УДК 517.51

С. Я. Янченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПОРЯДКОВІ ОЦІНКИ АПРОКСИМАТИВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ФУНКЦІЙ ІЗ КЛАСІВ $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ ІЗ ЗАДАНОЮ МАЖОРАНТОЮ МІШАНИХ МОДУЛІВ НЕПЕРЕРВНОСТІ У РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ

We establish the exact-order estimates of approximation for the classes $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ of functions of several variables defined on $\mathbb{R}^d$ in the norm of $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ by entire functions of exponential type with supports of their Fourier transforms in the sets generated by the level surfaces of a function Ω.

Установлены точные по порядку оценки приближения функций из классов $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, определенных на $\mathbb{R}^d$, в метрике пространства $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ с помощью целых функций экспоненциального типа с носителями их преобразований Фурье на множествах, которые порождаются поверхностями уровня функции Ω.

1. Означення класів функцій та апроксимативних характеристик. У цій статті продовжено дослідження апроксимативних характеристик функцій із класів Нікольського – Бєсова $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ у просторах $L_q(\mathbb{R}^d)$ [1]. Встановлено точні за порядком оцінки наближення функцій із даних класів за допомогою цілих функцій експоненціального типу з носіями їх перетворень Фур'є на множинах, які породжуються поверхнями рівня функції Ω у випадку, коли похибка наближення оцінюється у метриці простору $L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Для зручності означення просторів Нікольського – Бєсова $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ дамо опосередковано через так зване декомпозиційне зображення елементів цих просторів. Зазначимо, що для просторів Нікольського – Бєсова функцій мішаної гладкості вперше декомпозиційне зображення та відповідне йому нормування з'явились у роботі С. М. Нікольського та П. І. Лізоркіна [2] і, як з'ясувалося пізніше, відіграли ключову роль у дослідженнях, які пов'язані з апроксимацією класів функцій. Наведемо спочатку необхідні означення та позначення.

Нехай $\mathbb{R}^d$ — d-вимірний евклідів простір з елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ і $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$. Через $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \le q \le \infty$, позначимо простір вимірних на $\mathbb{R}^d$ функцій зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_q} := \|f\|_q := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|^q d\boldsymbol{x} \right)^{1/q}, \quad 1 \le q < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty} := \|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|.$$

Для функції $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ розглянемо різницю l-го порядку, $l \in \mathbb{N}$, за змінною x_j з кроком h_j, яка визначається таким чином:

$$\Delta^l_{h_j} f(\boldsymbol{x}) := \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + n h_j, x_{j+1}, \ldots, x_d).$$

Також означимо кратну різницю l-го порядку функції f з векторним кроком $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_d)$:

$$\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = \Delta^l_{h_d}\left(\Delta^l_{h_{d-1}}\dots(\Delta^l_{h_1} f(\boldsymbol{x}))\right).$$

Мішаний модуль неперервності порядку l функції $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ визначається згідно з формулою

$$\Omega_l(f,\boldsymbol{t})_q := \sup_{|\boldsymbol{h}|\le \boldsymbol{t}} \|\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f(\cdot)\|_q,$$

де $|\boldsymbol{h}| = (|h_1|,\dots,|h_d|)$, а нерівності типу $\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$) для векторів $\boldsymbol{a} = (a_1,\dots,a_d)$ та $\boldsymbol{b} = (b_1,\dots,b_d)$ тут і далі розуміємо покоординатно, тобто $a_j \le b_j$ ($a_j > b_j$), $j = \overline{1,d}$. Також будемо використовувати запис $\boldsymbol{t} \ge 0$, якщо $t_j \ge 0$, $j = \overline{1,d}$.

Нехай $\Omega(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} = (t_1,\dots,t_d)$, — функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, тобто функція, яка визначена і неперервна на $\mathbb{R}^d_+$, що задовольняє такі умови:

1) $\Omega(\boldsymbol{t}) > 0$, $\boldsymbol{t} > 0$, і $\Omega(\boldsymbol{t}) = 0$, якщо $\prod_{j=1}^d t_j = 0$;

2) $\Omega(\boldsymbol{t})$ неспадна за кожною змінною;

3) $\Omega(m_1t_1,\dots,m_dt_d) \le \left(\prod_{j=1}^d m_j\right)^l \Omega(\boldsymbol{t})$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$.

Множину таких функцій Ω позначимо через Ψ_l.

Додатково будемо вимагати, щоб функція Ω задовольняла умови (S^α) та (S_l), які називають умовами Барі – Стєчкіна [3]. Сформулюємо їх:

а) функція однієї змінної $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S^α), якщо існує таке $\alpha > 0$, що $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \le C_1\,\frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1;$$

б) функція однієї змінної $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S_l), якщо існує таке γ, $0 < \gamma < l$, що $\varphi(\tau)/\tau^{l-\gamma}$ майже спадає, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^{l-\gamma}} \ge C_2\,\frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^{l-\gamma}}, \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Будемо вважати, що Ω задовольняє умови (S^α) та (S_l), якщо Ω задовольняє ці умови за кожною змінною t_j при всіх фіксованих значеннях змінних t_i, $i \ne j$. У випадку, коли для Ω виконано умову (S^α), будемо говорити, що Ω належить множині S^α, а якщо умову (S_l), то — множині S_l. Стверджуючи це (також і для функції ω однієї змінної), використовуватимемо запис $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, ($\omega \in \Phi_{\alpha,l}$), $l \in \mathbb{N}$, де множина $\Phi_{\alpha,l}$ визначається співвідношенням $\Phi_{\alpha,l} = \Psi_l \cap S^\alpha \cap S_l$.

Далі, нехай $S = S(\mathbb{R}^d)$ — простір Л. Шварца основних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^d$ комплекснозначних функцій φ, що спадають на нескінченності разом зі своїми похідними швидше за будь-який степінь функції $\left(x_1^2 + \ldots + x_d^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ (див., наприклад, [4]). Через S' позначимо простір лінійних неперервних функціоналів над S. Зазначимо, що елементами простору S' є узагальнені функції.

Через $\mathfrak{F}\varphi$ та $\mathfrak{F}^{-1}\varphi$ будемо позначати відповідно пряме та обернене перетворення Фур'є функцій із просторів S та S'.

Носієм узагальненої функції f будемо називати замикання $\overline{\mathfrak{N}}$ такої множини точок $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^d$, що для довільної $\varphi \in S$, яка дорівнює нулю в $\overline{\mathfrak{N}}$, виконується рівність $\langle f, \varphi \rangle = 0$. Носій узагальненої функції f будемо позначати через $\operatorname{supp} f$.

Зазначимо, що для $1 \le p \le \infty$ існує природне неперервне вкладення $L_p(\mathbb{R}^d)$ в S' і в цьому сенсі функції з $L_p(\mathbb{R}^d)$ ототожнюються з елементами з S'.

Далі, для кожного вектора $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1, d}$, розглянемо множину

$$Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}} := Q^*(\boldsymbol{s}) := \left\{ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \colon \eta(s_j) 2^{s_j - 1} \le |\lambda_j| < 2^{s_j}, \ \ \lambda_j \in \mathbb{R}, \ \ j = \overline{1, d} \right\},$$

де $\eta(0) = 0$ і $\eta(t) = 1$, $t > 0$.

Нехай $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ — деяка вимірна множина. Позначимо через $\chi_{\mathcal{A}}$ характеристичну функцію множини $\mathcal{A}$ і для $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ покладемо

$$\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) = \mathfrak{F}^{-1} \left(\chi_{Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}} \cdot \mathfrak{F} f \right).$$

Простори $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ для $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ і $\Omega \in \Phi_{\alpha, l}$ означаються таким чином (див., наприклад, [1]):

$$S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) \colon \|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} < \infty \right\},$$

де

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp \left\{ \sum_{\boldsymbol{s} \ge 0} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \right)^{-\theta} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|_p^{\theta} \right\}^{\frac{1}{\theta}} \tag{1}$$

при $1 \le \theta < \infty$ і

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B} \asymp \sup_{\boldsymbol{s} \ge 0} \frac{\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})} \tag{2}$$

при $\theta = \infty$, де $\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) = \Omega(2^{-s_1}, \ldots, 2^{-s_d})$.

Зауважимо, що простори функцій $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ є узагальненням відомих просторів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, що визначаються при явному заданні функції Ω, а саме $\Omega(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{r}} = t_1^{r_1} \ldots t_d^{r_d}$, $0 < r_j < l$, $j = \overline{1, d}$. Нагадаємо також, що простори $S^{\boldsymbol{r}}_p H(\mathbb{R}^d) = S^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)$ уперше були розглянуті С. М. Нікольським [5], а простори $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ при $1 \le \theta < \infty$ були введені Т. І. Амановим [6]. Далі часто будемо використовувати скорочені позначення $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B$ і $S^{\boldsymbol{r}}_p H$ відповідно для $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ та $S^{\boldsymbol{r}}_p H(\mathbb{R}^d)$.

Під класом $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ будемо розуміти множину функцій $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, для яких $\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \le 1$, і при цьому збережемо для класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ ті самі позначення, що і для просторів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$.

Тут і далі по тексту для додатних величин A і B використовуємо запис $A \asymp B$, який означає, що існують такі додатні сталі C_3 та C_4, які не залежать від одного істотного параметра у величинах A і B (наприклад, у співвідношеннях (1) і (2) — від функції f), що $C_3 A \le B \le C_4 A$.

Якщо тільки $B \leq C_4 A$ $(B \geq C_3 A)$, то пишемо $B \ll A$ $(B \gg A)$. Всі сталі $C_i,\ i = 1, 2, \ldots,$ які зустрічаються у роботі, залежать, можливо, лише від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій оцінюється похибка наближення, та розмірності простору $\mathbb{R}^d$.

Перейдемо до означення апроксимативних характеристик.

Нехай $\mathcal{L} \subset \mathbb{Z}_+^d$ — деяка обмежена множина. Розглянемо множину $Q(\mathcal{L}) = \bigcup_{\boldsymbol{s} \in \mathcal{L}} Q^*(\boldsymbol{s})$. Далі для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq q \leq \infty$, покладемо

$$S_{Q(\mathcal{L})} f(\boldsymbol{x}) = S_{Q(\mathcal{L})}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{s} \in \mathcal{L}} \delta_{\boldsymbol{s}}^*(f, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,$$

і позначимо

$$\mathcal{E}_{Q(\mathcal{L})}(f)_q = \|f(\cdot) - S_{Q(\mathcal{L})} f(\cdot)\|_q$$

та

$$\mathcal{E}_{Q(\mathcal{L})}(F)_q = \sup_{f \in F} \mathcal{E}_{Q(\mathcal{L})}(f)_q. \tag{3}$$

Зауважимо, що $S_{Q(\mathcal{L})}(f, \boldsymbol{x})$ — ціла функція з носієм її перетворення Фур'є на множині $Q(\mathcal{L})$.

Дослідження величини (3) будемо проводити у випадку, коли $F = S_{p,\theta}^{\Omega} B(\mathbb{R}^d)$, а множина $\mathcal{L}$ певним чином пов'язана з функцією Ω.

Для будь-якого $N \in \mathbb{N}$ і $1 < p < \infty$ покладемо

$$\kappa(\Omega, N) := \kappa(N) := \left\{ \boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{Z}_+^d : \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}} \geq \frac{1}{N} \right\},$$

$$Q(\kappa(N)) := Q(N) =: \bigcup_{\boldsymbol{s} \in \kappa(N)} Q^*(\boldsymbol{s}),$$

де $\|\boldsymbol{s}\|_1 = s_1 + \ldots + s_d$.

Зазначимо, що множини $Q(N)$ породжуються поверхнями рівня функції $\Omega(\boldsymbol{t}) \boldsymbol{t}^{-\frac{1}{p}}$, $\Omega(\boldsymbol{t}) \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \dfrac{1}{p}$. Якщо $\Omega(\boldsymbol{t}) = \Omega_1(\boldsymbol{t}) / \prod_{j=1}^{d} t_j^{-\frac{1}{p}}$ і $\Omega_1(\boldsymbol{t}) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $0 < r_j < l$, $j = \overline{1, d}$, то одержимо множини $Q(N)$, які називаються східчастими гіперболічними хрестами.

Наближення класів Нікольського – Бєсова періодичних функцій мішаної гладкості тригонометричними поліномами зі спектром у східчастому гіперболічному хресті та на множинах $Q(N)$ розглядалися, зокрема, у роботах [7 – 11].

Формулювання допоміжних результатів та доведення основних потребує означення ще деяких множин в $\mathbb{Z}_+^d$.

Покладемо

$$\kappa^{\perp}(\Omega, N) := \kappa^{\perp}(N) := \left\{ \boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{Z}_+^d : \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}} < \frac{1}{N} \right\},$$

$$Q^{\perp}(\kappa^{\perp}(N)) := Q^{\perp}(N) := \bigcup_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} Q^{*}(\boldsymbol{s}),$$

$$\Theta(N) := \kappa^{\perp}(N)\backslash\kappa^{\perp}(2^{l}N),$$

тобто

$$\Theta(N) = \left\{ \boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{Z}^{d}_{+} : \frac{1}{2^{l}N} \leq \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}} < \frac{1}{N} \right\}. \tag{4}$$

В [9] показано, що має місце співвідношення

$$|\Theta(N)| \asymp (\log_2 N)^{d-1}, \tag{5}$$

де через $|A|$ позначено кількість елементів скінченної множини A.

Мають місце такі твердження.

Лема A [9]. *Нехай Ω — функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умову (S^{α}) при $\alpha > \beta > 0$. Тоді для $0 < \mu < \infty$*

$$\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{\|s\|_1 \beta}\right)^{\mu} \ll \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{\|s\|_1 \beta}\right)^{\mu}. \tag{6}$$

Як наслідок з (4)–(6) для $0 < \mu < \infty$ маємо

$$\sum_{\boldsymbol{s}\in\kappa^{\perp}(N)} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}}\right)^{\mu} \ll \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}}\right)^{\mu} <$$

$$< \left(\frac{1}{N}\right)^{\mu} \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} 1 = \left(\frac{1}{N}\right)^{\mu} |\Theta(N)| \asymp \left(\frac{1}{N}\right)^{\mu} (\log_2 N)^{d-1}. \tag{7}$$

Теорема A [12, с. 150]. *Якщо $1 \leq p \leq p' \leq \infty$, то для цілої функції експоненціального типу $g_{\boldsymbol{\nu}} \in L_p(\mathbb{R}^d)$ має місце нерівність (різних метрик)*

$$\|g_{\boldsymbol{\nu}}\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq 2^{d} \left(\prod_{j=1}^{d} \nu_k\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} \|g_{\boldsymbol{\nu}}\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}.$$

2. Порядкові оцінки апроксимативних характеристик класів $\boldsymbol{S^{\Omega}_{p,\theta}B}(\mathbb{R}^{d})$ у рівномірній метриці. Встановимо порядкові за параметром N оцінки величини $\mathcal{E}_{Q(\mathcal{L})}(F)_q$ для $F = S^{\Omega}_{p,\theta}B$ у випадку, коли $\mathcal{L} = \kappa(N)$, тобто розглядається наближення на множині $Q(N)$ при певних обмеженнях на параметри p, q, θ та Ω.

Теорема. *Нехай $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega(\boldsymbol{t}) \in \Phi_{\alpha,l}$ з деяким $\alpha > \dfrac{1}{p}$, тоді справедливою є порядкова оцінка*

$$\mathcal{E}_{Q(N)}(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{\infty} \asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{8}$$

Доведення. Спочатку встановимо у (8) оцінку зверху. Використавши нерівність Мінковського та теорему A, одержимо

$$\mathcal{E}_{Q(N)}(f)_\infty = \left\| f(\cdot) - \sum_{\boldsymbol{s} \in \kappa(N)} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot) \right\|_\infty = \left\| \sum_{\boldsymbol{s} \in \kappa^\perp(N)} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot) \right\|_\infty \ll$$

$$\ll \sum_{\boldsymbol{s} \in \kappa^\perp(N)} 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|_p. \qquad (9)$$

Далі, щоб продовжити оцінку (9), розглянемо два випадки.

Нехай $1 \leq \theta < \infty$. Тоді, застосувавши до (9) нерівність Гельдера (з відповідною модифікацією при $\theta = 1$), а також врахувавши співвідношення (7), отримаємо

$$\mathcal{E}_{Q(N)}(f)_\infty \ll \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \kappa^\perp(N)} \|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|_p^\theta \left(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\right)^{-\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \kappa^\perp(N)} \left(2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \right)^{\frac{\theta}{\theta - 1}} \right)^{1 - \frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \|f\|_{S^\Omega_{p,\theta}B} \frac{1}{N} |\Theta(N)|^{1 - \frac{1}{\theta}} \asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{(d-1)\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)}.$$

Якщо ж $\theta = \infty$, то для $f \in S^\Omega_{p,\infty}B$, згідно з (2), має місце співвідношення $\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)\|_p \ll \ll \Omega(2^{-\boldsymbol{s}})$. Тому, використавши (7), будемо мати

$$\mathcal{E}_{Q(N)}(f)_\infty \ll \sum_{\boldsymbol{s} \in \kappa^\perp(N)} 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) \ll \frac{1}{N} |\Theta(N)| \asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{d-1}.$$

Оцінку зверху в теоремі встановлено.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу. Для цього розглянемо кілька випадків у залежності від значень параметра θ та побудуємо функції $f \in S^\Omega_{p,\theta}B$, для яких оцінки знизу величин $\mathcal{E}_{Q(N)}(f)_\infty$ збігаються за порядком з оцінками знизу величин $\mathcal{E}_{Q(N)}(S^\Omega_{p,\theta}B)_\infty$ в (8). Спочатку означимо функцію, на основі якої буде здійснюватися їх побудова.

Для $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ покладемо

$$D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^d D_{k_j}(x_j), \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d_+,$$

де

$$D_{k_j}(x_j) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(2 \sin \frac{x_j}{2} \cos \frac{2k_j + 1}{2} x_j \right) \cdot x_j^{-1}.$$

Зауважимо, що для перетворення Фур'є функції $D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ справджується рівність (див., наприклад, [13])

$$\mathfrak{F} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \chi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^d \chi_{k_j}(x_j),$$

де

$$\chi_{k_j}(x_j)=\begin{cases}1, & k_j<|x_j|<k_j+1,\\ \dfrac{1}{2}, & |x_j|=k_j \ \text{ або } \ |x_j|=k_j+1,\\ 0 & \text{— в інших випадках,}\end{cases}$$

$$\chi_0(x_j)=\begin{cases}1, & |x_j|<1,\\ \dfrac{1}{2}, & |x_j|=1,\\ 0, & |x_j|>1.\end{cases}$$

Відповідно для оберненого перетворення будемо мати

$$\mathfrak{F}^{-1}\chi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{t})=D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}).$$

Зазначимо, що при $1<p\leq\infty$ має місце оцінка (див., наприклад, [13, 14])

$$\left\|\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})}D_{\boldsymbol{k}}(\cdot)\right\|_p\asymp 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \tag{10}$$

де

$$\rho_+(\boldsymbol{s}):=\left\{\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_d)\colon \eta(s_j)2^{s_j-1}\leq k_j<2^{s_j},\ \ k_j\in\mathbb{Z}^d_+,\ \ j=\overline{1,d}\right\}.$$

Розглянемо функцію

$$f_1(\boldsymbol{x})=C_5|\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)}\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})}D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$$

при $1\leq\theta<\infty$ та

$$f_2(\boldsymbol{x})=C_6\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)}\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})}D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$$

при $\theta=\infty$.

Покажемо, що для певного вибору сталих $C_5>0$ та $C_6>0$ дані функції належать до класу $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ та $S^{\Omega}_{p,\infty}B$ відповідно.

Для f_1, використавши співвідношення (10), отримаємо

$$\|f_1(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B}\asymp\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)}\big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta}\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_1,\cdot)\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\asymp$$

$$\asymp|\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}}\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)}\big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{-\theta}\big(\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})\big)^{\theta}2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\theta\left(1-\frac{1}{p}\right)}\left\|\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})}D_k(\cdot)\right\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\ll$$

$$\ll |\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} 2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\theta\left(1-\frac{1}{p}\right)} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\theta\left(1-\frac{1}{p}\right)} \right)^{\frac{1}{\theta}} = 1.$$

Отже, $f_1 \in S^{\Omega}_{p,\theta}B$.

Для f_2, використовуючи оцінку (10), можемо записати

$$\|f_2(\cdot)\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B} = \sup_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \frac{\|\delta^*_{\boldsymbol{s}}(f_2,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})} =$$

$$= \sup_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} C_6 \frac{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1\theta\left(1-\frac{1}{p}\right)} \left\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\cdot) \right\|_p}{\Omega(2^{-\boldsymbol{s}})} \le C_7, \quad C_7 > 0,$$

і тому $f_2 \in S^{\Omega}_{p,\infty}B$.

Враховуючи, що $S_{Q(N)}(f_1,\cdot) = 0$, одержуємо

$$\mathcal{E}_{Q(N)}(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_\infty \ge \mathcal{E}_{Q(N)}(f_1)_p = \|f_1(\cdot)\|_\infty. \tag{11}$$

Перш ніж продовжити оцінку (11), покажемо, що

$$\mathcal{I} = \left\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) \right\|_\infty \asymp \frac{1}{N}\,|\Theta(N)|. \tag{12}$$

Встановимо спочатку оцінку зверху. Згідно з нерівністю Мінковського, (10) та (7) отримуємо

$$\mathcal{I} \le \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \left\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) \right\|_\infty \ll$$

$$\ll \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} 2^{\|\boldsymbol{s}\|_1} \ll \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{\frac{\|\boldsymbol{s}\|_1}{p}} \asymp \frac{1}{N}\,|\Theta(N)|.$$

Відповідно для оцінки знизу маємо

$$\mathcal{I} = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} \left| \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho_+(\boldsymbol{s})} D_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) \right| =$$

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} \left| \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin 2^{s_j} x_j - \sin \eta(s_j) 2^{s_j-1} x_j}{x_j} \right| \ge$$

$$\ge \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} \prod_{j=1}^{d} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin 1 - \sin \frac{\eta(s_j)}{2}}{2^{-s_j}} \gg$$

$$\gg \sum_{\boldsymbol{s}\in\Theta(N)} \Omega(2^{-\boldsymbol{s}}) 2^{-\|\boldsymbol{s}\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)} 2^{\|s\|_1} \asymp \frac{1}{N}\,|\Theta(N)|.$$

З урахуванням оцінки (12) для (11) можемо записати

$$\mathcal{E}_{Q(N)}(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_\infty \geq |\Theta(N)|^{-\frac{1}{\theta}} \frac{1}{N} |\Theta(N)| \asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Оскільки $S_{Q(N)}(f_2, \cdot) = 0$, то, беручи до уваги оцінку (12), одержуємо

$$\mathcal{E}_{Q(N)}(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_\infty \geq \mathcal{E}_{Q(N)}(f_2)_\infty = \|f_2(\cdot)\|_\infty \asymp \frac{1}{N} (\log_2 N)^{d-1}.$$

Оцінки знизу встановлено. Теорему доведено.

Насамкінець наведемо деякі коментарі. Нехай $\omega(\tau)$ — функція однієї змінної, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \dfrac{1}{p}$, і мішаний модуль неперервності порядку l задається таким чином:

$$\Omega(\boldsymbol{t}) = \Omega(t_1, \ldots, t_d) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j\right), \quad \Omega \in \Phi_{\alpha,l}, \quad \alpha > \frac{1}{p}.$$

При такому вигляді функціонального параметра Ω оцінки величини $\mathcal{E}_{\bar{Q}_n}\left(S^{\Omega}_{p,\theta}B\right)_\infty$, $1 < p < < \infty$, де $\bar{Q}_n = \bigcup_{\|\boldsymbol{s}\|_1 < n} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}$, встановлено у роботі [15] і, зокрема, у випадку $\Omega(\boldsymbol{t}) = \prod_{j=1}^{d} t_j^r$, $\dfrac{1}{p} < r < l$, — у роботах [14, 16]. Зазначимо, що у роботі [14] розглядався також випадок, коли $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > \dfrac{1}{p}$, $j = \overline{1, d}$.

Для класів Нікольського – Бєсова періодичних функцій багатьох змінних наближення поліномами з „номерами” гармонік із східчастого гіперболічного хреста у просторі L_∞ розглядалось у [17].

Література

1. *Stasyuk S. A., Yanchenko S. Ya.* Approximation of functions from Nikolskii – Besov type classes of generalized mixed smoothness // Anal. Math. – 2015. – **41**. – P. 311 – 334.
2. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
3. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
4. *Лизоркин П. И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1969. – **105**. – С. 89 – 167.
5. *Никольский С. М.* Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // Сиб. мат. журн. – 1963. – **4**, № 6. – С. 1342 – 1364.
6. *Аманов Т. И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}B$ $(0 \leq x_j \leq 2\pi;\ j = 1, \ldots, n)$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **77**. – С. 5 – 34.
7. *Романюк А. С.* Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. — С. 1398 – 1408.
8. *Романюк А. С.* О приближении классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 5. – С. 662 – 672.
9. *Пустовойтов Н. Н.* Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Мат. заметки. – 1999. – **65**, № 1. – С. 107 – 117.
10. *Стасюк С. А.* Наилучшие приближения периодических функций многих переменных из классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ // Мат. заметки. – 2010. – **87**, № 1. – С. 108 – 121.

11. *Стасюк С. А.* Приближение классов $\mathbf{MB}^{\Omega}_{p,\theta}$ суммами Валле Пуссена в равномерной метрике // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 4. – С. 308 – 317.
12. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
13. *Wang Heping, Sun Yongsheng.* Approximation of multivariate functions with certain mixed smoothness by entire functions // Northeast. Math. J. – 1995. – **11**, № 4. – P. 454 – 466.
14. *Янченко С. Я.* Оцінки апроксимативних характеристик класів функцій $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ у рівномірній метриці // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 1. – С. 328 – 340.
15. *Янченко С. Я.* Порядкові оцінки апроксимативних характеристик функцій з узагальнених класів мішаної гладкості типу Нікольського – Бєсова // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 3. – С. 330 – 343.
16. *Янченко С. Я.* Наближення функцій з класів $S^r_{p,\theta}B$ у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 5. – С. 698 – 705.
17. *Романюк А. С.* Приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения // Мат. сб. – 2004. – **195**, № 2. – С. 91 – 116.

Одержано 21.04.16