

Замість ТТРС (5)–(8) тепер можна скористатися усіченою ТРС рангу $\bar{n}$ вигляду

$$\begin{gathered}\left(a y_{\bar{x}}^{(\bar{n})}\right)_{\hat{x}, j} - d(x_j)\, y_j^{(\bar{n})} = -\varphi^{(\bar{n})}\left(x_j, y^{(\bar{n})}\right), \qquad j = 1, 2, \ldots, N-1, \\ y_0^{(\bar{n})} = \mu_1, \qquad -a(x_N)\, y_{\bar{x}, N}^{(\bar{n})} = \beta_2 y_N^{(\bar{n})} - \mu_2^{(\bar{n})}\left(x_N, y^{(\bar{n})}\right),\end{gathered} \tag{25}$$

де

$$\begin{gathered}\varphi^{(\bar{n})}(x_j, u) = \frac{1}{\hbar_j}\left[Z_2^{(n)j}(x_j, u) - Z_1^{(n)j}(x_j, u) + \frac{m\left(\cosh(m h_j)\, Y_1^{(\bar{n})j}(x_j, u) - u_{j-1}\right)}{\sinh(m h_j)} + \right. \\ \left. + \frac{m\left(\cosh(m h_{j+1}) Y_2^{(\bar{n})j}(x_j, u) - u_{j+1}\right)}{\sinh(m h_{j+1})}\right],\end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered}\mu_2^{(\bar{n})}(x_N, u) = Z_2^{(\bar{n}-1)N}(x_N, u) + m Y_2^{(\bar{n}-1)N}(x_N, u) - \\ - Z_1^{(n)N}(x_N, u) + \frac{m\left(\cosh(m h_N) Y_1^{(\bar{n})N}(x_N, u) - u_{N-1}\right)}{\sinh(m h_N)}.\end{gathered} \tag{27}$$

Введемо множину сіткових функцій

$$\Omega(\hat{\bar{\omega}}_N, \beta) = \left\{ v(x),\ x \in \hat{\bar{\omega}}_N : \left\| v - u^{(0)} \right\|_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+} \le \beta \right\},$$

де

$$\|v\|_{0,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N} = \max_{0 \le j \le N} \|v_j\|, \qquad \|v\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+} = \max_{1 \le j \le N} \|v_j\|,$$

$$\|v\|_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+} = \max\left\{ \|v\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+},\ \|v_{\bar{x}}\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+} \right\}.$$

Для доведення існування та єдиності розв'язку ТРС (25), а також для встановлення її точності потрібна така лема.

Лема 2. *Нехай виконано умови леми* 1, *тоді будуть мати місце співвідношення*

$$\varphi^{(\bar{n})}(x_j, u) - \varphi(x_j, u) =$$

$$= \left\{ h_j^{n+1} \left[\frac{m h_j \cosh(m h_j)}{\sinh(m h_j)}\ \psi_1^j(x,u)\Big|_{x=x_j+0} - \tilde{\psi}_1^j(x,u)\Big|_{x=x_j+0} \right] \right\}_{\hat{x}} + O\left(\frac{h_j^{n+2} + h_{j+1}^{n+2}}{\hbar_j} \right), \quad (28)$$

якщо n є непарним, і

$$\varphi^{(\bar{n})}(x_j, u) - \varphi(x_j, u) =$$

$$= \left\{ h_j^{n} \frac{m h_j \cosh(m h_j)}{\sinh(m h_j)}\ \psi_1^j(x,u)\Big|_{x=x_j+0} \right\}_{\hat{x}} + O\left(\frac{h_j^{n+1} + h_{j+1}^{n+1}}{\hbar_j} \right), \quad (29)$$

якщо n є парним, а також оцінки

$$\left\| \mu_2^{(\bar{n})}(x_N, u) - \mu_2(x_N, u) \right\| \le M \left(\max\left\{ |h|^{\bar{n}}, \left(\frac{1}{x_N}\right)^{\bar{n}} \right\} \right), \quad (30)$$

$$\left\| \varphi^{(\bar{n})}(x_j, u) \right\| \le K_1 + M|h| \qquad \forall\, u \in \Omega\left(\hat{\bar{\omega}}_N, r + \Delta\right),\ N \to \infty, \quad (31)$$

$$\left\| \varphi^{(\bar{n})}(x_j, u) - \varphi^{(\bar{n})}(x_j, v) \right\| \le (L_1 + M|h|) \|u - v\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+}$$
$$\forall\, u, v \in \Omega\left(\hat{\bar{\omega}}_N, r + \Delta\right), \qquad N \to \infty, \quad (32)$$

$$\left\| \mu_2^{(\bar{n})}(x_N, u) \right\| \le \frac{h_N}{2} K_1 + M\left(h_N^2 + \frac{1}{x_N} \right) \qquad \forall u \in \Omega\left(\hat{\bar{\omega}}_N, r + \Delta\right),\ N \to \infty, \quad (33)$$

$$\left\| \mu_2^{(\bar{n})}(x_N, u) - \mu_2^{(\bar{n})}(x_N, v) \right\| \le \left(\frac{h_N}{2} L_1 + M\left(h_N^2 + \frac{1}{x_N} \right) \right) \|u - v\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+}$$
$$\forall\, u, v \in \Omega\left(\hat{\bar{\omega}}_N, r + \Delta\right), \qquad N \to \infty, \quad (34)$$

де стала M не залежить від $|h|$ і $1/x_N$.

Доведення. Доведемо співвідношення (28) – (30). Зауважимо, що

$$\varphi^{(\bar{n})}(x_j, u) - \varphi(x_j, u) = \hbar_j^{-1} \sum_{\alpha=1}^{2} (-1)^{\alpha} \Bigg[Z_{\alpha}^{(n)j}(x_j, u) - Z_{\alpha}^{j}(x_j, u) +$$

$$+\left(-1\right)^{\alpha}\frac{m\cosh\left(mh_{j-1+\alpha}\right)\left(Y_{\alpha}^{(\bar{n})j}\left(x_j,u\right)-Y_{\alpha}^{j}\left(x_j,u\right)\right)}{\sinh\left(mh_{j-1+\alpha}\right)}\Bigg], \tag{35}$$

$$\mu_2^{(\bar{n})}\left(x_N,u\right)-\mu_2\left(x_N,u\right)=Z_2^{(\bar{n}-1)N}\left(x_N,u\right)-Z_2^{N}\left(x_N,u\right)+$$
$$+m\left(Y_2^{(\bar{n}-1)N}\left(x_N,u\right)-Y_2^{N}\left(x_N,u\right)\right)-Z_1^{(n)N}\left(x_N,u\right)+$$
$$+Z_1^{N}\left(x_N,u\right)+\frac{m\cosh\left(mh_N\right)\left[Y_1^{(\bar{n})N}\left(x_N,u\right)-Y_1^{N}\left(x_N,u\right)\right]}{\sinh\left(mh_N\right)}. \tag{36}$$

Співвідношення (35) при непарних n зводяться до

$$\varphi^{(\bar{n})}\left(x_j,u\right)-\varphi\left(x_j,u\right)=\frac{1}{\hbar_j}\left[h_{j+1}^{n+2}\frac{m\cosh\left(mh_{j+1}\right)}{\sinh\left(mh_{j+1}\right)}\psi_1^{j+1}(x_{j+1},u)-\right.$$
$$-h_j^{n+2}\frac{m\cosh\left(mh_j\right)}{\sinh\left(mh_j\right)}\psi_1^{j}(x_{j-1},u)-h_{j+1}^{n+1}\tilde{\psi}_1^{j+1}(x_{j+1},u)+$$
$$\left.+h_j^{n+1}\tilde{\psi}_1^{j}(x_{j-1},u)\right]+O\left(\frac{h_j^{n+2}+h_{j+1}^{n+2}}{\hbar_j}\right), \tag{37}$$

а при парних

$$\varphi^{(\bar{n})}\left(x_j,u\right)-\varphi\left(x_j,u\right)=\frac{1}{\hbar_j}\left[h_{j+1}^{n+1}\frac{m\cosh\left(mh_{j+1}\right)}{\sinh\left(mh_{j+1}\right)}\psi_1^{j+1}(x_{j+1},u)-\right.$$
$$\left.-h_j^{n+1}\frac{m\cosh\left(mh_j\right)}{\sinh\left(mh_j\right)}\psi_1^{j}(x_{j-1},u)\right]+O\left(\frac{h_j^{n+1}+h_{j+1}^{n+1}}{\hbar_j}\right). \tag{38}$$

Оскільки $\psi_1^j(x_{j-1},u)=\psi_1^j(x_j,u)+O(h_j)$, $\tilde{\psi}_1^j(x_{j-1},u)=\tilde{\psi}_1^j(x_j,u)+O(h_j)$, то з рівностей (37) і (38) випливають (28), (29).

Нерівність (30) випливає з (36) та оцінок (21)–(24).

Доведемо нерівності (31)–(34). Із умови існування розвинень (12), (13) випливають співвідношення

$$\Phi_1\left(x,u,y,0\right)=y,\qquad\frac{\partial\Phi_1\left(x,u,y,0\right)}{\partial h}=\frac{1}{2}\left(m^2u-f(x,u)\right),$$
$$\Phi_2\left(x,u,y,0\right)=m^2u-f(x,u).$$

Отже, справджуються рівності

$$Y_{\alpha}^{(\bar{n})j}(x_j,u)=u_{j+(-1)^{\alpha}}+(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}u'_{j+(-1)^{\alpha}}+$$
$$+\frac{h_{j-1+\alpha}^2}{2}\left[m^2u_{j+(-1)^{\alpha}}-f\left(x_{j+(-1)^{\alpha}},u_{j+(-1)^{\alpha}}\right)\right]+$$
$$+\frac{(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}^3}{2}\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_{j+(-1)^{\alpha}},u_{j+(-1)^{\alpha}},u'_{j+(-1)^{\alpha}},\bar{h}\right)}{\partial h^2},$$

$$Z_\alpha^{(n)j}(x_j,u) = u'_{j+(-1)^\alpha} + (-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}\left[m^2 u_{j+(-1)^\alpha} - f\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}\right)\right] +$$
$$+h_{j-1+\alpha}^2 \frac{\partial \Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}, u'_{j+(-1)^\alpha}, \tilde{h}\right)}{\partial h}.$$

Тоді

$$\varphi^{(\bar{n})}(x_j,u) = \hbar_j^{-1}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{(-1)^\alpha\left[1 - \frac{mh_{j-1+\alpha}\cosh(mh_{j-1+\alpha})}{\sinh(mh_{j-1+\alpha})}\right]u'_{j+(-1)^\alpha} + \right.$$
$$+\left[1 - \frac{mh_{j-1+\alpha}\cosh(mh_{j-1+\alpha})}{2\sinh(mh_{j-1+\alpha})}\right]h_{j-1+\alpha} f\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}\right) +$$
$$+\frac{m\left[\cosh(mh_{j-1+\alpha})\left(1+\dfrac{m^2h_{j-1+\alpha}^2}{2}\right) - 1 - mh_{j-1+\alpha}\sinh(mh_{j-1+\alpha})\right]}{\sinh(mh_{j-1+\alpha})}u_{j+(-1)^\alpha} +$$
$$+h_{j-1+\alpha}^2\frac{\partial\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}, u'_{j+(-1)^\alpha}, \tilde{h}\right)}{\partial h} +$$
$$\left.+\frac{mh_{j-1+\alpha}^3\cosh(mh_{j-1+\alpha})}{2\sinh(mh_{j-1+\alpha})}\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}, u'_{j+(-1)^\alpha}, \bar{h}\right)}{\partial h^2}\right\} =$$
$$= \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\frac{h_{j-1+\alpha}}{2} f\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}\right)\right\} + O\left(\frac{h_j^2 + h_{j+1}^2}{\hbar_j}\right)$$

і

$$\mu_2^{(\bar{n})}(x_N,u) = \frac{h_N}{2} f(x_{N-1}, u_{N-1}) + O\left(h_N^2 + \frac{1}{x_N}\right).$$

Звідси випливають оцінки (31), (33).

Доведемо оцінку (32). Оскільки

$$\left\|\varphi^{(\bar{n})}(x_j,u) - \varphi^{(\bar{n})}(x_j,v)\right\| \le$$
$$\le \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\frac{h_{j-1+\alpha}}{2}\left\|f\left(x_{j+(-1)^\alpha}, u_{j+(-1)^\alpha}\right) - f\left(x_{j+(-1)^\alpha}, v_{j+(-1)^\alpha}\right)\right\| \times\right.$$
$$\times\left[1 + \frac{\left|\sinh(mh_{j-1+\alpha}) - mh_{j-1+\alpha}\cosh(mh_{j-1-\alpha})\right|}{\sinh(mh_{j-1+\alpha})}\right] +$$
$$+\left|1 - \frac{mh_{j-1+\alpha}\cosh(mh_{j-1+\alpha})}{\sinh(mh_{j-1+\alpha})}\right|\left\|u'_{j+(-1)^\alpha} - v'_{j+(-1)^\alpha}\right\| +$$
$$+\frac{m\left[\cosh(mh_{j-1+\alpha})\left(1+\frac{m^2h_{j-1+\alpha}^2}{2}\right) - 1 - mh_{j-1+\alpha}\sinh(mh_{j-1+\alpha})\right]}{\sinh(mh_{j-1+\alpha})}\times$$

$$\times\left\|u_{j+(-1)^\alpha}-v_{j+(-1)^\alpha}\right\|+$$

$$+h_{j-1+\alpha}^2\left\|\frac{\partial\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},u'_{j+(-1)^\alpha},\tilde{h}\right)}{\partial h}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},v_{j+(-1)^\alpha},v'_{j+(-1)^\alpha},\tilde{h}\right)}{\partial h}\right\|+$$

$$+\frac{mh_{j-1+\alpha}^3\cosh(mh_{j-1+\alpha})}{2\sinh(mh_{j-1+\alpha})}\left\|\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},u'_{j+(-1)^\alpha},\bar{h}\right)}{\partial h^2}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial^2\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},v_{j+(-1)^\alpha},v'_{j+(-1)^\alpha},\bar{h}\right)}{\partial h^2}\right\|\right\},$$

то згідно з формулою скінченних приростів знайдуться $\bar{u},\bar{u}',\tilde{u},\tilde{u}'$ такі, що

$$\left\|\varphi^{(\bar{n})}\left(x_j,u\right)-\varphi^{(\bar{n})}\left(x_j,v\right)\right\|\leq\left(L_1+M\left|h\right|\right)\left\|u-v\right\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+}+$$

$$+M_2|h|\left\{\left[1+\left\|\frac{\partial^2\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},\bar{u},u'_{j+(-1)^\alpha},\tilde{h}\right)}{\partial h\partial u}\right\|+\right.\right.$$

$$\left.+\left\|\frac{\partial^3\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},\tilde{u},u'_{j+(-1)^\alpha},\bar{h}\right)}{\partial h^2\partial u}\right\|\right]\left\|u-v\right\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+}+$$

$$+\left[1+\left\|\frac{\partial^2\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},\bar{u}',\tilde{h}\right)}{\partial h\partial y}\right\|+\right.$$

$$\left.\left.+\left\|\frac{\partial^3\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},\tilde{u}',\bar{h}\right)}{\partial h^2\partial u}\right\|\right]\left\|u-v\right\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+}\right\}.$$

Звідси отримаємо оцінку (32).

Оцінка (34) випливає з

$$\left\|\mu_2^{(\bar{n})}\left(x_N,u\right)-\mu_2^{(\bar{n})}\left(x_N,v\right)\right\|\leq\frac{h_N}{2}\left\|f\left(x_{N-1},u_{N-1}\right)-f\left(x_{N-1},v_{N-1}\right)\right\|+$$

$$+M_1\left(h_N^2+\frac{1}{x_N}\right)\left\|u-v\right\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+}\leq\left(\frac{h_N}{2}L_1+M\left(h_N^2+\frac{1}{x_N}\right)\right)\left\|u-v\right\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+}.$$

Лему 2 доведено.

На підставі попередніх тверджень доведемо таку теорему.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1 *і леми* 1. *Тоді існує таке* $N_0>0$, *що для будь-якого* $N\geq N_0$ *ТРС* (25)–(27) *має єдиний розв'язок, точність якого характеризується оцінкою*

$$\left\|y^{(\bar{n})}-u\right\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N}^{*}=\max\left\{\left\|y^{(\bar{n})}-u\right\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+},\left\|\frac{dy^{(\bar{n})}}{dx}-\frac{du}{dx}\right\|_{0,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N}\right\}\leq$$

$$\leq M\max\left\{|h|^{\bar{n}},\left(\frac{1}{x_N}\right)^{\bar{n}}\right\}\leq M\,|h|^{\bar{n}}\leq M\,N^{-\bar{n}/2},$$

де

$$\frac{dy^{(\bar{n})}(x_0)}{dx}=Z_2^{(n)0}\left(x_0,y^{(\bar{n})}\right)+\frac{m\cosh(mh_1)\left(Y_2^{(\bar{n})0}\left(x_0,y^{(\bar{n})}\right)-y_0^{(\bar{n})}\right)}{\sinh(mh_1)},$$

$$\frac{dy^{(\bar{n})}(x_j)}{dx}=Z_1^{(n)j}\left(x_j,y^{(\bar{n})}\right)+\frac{m\cosh(mh_j)\left(y_j^{(\bar{n})}-Y_1^{(\bar{n})j}\left(x_j,y^{(\bar{n})}\right)\right)}{\sinh(mh_j)},$$

$$j=1,2,\ldots,N,$$

стала M *не залежить від* $|h|$ *і* $1/x_N$.

Доведення. Покажемо, що за умов теореми ТРС (25)–(27) рангу $\bar{n}$ має єдиний розв'язок $y_i^{(\bar{n})}$, $i=1,2,\ldots,N$. Використаємо принцип стискаючих відображень. Розглянемо операторне рівняння

$$y_i^{(\bar{n})}=\Re_h\left(x_i,y^{(\bar{n})}\right)=\sum_{j=1}^{N-1}\hbar_j G(x_i,x_j)\,\varphi^{(\bar{n})}\left(x_j,y^{(\bar{n})}\right)+$$

$$+\mu^{(\bar{n})}\left(x_N,y^{(\bar{n})}\right)G(x_i,x_N)+u^{(0)}(x_i),\qquad i=1,2,\ldots,N,$$

де

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\sinh(mx)\exp(-m\xi)}{m}, & 0\leq x\leq\xi,\\[2mm] \dfrac{\exp(-mx)\sinh(m\xi)}{m}, & x\geq\xi,\end{cases}$$

— функція Гріна задачі (1).

Мажоруючи ріманові суми інтегралами, отримуємо

$$\sum_{j=1}^{N-1}\hbar_j G(x_i,x_j)+\frac{h_N}{2}G(x_i,x_N)=\frac{\exp(-mx_i)}{2m}\sum_{j=1}^{i}h_j\sinh(mx_j)+$$

$$+\frac{\exp(-mx_i)}{2m}\sum_{j=1}^{i}h_{j+1}\sinh(mx_j)+\frac{\sinh(mx_i)}{2m}\sum_{j=i+1}^{N-1}h_j\exp(-mx_j)+$$

$$+\frac{\sinh(mx_i)}{2m}\sum_{j=i+1}^{N-1}h_{j+1}\exp(-mx_j)+\frac{\sinh(mx_i)}{2m}h_N\exp(-mx_N)\leq$$

$$\leq\frac{\exp(-mx_i)}{2m}\int_0^{x_i}\sinh(m(\eta+|h|))\,d\eta+\frac{\exp(-mx_i)}{2m}\int_0^{x_i}\sinh(m\eta)\,d\eta+$$

$$+\frac{\sinh(mx_i)}{2m}\int\limits_{x_i}^{x_N}\exp(-m\eta)\,d\eta+\frac{\exp(-mx_i)}{2m}\int\limits_{x_i}^{x_N}\exp(-m(\eta-|h|))\,d\eta+$$

$$+\frac{\sinh(mx_i)}{2m}\int\limits_{x_N}^{\infty}\exp(-m\eta)\,d\eta\le\int\limits_{0}^{x_N}G(x_i,\xi)\,d\xi+M_1|h|+$$

$$+\int\limits_{x_N}^{\infty}G(x_i,\xi)\,d\xi\le\int\limits_{0}^{\infty}G(x_i,\xi)\,d\xi+M_1|h|=\frac{1-\exp(-mx_i)}{m^2}+M_1|h|,$$

$$\sum_{j=1}^{N-1}\hbar_jG_{\bar{x}}(x_i,x_j)+G_{\bar{x}}(x_i,x_N)\le\int\limits_{0}^{\infty}G_{\bar{x}}(x_i,\xi)\,d\xi+M_1|h|\le\frac{\exp(-mx_i)}{m}+M_1|h|.$$

Тоді на підставі (31) маємо

$$\left\|\Re_h(x,v)-u^{(0)}\right\|_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+}\le$$

$$\le\left(K_1+M\max\left\{|h|,\frac{1}{x_N}\right\}\right)\left\|\sum_{j=1}^{N-1}\hbar_jG(x,x_j)+\frac{h_N}{2}G(x,x_N)\right\|_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+}+M_1|h|\le$$

$$\le r+M_2\max\left\{|h|,\frac{1}{x_N}\right\}\le r+\Delta\qquad\forall v\in\Omega\left(\hat{\bar{\omega}}_N,r+\Delta\right),$$

тобто оператор $\Re_h(x,v)$ переводить $\Omega\left(\hat{\bar{\omega}}_N,r+\Delta\right)$ в себе.

Крім того, враховуючи нерівності (32), отримуємо

$$\|\Re_h(x,u)-\Re_h(x,v)\|_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+}\le$$

$$\le\left(L_1+M\max\left\{|h|,\frac{1}{x_N}\right\}\right)\|u-v\|_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+}\left\|\sum_{j=1}^{N-1}\hbar_jG(x,x_j)+\frac{h_N}{2}G(x,x_N)\right\|_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+}\le$$

$$\le q_2\|u-v\|_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+}\qquad\forall u,v\in\Omega\left(\hat{\bar{\omega}}_N,r\right).$$

Якщо вибрати N_0 так, що

$$q_2=\max\left\{\frac{1}{m},\frac{1}{m^2}\right\}\left(L_1+M\max\left\{|h|,\frac{1}{x_N}\right\}\right)<1,$$

то відображення $\Re_h(x,u)$ буде стискаючим.

Для похибки $z_j=y_j^{(\bar{n})}-u(x_j)$, $j=0,1,\ldots,N$, отримаємо задачу

$$\begin{gathered}(az_{\bar{x}})_{\hat{x},j}-d(x_j)z_j=\varphi(x_j,u)-\varphi^{(\bar{n})}\left(x_j,y^{(\bar{n})}\right),\qquad j=1,2,\ldots,N-1,\\ z_0=0,\qquad -a(x_N)z_{\bar{x},N}=\beta_2z_N+\mu_2(x_N,u)-\mu_2^{(\bar{n})}\left(x_N,y^{(\bar{n})}\right),\end{gathered}\tag{39}$$

розв'язок якої і його різницеву похідну за допомогою функції Гріна можна подати у вигляді

$$z_i = \sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j G(x_i, x_j) \left\{ \varphi(x_j, u) - \varphi^{(\bar{n})} \left(x_j, y^{(\bar{n})} \right) \right\} +$$

$$+ G(x_i, x_N) \left[\mu_2(x_N, u) - \mu_2^{(\bar{n})} \left(x_N, y^{(\bar{n})} \right) \right], \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{40}$$

$$z_{\bar{x},i} = \sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j G_{\bar{x}}(x_i, x_j) \left\{ \varphi(x_j, u) - \varphi^{(\bar{n})} \left(x_j, y^{(\bar{n})} \right) \right\} +$$

$$+ G_{\bar{x}}(x_i, x_N) \left[\mu_2(x_N, u) - \mu_2^{(\bar{n})} \left(x_N, y^{(\bar{n})} \right) \right], \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{41}$$

Для непарного n з урахуванням (28) з (40), (41) отримуємо

$$z_i = -\sum_{j=1}^{N} h_j G_{\bar{\xi}}(x_i, x_j) \left\{ h_j^{n+1} \left[\frac{m h_j \cosh(m h_j)}{\sinh(m h_j)} \, \psi_1^j(x, u) \Big|_{x = x_j + 0} - \tilde{\psi}_1^j(x, u) \Big|_{x = x_j + 0} \right] \right\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j G(x_i, x_j) \left[\varphi^{(\bar{n})}(x_j, u) - \varphi^{(\bar{n})} \left(x_j, y^{(\bar{n})} \right) + O\left(|h|^{n+1} \right) \right] +$$

$$+ G(x_i, x_N) \left[\mu_2(x_N, u) - \mu_2^{(\bar{n})}(x_N, u) \right] +$$

$$+ G(x_i, x_N) \left[\mu_2^{(\bar{n})}(x_N, u) - \mu_2^{(\bar{n})} \left(x_N, y^{(\bar{n})} \right) \right],$$

$$z_{\bar{x},i} = -\sum_{j=1}^{N} h_j G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x_i, x_j) \times$$

$$\times \left\{ h_j^{n+1} \left[\frac{m h_j \cosh(m h_j)}{\sinh(m h_j)} \, \psi_1^j(x, u) \Big|_{x = x_j + 0} - \tilde{\psi}_1^j(x, u) \Big|_{x = x_j + 0} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{h_i^{n+1}}{a(x_i)} \left[\frac{m h_i \cosh(m h_i)}{\sinh(m h_i)} \, \psi_1^i(x, u) \Big|_{x = x_i} - \tilde{\psi}_1^i(x, u) \Big|_{x = x_i} \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j G_{\bar{x}}(x_i, x_j) \left[\varphi^{(\bar{n})}(x_j, u) - \varphi^{(\bar{n})} \left(x_j, y^{(\bar{n})} \right) + O\left(|h|^{n+1} \right) \right] +$$

$$+ G_{\bar{x}}(x_i, x_N) \left[\mu_2(x_N, u) - \mu_2^{(\bar{n})}(x_N, u) \right] +$$

$$+ G_{\bar{x}}(x_i, x_N) \left[\mu_2^{(\bar{n})}(x_N, u) - \mu_2^{(\bar{n})} \left(x_N, y^{(\bar{n})} \right) \right].$$

Звідси, оскільки виконуються нерівності

$$\sum_{j=1}^{N} h_j G_{\bar{\xi}}(x_i, x_j) = \frac{\sinh(m x_i) \exp(-m x_N)}{m} \le M_3,$$

$$\sum_{j=1}^{N} h_j G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x_i, x_j) = \frac{\exp(-m x_N)}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cosh(m\eta) \, d\eta - \frac{\sinh(m h_i)}{m h_i} \le M_4,$$

випливають оцінки

$$\|z_i\| \le M \max\left\{|h|^{n+1}, \left(\frac{1}{x_N}\right)^{n+1}\right\} + q_2 \|z\|_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+},$$

$$\|z_{\bar{x},i}\| \le M_1 \max\left\{|h|^{n+1}, \left(\frac{1}{x_N}\right)^{n+1}\right\} + q_2 \|z\|_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+}.$$

Якщо n є парним, то, враховуючи (29), рівності (40), (41) записуємо у вигляді

$$z_i = -\sum_{j=1}^{N} h_j G_{\bar{\xi}}(x_i, x_j) \left\{ h_j^n \frac{mh_j \cosh(mh_j)}{\sinh(mh_j)} \left. \psi_1^j(x,u)\right|_{x=x_j+0} \right\} +$$

$$+\sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j G(x_i, x_j) \left[\varphi^{(\bar{n})}(x_j, u) - \varphi^{(\bar{n})}\left(x_j, y^{(\bar{n})}\right) + O(|h|^n)\right] +$$

$$+G(x_i, x_N)\left[\mu_2(x_N, u) - \mu_2^{(\bar{n})}(x_N, u)\right] +$$

$$+G(x_i, x_N)\left[\mu_2^{(\bar{n})}(x_N, u) - \mu_2^{(\bar{n})}\left(x_N, y^{(\bar{n})}\right)\right],$$

$$z_{\bar{x},i} = -\sum_{j=1}^{N} h_j G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x_i, x_j) \left\{ h_j^n \frac{mh_j \cosh(mh_j)}{\sinh(mh_j)} \left. \psi_1^j(x,u)\right|_{x=x_j+0} \right\} +$$

$$+\frac{h_i^n}{a(x_i)} \frac{mh_i \cosh(mh_i)}{\sinh(mh_i)} \left. \psi_1^i(x,u)\right|_{x=x_i} +$$

$$+\sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j G_{\bar{x}}(x_i, x_j) \left[\varphi^{(\bar{n})}(x_j, u) - \varphi^{(\bar{n})}\left(x_j, y^{(\bar{n})}\right) + O(|h|^n)\right] +$$

$$+G_{\bar{x}}(x_i, x_N)\left[\mu_2(x_N, u) - \mu_2^{(\bar{n})}(x_N, u)\right] +$$

$$+G_{\bar{x}}(x_i, x_N)\left[\mu_2^{(\bar{n})}(x_N, u) - \mu_2^{(\bar{n})}\left(x_N, y^{(\bar{n})}\right)\right].$$

Звідси

$$\|z_i\| \le M \max\left\{|h|^{n}, \left(\frac{1}{x_N}\right)^{n}\right\} + q_2 \|z\|_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+},$$

$$\|z_{\bar{x},i}\| \le M \max\left\{|h|^{n}, \left(\frac{1}{x_N}\right)^{n}\right\} + q_2 \|z\|_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+}.$$

Отже, отримуємо оцінку

$$\|z\|_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+} \le \frac{M \max\left\{|h|^{\bar{n}}, \left(\dfrac{1}{x_N}\right)^{\bar{n}}\right\}}{1 - q_2},$$

з якої внаслідок того, що $q_2 < 1$ для будь-якого $N \ge N_0$, випливає

$$\|z\|_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+} \le M_1 \max\left\{|h|^{\bar{n}}, \left(\frac{1}{x_N}\right)^{\bar{n}}\right\}.$$

Оскільки $y_0^{(\bar{n})} = Y_2^0\left(x_0, y^{(\bar{n})}\right)$, $y_j^{(\bar{n})} = Y_1^j\left(x_j, y^{(\bar{n})}\right)$, то

$$\left\|\frac{dz\left(x_0\right)}{dx}\right\| \le \left\|Z_2^{(n)0}\left(x_0, y^{(\bar{n})}\right) - Z_2^0\left(x_0, y^{(\bar{n})}\right)\right\| + \left\|Z_2^0\left(x_0, y^{(\bar{n})}\right) - Z_2^0\left(x_0, u\right)\right\| +$$

$$+\frac{m\cosh(mh_1)}{\sinh(mh_1)}\left\|Y_2^0\left(x_0, y^{(\bar{n})}\right) - Y_2^{(\bar{n})0}\left(x_0, y^{(\bar{n})}\right)\right\| \le$$

$$\le M_1\,|h|^{\bar{n}} + \left\|\frac{\partial}{\partial u}Z_2^0\left(x_0, u\right)\Big|_{u=\tilde{u}}\right\| \|z\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+} \le M\,|h|^{\bar{n}},$$

$$\left\|\frac{dz\left(x_j\right)}{dx}\right\| \le \left\|Z_1^{(n)j}\left(x_j, y^{(\bar{n})}\right) - Z_1^j\left(x_j, y^{(\bar{n})}\right)\right\| + \left\|Z_1^j\left(x_j, y^{(\bar{n})}\right) - Z_1^j\left(x_j, u\right)\right\| +$$

$$+\frac{m\cosh(mh_j)}{\sinh(mh_j)}\left\|Y_1^j\left(x_j, y^{(\bar{n})}\right) - Y_1^{(\bar{n})j}\left(x_j, y^{(\bar{n})}\right)\right\| \le$$

$$\le M_1\,|h|^{\bar{n}} + \left\|\frac{\partial}{\partial u}Z_1^j\left(x_j, u\right)\Big|_{u=\tilde{u}}\right\| \|z\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+} \le M\,|h|^{\bar{n}}, \qquad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Звідси одержуємо $\|z\|^*_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N} \le M \max\left\{|h|^{\bar{n}}, \left(\frac{1}{x_N}\right)^{\bar{n}}\right\}$.

Теорему 2 доведено.

Приклад. Розглянемо крайову задачу

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 4u = -\frac{1+2x}{(1+x)^2} - \frac{2x^2+4x}{(1+x)^2}u - u^2, \qquad x \in (0, \infty),$$

$$u(0) = 1, \qquad \lim_{x\to\infty} u(x) = 0$$

з точним розв'язком $u(x) = 1/(1+x)$.

Для чисельного розв'язування задачі застосуємо різницеву схему (25)–(27) з $n = \bar{n} = 4$. Зауважимо, що оскільки $f_u(\infty, 0) = 2 \ne 0$, то використати різницеві схеми, запропоновані у [8, 9], не можна. Функції $Y_\alpha^{(4)j}(x_j, u)$, $Z_\alpha^{(4)j}(x_j, u)$, $\alpha = 1, 2$, — чисельні розв'язки задач Коші (9), одержані методом Рунге – Кутта – Ньюстрьома четвертого порядку точності (див., наприклад, [16, с. 285]). Застосовуючи метод рядів Тейлора (15)–(20) для знаходження розв'язку задачі Коші (10), отримуємо

$$\mu_2^{(4)}(x_N, u) = \frac{2}{x_N} - \frac{3}{x_N^2} + \frac{4}{x_N^3} - Z_1^{(4)N}\left(x_N, u\right) + \frac{m\left(\cosh(mh_N)Y_1^{(4)N}\left(x_N, u\right) - u_{N-1}\right)}{\sinh(mh_N)}.$$

Розв'язок $y_j^{(4)}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, різницевої схеми знаходився методом послідовних наближень.

Результати розрахунків задачі на рівномірній сітці $\bar{\omega}_N = \{x_j = jh,\ j = 0, 1, \ldots, N,\ h = 1/\sqrt{N}\}$ наведено в таблиці, де для практичної оцінки швидкості збіжності введено величини

$$er = \|z\|^*_{1,\infty,\bar{\omega}_N} = \left\|y^{(4)} - u\right\|^*_{1,\infty,\bar{\omega}_N}, \qquad p = \log_2 \frac{\|z\|^*_{1,\infty,\bar{\omega}_N}}{\|z\|^*_{1,\infty,\bar{\omega}_{4N}}}.$$

Отже, ця різницева схема має четвертий порядок точності.

N	er	p
64	$0,4256 \cdot 10^{-3}$	
256	$0,2889 \cdot 10^{-4}$	3.9
1024	$0,1887 \cdot 10^{-5}$	3.9
4096	$0,1206 \cdot 10^{-6}$	4.0
16384	$0,7626 \cdot 10^{-8}$	4.0
65536	$0,4795 \cdot 10^{-9}$	4.0

Література

1. *Collatz L.* The numerical treatment of differential equations. – Berlin: Springer-Verlag, 1960.
2. *Fazio R.* A novel approach to the numerical solution of boundary value problems on infinite intervals // SIAM J. Numer. Anal. – 1996. – **33**, № 4. – P. 1473 – 1483.
3. *Hoog F. R., Weiss R.* An approximation theory for boundary value problems on infinite intervals // Computing. – 1980. – **24**. – P. 227 – 239.
4. *Lentini M., Keller H. B.* Boundary value problems on semi-infinite intervals and their numerical solution // SIAM J. Numer. Anal. – 1980. – **17**, № 4. – P. 577 – 604.
5. *Markowich P. A., Ringhofer C. A.* Collocation metods for boundary value problems on long intervals // Math. Comput. – 1983. – **40**, № 174. – P. 123 – 150.
6. *Hoog F. R., Weiss R.* The numerical solution of boundary value problems with an essential singularity // SIAM J. Numer. Anal. – 1979. – **16**, № 4. – P. 637 – 669.
7. *Auzinger W., Kneisl G., Koch O., Weinmüller E.* A collocation code for singular boundary value problems in ordinary differential equations // Numer. Algorithms. – 2003. – **33**, № 1. – P. 27 – 39.
8. *Gavrilyuk I. P., Hermann M., Kutniv M. V., Makarov V. L.* Difference schemes for nonlinear BVPs on the semiaxis // Comput. Methods Appl. Math. – 2007. – **7**, № 1. – P. 25 – 47.
9. *Gavrilyuk I. P., Hermann M., Kutniv M. V., Makarov V. L.* Adaptive algorithms based on exact difference schemes for nonlinear BVPs on the half-axis // Appl. Numer. Math. – 2009. – **59**. – P. 1529 – 1536.
10. *Makarov V. L., Samarskii A. A.* Exact three-point difference schemes for nonlinear ordinary differential equations of second order, and their implementation // Soviet Math. Dokl. – 1990. – **41**, № 3. – P. 495 – 500.
11. *Kutniv M. V., Makarov V. L., Samarskii A. A.* Accurate three-point difference schemes for second-order nonlinear ordinary differential equations and their implementation // Comput. Math. and Math. Phys. – 1999. – **39**, № 1. – P. 45 – 60.
12. *Gavrilyuk I. P., Hermann M., Makarov V. L., Kutniv M. V.* Exact and truncated difference schemes for boundary value ODEs. – Basel: Springer AG, 2011.
13. *Agarwal R. P., O'Regan D.* Infinite interval problems for differential, difference and integral equations. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 2001.
14. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа. – М.: Наука, 1957. – Т. 1.
15. *Butcher J. C.* Numerical methods for ordinary differential equations. – Chichester, West Sussex: John Wiley & Sons, Ltd., 2003.
16. *Hairer E., Norsett S. P., Wanner G.* Solving ordinary differential equations. I. Nonstiff problems. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1993.

Одержано 21.03.16