УДК 517.5

Ю. С. Коломойцев (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В ПРОСТРАНСТВАХ С ИНТЕГРАЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ

We establish necessary and sufficient conditions for the validity of Bernstein-type inequalities for the fractional derivatives of trigonometric polynomials of several variables in spaces with integral metric. The problem of sharpness of these inequalities is investigated.

Отримано необхідні та достатні умови справедливості нерівностей типу Бернштейна для дробових похідних тригонометричних поліномів багатьох змінних у просторах з інтегральною метрикою. Досліджено питання точності цих нерівностей.

1. Введение. Пусть $\mathcal{T}_N$ – множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше N, а $\|\cdot\|_p$ – p-норма (или квазинорма, если $0<p<1$) на полуинтервале $[0,2\pi)$. Неравенством Бернштейна для производной тригонометрического полинома называют неравенство вида

$$\|T_N'\|_p \le N\|T_N\|_p, \qquad T_N\in\mathcal{T}_N, \quad N\in\mathbb{N}. \tag{1}$$

Данное неравенство при $p=\infty$ в частных случаях получил С. Н. Бернштейн [1, с. 26]. В общем случае с $p=\infty$ это неравенство было доказано М. Риссом [2]. А. Зигмунд [3] (гл. 10), используя интерполяционную формулу Рисса, доказал следующее утверждение: *если функция φ выпукла (вниз) на $[0,\infty)$ и не убывающая, то*

$$\int\limits_0^{2\pi}\varphi(|T_N'(t)|)dt \le \int\limits_0^{2\pi}\varphi(N|T_N(t)|)dt, \qquad T_N\in\mathcal{T}_N, \quad N\in\mathbb{N}. \tag{2}$$

Легко видеть, что если $\varphi(t)=t^p$, то из (2) непосредственно следует неравенство (1) при всех $p\in[1,\infty)$.

При $0<p<1$ неравенства вида (1) исследовались в работах [4 – 7]. В частности, в [4, 5] было получено неравенство

$$\|T_N'\|_p \le C(p)N\|T_N\|_p, \qquad T_N\in\mathcal{T}_N, \quad N\in\mathbb{N},$$

где $C(p)$ — некоторая константа, зависящая только от p. В работе [7] В. В. Арестов показал, что данное неравенство, на самом деле, выполняется с константой $C(p)=1$. Более того, в этой же работе было получено неравенство вида (2) с функцией $\varphi\colon[0,\infty)\mapsto\mathbb{R}$, которая представима в виде $\varphi(u)=\psi(\ln u)$, где функция ψ не убывает и выпукла на $(-\infty,\infty)$.

Пусть $T_N^{(\beta)}$ — дробная производная Вейля полинома T_N. Из результатов работы П. И. Лизоркина [8] следует, что при $p\ge1$ и $\beta\ge1$ (см. также в [9] общий случай $\beta>0$) имеет место неравенство

$$\left\|T_N^{(\beta)}\right\|_p \le N^\beta\|T_N\|_p, \qquad T_N\in\mathcal{T}_N, \quad N\in\mathbb{N}. \tag{3}$$

В случае пространств L_p, $0<p<1$, неравенства типа Бернштейна для дробных производных полинома изучались в работах [10 – 13]. Оказалось, что при $0<p<1$ неравенство типа

Бернштейна выполняется тогда и только тогда, когда $\beta \in \mathbb{N}$ или $\beta > 1/p - 1$. В частности, Е. С. Белинским и И. Р. Лифляндом [11] было доказано, что при $0 < p < 1$

$$\sup_{\|T_N\|_p \le 1} \left\| T_N^{(\beta)} \right\|_p \asymp \begin{cases} N^{\beta}, & \beta \in \mathbb{Z}_+ \text{ или } \beta \notin \mathbb{Z}_+ \text{ и } \beta > 1/p - 1, \\ N^{1/p-1}, & \beta \notin \mathbb{Z}_+ \text{ и } \beta < 1/p - 1, \\ N^{1/p-1} \log^{1/p} N, & \beta = 1/p - 1 \notin \mathbb{Z}_+. \end{cases} \tag{4}$$

(Знак $\asymp$ обозначает двусторонние неравенства с положительными константами, зависящими только от p и β.)

Пусть Φ — класс функций $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$, являющихся модулем непрерывности, т. е. φ — непрерывная неубывающая функция, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x + y) \le \varphi(x) + \varphi(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}_+$. В работе С. А. Пичугова [13] показано, что если $\beta \ge 1$, а функция $\varphi \in \Phi$ является выпуклой вверх и удовлетворяет условию $\varphi(t) \sim t$ при $t \to 0$, то

$$\sup_{T_N \in \mathcal{T}_N, T_N \ne 0} \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi\left(\left| T_N^{(\beta)}(t) \right| \right) dt}{\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(|T_N(t)|) dt} = N^{\beta}. \tag{5}$$

Легко видеть, что соотношение (5), вообще говоря, отличается от обычного неравенства типа Бернштейна и оценка сверху является более грубой, чем в неравенстве вида (2) для соответствующих функций φ.

В работе автора [14] установлены необходимые и достаточные условия на $\beta \notin \mathbb{N}$ и $\varphi \in \Phi$, при которых имеет место неравенство

$$\int_0^{2\pi} \varphi\left(\left| T_N^{(\beta)}(t) \right| \right) dt \le C \int_0^{2\pi} \varphi\left(N^{\beta} |T_N(t)| \right) dt, \qquad T_n \in \mathcal{T}_N, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Оказалось, что неравенство такого вида выполняется уже не для всех функций $\varphi \in \Phi$, удовлетворяющих условию $\varphi(t) \sim t$ при $t \to 0$.

Неравенства вида (3) и (4) изучались также в случае нескольких переменных. Далее всюду мы будем использовать следующие обозначения: $\|\cdot\|_p$ — p-норма (или квазинорма, если $0 < < p < 1$) на n-мерном торе $\mathbb{T}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$, $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$, $\mathcal{T}_N^n = \operatorname{span}\left\{ e^{i(k,x)} \colon |k| \le N \right\}$.

В работе [12] показано, что если $\gamma \notin \mathbb{N}$, $\gamma > 0$, а $\dfrac{\partial^{\gamma}}{\partial x_j^{\gamma}}$ — дробная производная Вейля по переменной j, то неравенство вида

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x_j^{\gamma}} T_N \right\|_p \le C(\gamma, n, p) N^{\gamma} \|T_N\|_p, \qquad T_N \in \mathcal{T}_N^n, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $1/(\gamma + 1) < p \le \infty$. С другой стороны, если $\beta \notin \mathbb{N}$, $\beta > 0$, а $(-\Delta)^{\beta/2}$ — дробная степень оператора Лапласа, то неравенство вида

$$\left\|(-\Delta)^{\beta/2}T_N\right\|_p \le C(\beta,n,p)N^\beta\|T_N\|_p, \qquad T_N\in\mathcal{T}_N^n, \quad N\in\mathbb{N}, \tag{7}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $n/(\beta+n)<p\le\infty$.

Цель настоящей работы — исследовать неравенства вида (6) и (7) в метрических пространствах, которые задаются с помощью интегральной метрики

$$\rho_\varphi(f,g)=\int\limits_{\mathbb{T}^n}\varphi(|f(x)-g(x)|)dx.$$

Также будут получены обобщения соотношений (4) с заменой квазинормы $\|\cdot\|_p$ функционалом $\int_{\mathbb{T}^n}\varphi(|\cdot|)dt$, где $\varphi\in\Phi$. При этом, в отличие от (5), будем исследовать величины вида

$$\sup_{T_N\in\mathcal{T}_N,T_N\ne0}\frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi\left(\left|T_N^{(\beta)}(t)\right|\right)dt}{\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi\left(N^\beta|T_N(t)|\right)dt}. \tag{8}$$

Далее всюду символами C, C_j, $j=1,2,\ldots,$ будем обозначать положительные константы (возможно различные даже в одной строке), не зависящие от рассматриваемого полинома T_N. Символ $\asymp$ будет обозначать двусторонние неравенства с положительными константами, не зависящими от N.

2. Основные определения и вспомогательные утверждения. Пусть f_β — однородная функция порядка $\beta\ge0$, т. е.

$$f_\beta(t\xi)=t^\beta f_\beta(\xi), \qquad t>0, \qquad \xi\in\mathbb{R}^n.$$

Введем оператор „дробного дифференцирования” $D(f_\beta)$, который на множестве всех тригонометрических полиномов определяется по формуле

$$D(f_\beta)T(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}f_\beta(k)c_ke^{i(k,t)}, \qquad T(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}c_ke^{i(k,t)}. \tag{9}$$

Заметим, что если $f_\beta(k)=(ik_j)^\beta=|k_j|e^{\frac{i\pi\beta}{2}\operatorname{sign}k_j}$, то формула (9) задает дробную производную Вейля полинома T по переменной j, а при $f_\beta(k)=|k|^\beta$ — дробную степень оператора Лапласа.

Далее

$$\widehat{f}(x)=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(\xi)e^{-i(\xi,x)}d\xi$$

— преобразование Фурье функции f, а $\mathcal{X}^n$ — множество вещественнозначных радиальных функций η таких, что $\eta\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\eta(0)=1$.

Для дальнейшего изложения понадобится следующая лемма (см. [12]).

Лемма 1. *Пусть $f_\beta\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ — однородная функция порядка $\beta\ge0$, не являющаяся полиномом, а функция $\eta\in\mathcal{X}^n$ имеет компактный носитель. Тогда*

1) $\left|\widehat{f_\beta\eta}(x)\right|\le C_1(1+|x|)^{-\beta-n}, \quad x\in\mathbb{R}^n;$

2) *найдутся* $\rho > 1$, $\theta > 0$ *и* $u_0 \in \mathcal{S}^{n-1}$ *такие, что*

$$\left|\widehat{f_\beta\eta}(x)\right| \geq C_2|x|^{-\beta-n}, \quad x \in \Omega,$$

где

$$\Omega \equiv \Omega(\rho,\theta,u_0) = \left\{x = ru\colon r \geq \rho,\ u \in \mathcal{S}^{n-1},\ \cos\theta \leq (u,u_0) \leq 1\right\},$$

$\mathcal{S}^{n-1}$ — *единичная сфера в* $\mathbb{R}^n$, *а* C_1 *и* C_2 — *некоторые положительные константы.*

Имеет место следующее неравенство типа Бернштейна.

Лемма 2. *Пусть функция* φ *принадлежит* Φ *и* $f_\beta \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ — *однородная функция порядка* $\beta \geq 0$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi(|D(f_\beta)T_N(t)|)dt \leq C \int\limits_{1<|x|<N}\int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi\left(\frac{N^\beta}{|x|^{n+\beta}}|T_N(t)|\right)dtdx, \quad T_N \in \mathcal{T}_N^n, \quad N \geq 1, \tag{10}$$

где C — *некоторая положительная константа, не зависящая от полинома* T_N.

Доказательство. Введем в рассмотрение полином

$$K_{N,\beta}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_\beta\left(\frac{k}{N}\right)\eta\left(\frac{k}{N}\right)e^{i(k,x)},$$

где $\eta \in \mathcal{X}^n$, $\eta(\xi) = 1$ при $|\xi| \leq 1$ и $\eta(\xi) = 0$ при $|\xi| \geq 2$.

Имеет место равенство

$$D(f_\beta)T_N(x) = \frac{1}{(4N+1)^n}\sum_{\nu=0}^{4N} K_{N,\beta}(x - x_\nu - t)T_N(x_\nu + t)$$

$\left(\text{здесь и далее } x_\nu = \dfrac{2\pi\nu}{4N+1},\ \nu \in \mathbb{Z}_+^n,\ \sum_{\nu=0}^{4N} \equiv \sum_{\nu_1=0}^{4N}\ldots\sum_{\nu_n=0}^{4N}\right)$, используя которое, получаем

$$I := \int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi\left(N^{-\beta}|D(f_\beta)T_N(x)|\right)dx \leq$$

$$\leq C\sum_{\nu=0}^{4N}\int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi\left(N^{-n-\beta}|K_{N,\beta}(x - x_\nu - t)T_N(x_\nu + t)|\right)dx =$$

$$= C\sum_{\nu=0}^{4N}\int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi\left(N^{-n-\beta}|K_{N,\beta}(x)T_N(x_\nu + t)|\right)dx.$$

Интегрируя обе части последнего неравенства по t, а также применяя формулу суммирования Пуассона (см., например, [15])

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(N(x + 2\pi k)) \sim (2\pi)^{-n/2}N^{-n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f\left(\frac{k}{N}\right)e^{-i(k,x)}, \tag{11}$$

находим

$$(2\pi)^n I \le \sum_{\nu=0}^{4N} \int\limits_{\mathbb{T}^n}\int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi\left(N^{-n-\beta}|K_{N,\beta}(x)T_N(x_\nu+t)|\right)dxdt \le$$

$$\le CN^n \int\limits_{\mathbb{T}^n}\int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi\left(N^{-n-\beta}|K_{N,\beta}(x)T_N(t)|\right)dxdt =$$

$$= C\int\limits_{\mathbb{T}^n}\int\limits_{N\mathbb{T}^n} \varphi\left(\left|\frac{1}{N^n}\sum_k f_\beta\left(\frac{k}{N}\right)\eta\left(\frac{k}{N}\right)e^{\frac{i(k,x)}{N}}\right||T_N(t)|\right)dtdx \le$$

$$\le C\int\limits_{\mathbb{T}^n}\int\limits_{N\mathbb{T}^n} \varphi\left(\left|\sum_k \widehat{f_\beta\eta}(x+2\pi Nk)\right||T_N(t)|\right)dtdx \le$$

$$\le C\int\limits_{\mathbb{T}^n}\int\limits_{N\mathbb{T}^n} \varphi\left(\left|\widehat{f_\beta\eta}(x)T_N(t)\right|\right)dtdx+$$

$$+C\int\limits_{\mathbb{T}^n}\int\limits_{N\mathbb{T}^n} \varphi\left(\left|\sum_{k\ne 0} \widehat{f_\beta\eta}(x+2\pi Nk)\right||T_N(t)|\right)dtdx := I_1+I_2. \tag{12}$$

Далее, используя лемму 1, получаем

$$I_1 \le C\int\limits_{\mathbb{T}^n}\int\limits_{N\mathbb{T}^n} \varphi\left(\frac{|T_N(t)|}{(1+|x|)^{\beta+n}}\right)dtdx \le C\int\limits_{\mathbb{T}^n}\int\limits_{1<|x|<N} \varphi\left(\frac{|T_N(t)|}{|x|^{\beta+n}}\right)dtdx, \tag{13}$$

а

$$I_2 \le C\int\limits_{\mathbb{T}^n}\int\limits_{N\mathbb{T}^n} \varphi\left(\sum_{k\ne 0}\frac{|T_N(t)|}{(1+|x+2\pi Nk|)^{\beta+n}}\right)dtdx \le$$

$$\le C\int\limits_{\mathbb{T}^n}\int\limits_{N\mathbb{T}^n} \varphi\left(\sum_{k\ne 0}\frac{|T_N(t)|}{|Nk|^{\beta+n}}\right)dtdx \le$$

$$\le C\int\limits_{\mathbb{T}^n}\int\limits_{1<|x|<N} \varphi\left(|x|^{-\beta-n}|T_N(t)|\right)dtdx. \tag{14}$$

Таким образом, объединяя (12) – (14), имеем

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi\left(N^{-\beta}|D(f_\beta)T_N(t)|\right)dt \le C\int\limits_{\mathbb{T}^n}\int\limits_{1<|x|<N} \varphi\left(|x|^{-\beta-n}|T_N(t)|\right)dtdx.$$

Из последнего неравенства непосредственно следует (10).

Лемма 2 доказана.

Для формулировки и доказательства основных теорем настоящей статьи нам понадобится понятие функции растяжения. Пусть φ — произвольная строго положительная всюду конечная функция на $(0,\infty)$. Ее функцией растяжения называют функцию M_φ:

$$M_\varphi(s) := \sup_{\lambda>0} \frac{\varphi(s\lambda)}{\varphi(\lambda)}.$$

Приведем некоторые свойства функции M_φ в случае $\varphi \in \Phi$ (см. [16], гл. II, § 4):

1) M_φ — всюду конечная неубывающая на $(0,\infty)$ функция и

$$M_\varphi(s_1 s_2) \le M_\varphi(s_1) M_\varphi(s_2), \quad s_1, s_2 \in (0,\infty);$$

2) существует число γ_φ (называемое нижним показателем растяжения функции φ) такое, что:

а) $\gamma_\varphi \in [0,1]$,

б) $M_\varphi(s) \ge s^{\gamma_\varphi}$, $s \in (0,1]$,

в) для любого $\varepsilon > 0$ при $s \in (0,1)$ найдется константа C_ε такая, что

$$M_\varphi(s) \le C_\varepsilon s^{\gamma_\varphi - \varepsilon}.$$

При этом

$$\gamma_\varphi = \lim_{s\to 0} \frac{\ln M_\varphi(s)}{\ln s} = \sup_{0<s<1} \frac{\ln M_\varphi(s)}{\ln s}.$$

В частности, если $\gamma_\varphi = 0$, то $M_\varphi(s) \equiv 1$, $s \in [0,1]$, если же $\gamma_\varphi > 0$, то $M_\varphi(+0) = 0$.

В дальнейшем нам понадобится следующее „техническое" условие на функцию $\varphi \in \Phi$.

Будем говорить, что функция φ принадлежит классу Φ^*, если φ принадлежит Φ и найдется функция α такая, что

$$\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad \alpha(0) = 1, \qquad \operatorname{supp} \alpha \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 1\} \tag{15}$$

и

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(|\widehat{\alpha}(x)|\right) dx < \infty. \tag{16}$$

Нетрудно заметить, что любая функция $\varphi \in \Phi$ с $\gamma_\varphi > 0$ принадлежит классу Φ^*.

Уточним последнее условие при $n = 1$. В работе [18] было доказано существование функции $\eta \in L_1(\mathbb{R})$ такой, что $\eta \ne 0$, $\operatorname{supp} \eta \subset (-1,1)$ и

$$|\widehat{\eta}(x)| = O\left(e^{-u(|x|)|x|}\right), \qquad x \to \pm\infty,$$

где u — некоторая положительная функция такая, что $u(x) \to 0$ при $x \to \infty$ и

$$\int_1^\infty \frac{u(x)}{x} dx < \infty, \tag{17}$$

причем последнее условие является также и необходимым для существования такой функции η.

Таким образом, φ принадлежит классу Φ^*, $n=1$, если найдется убывающая к нулю функция $u(x)>0$ такая, что имеет место (17) и

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi\left(e^{-u(|x|)|x|}\right) dx < \infty.$$

Лемма 3. *Пусть функция φ принадлежит Φ^*, а функция α удовлетворяет условиям* (15) *и* (16). *Тогда*

$$N^n \int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi\left(\frac{1}{N^n}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \alpha\left(\frac{k}{N}\right) e^{i(k,t)}\right|\right) dt \le C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(|\widehat{\alpha}(x)|)dx, \quad N\ge 1,$$

где C — константа, не зависящая от N и α.

Доказательство этой леммы легко вывести из формулы суммирования Пуассона (11) (см., например, [17], 4.1.1).

3. Формулировки и доказательства основных результатов. Одним из основных результатов настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция φ принадлежит классу Φ^* и $f_\beta \in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ — однородная функция порядка $\beta\ge 0$, не являющаяся полиномом. Тогда*:

1) *если $\gamma_\varphi > n/(n+\beta)$, то*

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi(|D(f_\beta)T_N(t)|)dt \le C \int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi(N^\beta |T_N(t)|)dt, \qquad T_N\in\mathcal{T}_N^n, \quad N\ge 1, \tag{18}$$

где C — константа, не зависящая от T_N;

2) *если $\gamma_\varphi < n/(n+\beta)$, а при $\gamma_\varphi = n/(n+\beta)$ имеет место*

$$\sup_{t>0} \int\limits_{|x|>1} \frac{\varphi(t|x|^{-n/\gamma_\varphi})}{\varphi(t)} dx = \infty, \tag{19}$$

то неравенство (18) *не выполняется с константой C, не зависящей от T_N.*

Доказательство. Первое утверждение легко следует из свойства в) функции M_φ и леммы 2. Действительно, используя неравенство (10) и выбирая положительное $\varepsilon < \gamma_\varphi - n/(n+\beta)$, находим

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi(|D(f_\beta)T_N(t)|)dt \le C \int\limits_{1<|x|<N} M_\varphi(|x|^{-n-\beta})dx \int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi(N^\beta|T_N(t)|)dt \le$$

$$\le C \int\limits_{1<|x|<N} \frac{dx}{|x|^{(n+\beta)(\gamma_\varphi-\varepsilon)}} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi(N^\beta|T_N(t)|)dt \le C \int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi(N^\beta|T_N(t)|)dt.$$

Докажем второе утверждение. Пусть $A>0$. Предположим, что существует константа C, не зависящая от полинома T_N, такая, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi(A|D(f_\beta)T_N(t)|)dt \le C \int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi(AN^\beta|T_N(t)|)dt. \tag{20}$$

Пусть α принадлежит $\mathcal{X}^n$ и удовлетворяет условиям (15) и (16). Рассмотрим последовательность функций $\{F_N(x)\}_{N=1}^{\infty}$, определенных по формуле

$$F_N(x) = \begin{cases} \left| \dfrac{1}{N^n} \sum\limits_k f_\beta \left(\dfrac{k}{N}\right) \alpha \left(\dfrac{k}{N}\right) e^{i\frac{(k,x)}{N}} \right|, & x \in [-\pi N, \pi N]^n, \\ 0 & \text{— в других случаях.} \end{cases}$$

Используя неравенство (20) и лемму 3, последовательно получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(A|F_N(x)|)dx = N^n \int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi \left(A \left| \frac{1}{N^n} \sum_k f_\beta \left(\frac{k}{N}\right) \alpha \left(\frac{k}{N}\right) e^{i(k,t)} \right| \right) dt \leq$$

$$\leq CN^n \int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi \left(A \left| \frac{1}{N^n} \sum_k \alpha \left(\frac{k}{N}\right) e^{i(k,t)} \right| \right) dt \leq C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(A|\widehat{\alpha}(x)|)dx. \tag{21}$$

Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in \mathbb{T}^n$. По определению интеграла Римана нетрудно проверить, что

$$\lim_{N\to\infty} F_N(x_0) = (2\pi)^{n/2} \left| \widehat{f_\beta \alpha}(-x_0) \right|. \tag{22}$$

Таким образом, учитывая (21), (22) и применяя при этом лемму Фату, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi \left(A \left| \widehat{f_\beta \alpha}(x) \right| \right) dx \leq C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(A|\widehat{\alpha}(x)|)dx.$$

Отсюда, используя лемму 1 и свойства функции φ, после простых преобразований получаем

$$\int\limits_{|x|>1} \varphi(A|x|^{-\beta-n})dx \leq C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(A|\widehat{\alpha}_1(x)|)dx,$$

где $\alpha_1(x) := \alpha(x)\|\widehat{\alpha}\|_\infty^{-1}$.

Из последнего неравенства после простых оценок и замены переменных $x \to x/(4C)^{1/n}$ находим

$$\int\limits_{|x|>1} \varphi(A|x|^{-n-\beta})dx \leq \frac{1}{4} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi \left(A \left| \widehat{\alpha}_1 \left(\frac{x}{(4C)^{1/n}} \right) \right| \right) dx. \tag{23}$$

Далее, выберем $m \in \mathbb{N}$ настолько большим, что при $|x| \geq m$ выполняется неравенство

$$\left| \widehat{\alpha}_1 \left(\frac{x}{(4C)^{1/n}} \right) \right| < \frac{1}{|x|^{n+\beta}}.$$

Тогда, используя (23) и учитывая при этом оценку

$$\int\limits_{|x|>1} \varphi(A|x|^{-n-\beta})dx \geq v_n(m^n - 1)\varphi(Am^{-n-\beta}) + \int\limits_{|x|\geq m} \varphi(A|x|^{-n-\beta})dx,$$

где $v_n = \dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$ — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, находим

$$v_n(m^n-1)\varphi(Am^{-n-\beta}) < \frac{1}{4}\int\limits_{|x|<m}\varphi\left(A\left|\widehat{\alpha}_1\left(\frac{x}{(4C)^{1/n}}\right)\right|\right)dx.$$

Далее,

$$v_n(m^n-1)\frac{\varphi(Am^{-n-\beta})}{\varphi(A)} < \frac{1}{4}\int\limits_{|x|<m}\frac{\varphi\left(A\left|\widehat{\alpha}_1\left(\frac{x}{(4C)^{1/n}}\right)\right|\right)}{\varphi(A)}dx \le$$

$$\le \frac{1}{4}\int\limits_{|x|<m} M_\varphi\left(\left|\widehat{\alpha}_1\left(\frac{x}{(4C)^{1/n}}\right)\right|\right)dx$$

и, следовательно,

$$v_n(m^n-1)M_\varphi(m^{-n-\beta}) < \frac{1}{4}\int\limits_{|x|<m} M_\varphi\left(\left|\widehat{\alpha}_1\left(\frac{x}{(4C)^{1/n}}\right)\right|\right)dx. \tag{24}$$

Таким образом, если $\gamma_\varphi = 0$, то из (24) получаем $m^n - 1 < m^n/4$, т. е. противоречие.

Если $\gamma_\varphi > 0$, то из (24) при достаточно малом ε следует, что

$$\frac{m^{n-(n+\beta)\gamma_\varphi}}{2} \le C\int\limits_{|x|<m}\left|\widehat{\alpha}_1\left(\frac{x}{(4C)^{1/n}}\right)\right|^{\gamma_\varphi-\varepsilon}dx \le C.$$

Поскольку $n-(n+\beta)\gamma_\varphi > 0$, снова получаем противоречие.

Если $\gamma_\varphi = n/(n+\beta)$ и выполняется (19), то противоречие легко следует из (23).

Теорема 1 доказана.

Далее для удобства обозначим

$$\Lambda_N(\varphi, f_\beta, n) = \sup_{T_N\in\mathcal{T}_N^n, T_N\ne 0}\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{T}^n}\varphi(|D(f_\beta)T_N(t)|)dt}{\displaystyle\int_{\mathbb{T}^n}\varphi(N^\beta|T_N(t)|)dt}.$$

Следующая теорема устанавливает оценки величины $\Lambda_N(\varphi, f_\beta, n)$, а также по существу уточняет теорему 1 в случае $\gamma_\varphi > 0$.

Теорема 2. *Пусть функция φ принадлежит Φ, $\gamma_\varphi > 0$ и $f_\beta \in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ — однородная функция порядка $\beta > 0$, не являющаяся полиномом. Тогда найдется $N_0 = N_0(\beta,\varphi,n)$ такое, что*:

1) *если $\beta > n(1/\gamma_\varphi - 1)$, то*

$$\Lambda_N(\varphi, f_\beta, n) \asymp 1, \quad N \ge 1; \tag{25}$$

2) *если $\beta = n(1/\gamma_\varphi - 1)$, то*

$$C_1\sup_{\lambda>0}\int\limits_{1<|x|<N}\frac{\varphi\left(\lambda|x|^{-\frac{n}{\gamma_\varphi}}\right)}{\varphi(\lambda)}dx \le \Lambda_N(\varphi, f_\beta, n) \le C_2\int\limits_{1<|x|<N} M_\varphi\left(|x|^{-\frac{n}{\gamma_\varphi}}\right)dx, \quad N \ge N_0; \tag{26}$$

3) *если* $\beta < n(1/\gamma_\varphi - 1)$, *то*

$$\Lambda_N(\varphi, f_\beta, n) \asymp N^n M_\varphi(N^{-n-\beta}), \quad N \geq N_0. \tag{27}$$

Доказательство. 1. Оценка сверху в (25) содержится в теореме 1. Оценка снизу тривиальна. Достаточно рассмотреть полином вида $T_N(t) = e^{iNt_1}$.

2. Оценка сверху в (26) непосредственно следует из леммы 1.

Докажем оценку снизу.

Пусть A — некоторая положительная константа, $\alpha \in \mathcal{X}^n$ — функция, удовлетворяющая условиям (15), (16) и

$$K_N(t) = \sum_k \alpha\left(\frac{k}{N}\right) e^{i(k,x)}.$$

Используя лемму 3, имеем

$$\Lambda_N(\varphi, f_\beta, n) \geq \frac{\int_{\mathbb{T}^n} \varphi(AN^{-\beta-n}|D(f_\beta)K_N(t)|)dt}{\int_{\mathbb{T}^n} \varphi(AN^{-n}|K_N(t)|)dt} \geq C\frac{N^n \int_{\mathbb{T}^n} \varphi(AN^{-\beta-n}|D(f_\beta)K_N(t)|)dt}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(A|\widehat{\alpha}(x)|)dx}. \tag{28}$$

Рассмотрим знаменатель в последней дроби. Используя свойства функции M_φ и выбирая при этом $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(A|\widehat{\alpha}(x)|)dx \leq \varphi(A) \int\limits_{\mathbb{R}^n} M_\varphi(|\widehat{\alpha}(x)|)dx \leq C\varphi(A) \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\alpha}(x)|^{\gamma_\varphi - \varepsilon}dx \leq C\varphi(A). \tag{29}$$

Теперь рассмотрим числитель. Используя формулу суммирования Пуассона (11), находим

$$I := N^n \int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi(AN^{-\beta-n}|D(f_\beta)K_N(t)|)dt \geq$$

$$\geq CN^n \int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi\left(A\left|\sum_k \widehat{f_\beta\alpha}(N(x+2\pi k))\right|\right)dx =$$

$$= C \int\limits_{N\mathbb{T}^n} \varphi\left(A\left|\sum_k \widehat{f_\beta\alpha}(x+2\pi Nk)\right|\right)dx \geq$$

$$\geq C \int\limits_{\rho\leq|x|\leq\delta N\rho} \varphi\left(A\left|\sum_k \widehat{f_\beta\alpha}(x+2\pi Nk)\right|\right)dx \geq$$

$$\geq C \int\limits_{\rho\leq|x|\leq\delta N\rho} \varphi\left(A\left|\widehat{f_\beta\alpha}(x)\right|\right)dx -$$

$$-C \int\limits_{\rho\le|x|\le\delta N\rho} \varphi\left(A\left|\sum_{k\ne0}\widehat{f_\beta\alpha}(x+2\pi Nk)\right|\right)dx = I_1 - I_2, \tag{30}$$

где ρ — число из леммы 1, а $\delta\in(0,\rho^{-1})$ будет выбрано позже.

Используя лемму 1, после простых преобразований имеем

$$I_1 \ge C_1 \int\limits_{1\le|x|\le\delta N} \varphi(A|x|^{-n-\beta})dx, \tag{31}$$

где C_1 — некоторая положительная константа, не зависящая от N и A.

Снова используя лемму 1 и свойства функции M_φ, находим

$$I_2 \le C_2 \int\limits_{\rho\le|x|\le\delta N\rho} \varphi\left(A\sum_{k\ne0}\frac{1}{(1+|x+2\pi Nk|)^{n+\beta}}\right)dx \le$$

$$\le C_3 \int\limits_{1\le|x|\le\delta N} \varphi\left(A\sum_{k\ne0}\frac{1}{|Nk|^{n+\beta}}\right)dx \le$$

$$\le C_4 \int\limits_{1\le|x|\le\delta N} M_\varphi\left(\left(\frac{|x|}{N}\right)^{n+\beta}\right)\varphi(A|x|^{-n-\beta})dx \le$$

$$\le C_5 \int\limits_{1\le|x|\le\delta N} \left(\frac{|x|}{N}\right)^{(\gamma_\varphi-\varepsilon)(n+\beta)} \varphi(A|x|^{-n-\beta})dx, \tag{32}$$

где ε — достаточно малое положительное число, а C_5 — константа, не зависящая от N и A.

Объединяя (30) – (32), получаем

$$I \ge \int\limits_{1\le|x|\le\delta N} \left(C_1 - C_5\left(\frac{|x|}{N}\right)^{(\gamma_\varphi-\varepsilon)(n+\beta)}\right)\varphi(A|x|^{-n-\beta})dx. \tag{33}$$

Выбирая в последнем неравенстве δ так, чтобы при $|x|\le\delta N$

$$C_1 - C_5\left(\frac{|x|}{N}\right)^{(\gamma_\varphi-\varepsilon)(n+\beta)} \ge C_6 > 0,$$

находим

$$I \ge C_6 \int\limits_{1\le|x|\le\delta N} \varphi(A|x|^{-n-\beta})dx. \tag{34}$$

Оценим последний интеграл. Имеем

$$\int\limits_{1\le|x|\le\delta N} \varphi(A|x|^{-n-\beta})dx = \int\limits_{\delta\le|x|\le\delta N} - \int\limits_{\delta\le|x|\le1} = S_1 - S_2.$$

После простых преобразований получаем

$$S_1 \geq C_7 \int\limits_{1\leq|x|\leq N} \varphi(A|x|^{-n-\beta})dx, \tag{35}$$

где C_7 — некоторая положительная константа, не зависящая от A.

Рассмотрим интеграл S_2. Выполняя замену $x \to x/(\delta N)$ и применяя неравенство $\varphi(tx) \leq$ $\leq Ct^{\gamma_\varphi - \varepsilon}\varphi(x)$, где ε – достаточно малое положительное число, находим, что при $N \geq 1/\delta^2$

$$S_2 \leq \frac{C_8}{(\delta N)^{\varepsilon(n+\beta)}} \int\limits_{1\leq|x|\leq\delta N} \varphi(A|x|^{-n-\beta})dx. \tag{36}$$

Объединяя (34) – (36), имеем

$$\int\limits_{1\leq|x|\leq\delta N} \varphi(A|x|^{-n-\beta})dx \geq \left(C_7 - \frac{C_8}{(\delta N)^{\varepsilon(n+\delta)}}\right) \int\limits_{1<|x|<N} \varphi(A|x|^{-n-\beta})dx. \tag{37}$$

Таким образом, выбирая в последнем неравенстве N достаточно большим и объединяя неравенства (28), (29), (34) и (37), получаем

$$\Lambda_N(\varphi, f_\beta, n) \geq C \int\limits_{1<|x|<N} \frac{\varphi(A|x|^{-n-\beta})}{\varphi(A)}dx. \tag{38}$$

Отсюда непосредственно следует нижняя оценка в (26).

3. Оценка снизу в (27) легко следует из (38).

Докажем оценку сверху. Для этого воспользуемся леммой 2 и оценим правую часть неравенства (10). Тогда

$$\int\limits_{1<|x|<N} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi(N^\beta|x|^{-n-\beta}|T_N(t)|)dtdx =$$

$$= N^n \int\limits_{\mathbb{T}^n} \int\limits_{1/N<|x|<1} \varphi(N^{-n}|x|^{-n-\beta}|T_N(t)|)dtdx \leq$$

$$\leq N^n \int\limits_{1/N<|x|<1} M_\varphi(|x|^{-n-\beta})dx \int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi(N^{-n}|T_N(t)|)dt \leq$$

$$\leq CN^n \int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi(N^{-n}|T_N(t)|)dt \leq$$

$$\leq CN^n M_\varphi(N^{-n-\beta}) \int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi(N^\beta|T_N(t)|)dt. \tag{39}$$

При выводе неравенств (39) мы воспользовались тем фактом, что при достаточном малом $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_{1/N<|x|<1} M_\varphi(|x|^{-n-\beta})dx \le C \int\limits_{1/N<|x|<1} \frac{dx}{|x|^{(n+\beta)(\gamma_\varphi-\varepsilon)}} \le C.$$

Таким образом, объединяя неравенства (10) и (39), получаем требуемую оценку.

Теорема 2 доказана.

В предыдущей теореме рассматривался только случай $\gamma_\varphi > 0$. В случае $\gamma_\varphi \ge 0$ имеет место следующий результат.

Предложение 1. *Пусть функция* φ *принадлежит классу* Φ^*, $f_\beta \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ — *однородная функция порядка* $\beta > 0$, *не являющаяся полиномом,* $0 \le \gamma_\varphi < n/(\beta+n)$ *и*

$$\sup_{0<\delta<1} \frac{1}{\delta^n} \int\limits_{|x|<\delta} \varphi(|x|^{-n-\beta})dx = \infty.$$

Тогда найдется $N_0 = N_0(\varphi, \beta, n)$ *такое, что*

$$\sup_{T_N \in \mathcal{T}_N^n, T_N \ne 0} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{T}^n} \varphi(|D(f_\beta)T_N(t)|)dt}{\displaystyle\int_{\mathbb{T}^n} \varphi(N^{-n}|T_N(t)|)dt} \asymp N^n, \quad N \ge N_0. \tag{40}$$

Доказательство. Оценка сверху непосредственно следует из (10) и (39).

Докажем оценку снизу. По аналогии с выводом формул (28) и (30) имеем

$$\sup_{T_N \in \mathcal{T}_N^n, T_N \ne 0} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{T}^n} \varphi(|D(f_\beta)T_N(t)|)dt}{\displaystyle\int_{\mathbb{T}^n} \varphi(N^{-n}|T_N(t)|)dt} \ge CN^n \int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi(|D(f_\beta)K_N(t)|)dt$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi(|D(f_\beta)K_N(t)|)dt = \int\limits_{\mathbb{T}^n} \varphi\left(N^\beta\left|\sum_k f_\beta\left(\frac{k}{N}\right)\alpha\left(\frac{k}{N}\right)e^{i(k,t)}\right|\right)dt \ge$$

$$\ge \frac{C}{N^n} \int\limits_{\rho\le|x|\le\delta N\rho} \varphi\left(N^{n+\beta}|\widehat{f_\beta\alpha}(x)|\right)dx -$$

$$-\frac{C}{N^n} \int\limits_{\rho\le|x|\le\delta N\rho} \varphi\left(N^{n+\beta}\left|\sum_{k\ne0}\widehat{f_\beta\alpha}(x+2\pi Nk)\right|\right)dx := I_1 - I_2, \tag{41}$$

где ρ — число из леммы 1, а $\delta \in (0,1)$ будет выбрано позже.

Используя лемму 1 и свойства функции φ, оценим интегралы I_1 и I_2. Имеем

$$I_1 \ge \frac{C_1}{N^n} \int\limits_{1\le|x|\le\delta N} \varphi\left(\frac{N^{n+\beta}}{|x|^{1+\beta}}\right)dx = C_1 \int\limits_{1/N<|x|<\delta} \varphi\left(\frac{1}{|x|^{n+\beta}}\right)dx, \tag{42}$$

$$I_2 \le \frac{C_2}{N^n} \int\limits_{1\le|x|\le\delta N} \varphi\left(N^{n+\beta}\sum_{k\ne0}\frac{1}{|kN|^{n+\beta}}\right)dx \le C_2\delta^n. \tag{43}$$

Таким образом, объединяя оценки (41)–(43) и выбирая при этом N_0 и δ так, чтобы

$$C_1 \int\limits_{1/N_0<|x|<\delta} \varphi\left(\frac{1}{|x|^{n+\beta}}\right)dx - C_2\delta^n = C_3 > 0,$$

получаем требуемую оценку.

Предложение доказано.

***Замечание* 1.** Если $\varphi(t) = t^p$, $0 < p < 1$, а $\beta < n(1/p-1)$, $\beta \notin 2\mathbb{N}$, то неравенства (27) и (40) эквивалентны.

Рассмотрим теперь неравенства вида (6). Используя рассуждения из доказательства теоремы 2 (см. также теоремы 4.2 и 5.2 в [12]), нетрудно получить следующую общую теорему.

Теорема 3. *Пусть функция* φ *принадлежит* Φ, $\gamma_\varphi > 0$ *и* $f_\beta(x) = \sum_{j=1}^n f_{\beta,j}(x_j)$, *где* $f_{\beta,j} \in C^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ — *однородная функция порядка* $\beta > 0$, $f_{\beta,j}(0) = 0$, $j = 1,\ldots,n$, *и хотя бы одна из функций* $f_{\beta,j}$ *не является полиномом. Тогда найдется* $N_0 = N_0(\beta,\varphi,n)$ *такое, что*:

1) *если* $\beta > (1/\gamma_\varphi - 1)$, *то*

$$\Lambda_N(\varphi, f_\beta, n) \asymp 1, \quad N \ge 1;$$

2) *если* $\beta = (1/\gamma_\varphi - 1)$, *то*

$$C_1 \sup_{\lambda>0} \int\limits_1^N \frac{\varphi(\lambda x_1^{-1/\gamma_\varphi})}{\varphi(\lambda)}dx_1 \le \Lambda_N(\varphi, f_\beta, n) \le C_2 \int\limits_1^N M_\varphi(x_1^{-1/\gamma_\varphi})dx_1, \quad N \ge N_0;$$

3) *если* $\beta < (1/\gamma_\varphi - 1)$, *то*

$$\Lambda_N(\varphi, f_\beta, n) \asymp N M_\varphi(N^{-1-\beta}), \quad N \ge N_0.$$

Рассмотрим следствия из теорем 2 и 3.

Пусть $f_\beta(k) = |k|^\beta$. Тогда в качестве следствия из теоремы 2 мы получаем следующее уточнение неравенства (7) для пространств $L_p(\mathbb{T}^n)$.

***Следствие* 1.** *Пусть* $0 < p < 1$ *и* $\beta > 0$. *Тогда*

$$\sup_{\|T_N\|_p\le1} \|(-\Delta)^{\beta/2}T_N\|_p \asymp \begin{cases} N^\beta, & \beta \in 2\mathbb{N} \text{ или } \beta \notin 2\mathbb{N} \text{ и } \beta > n(1/p-1), \\ N^{n(1/p-1)}, & \beta \notin 2\mathbb{N} \text{ и } \beta < n(1/p-1), \\ N^{n(1/p-1)}\log^{1/p} N, & \beta = n(1/p-1) \notin 2\mathbb{N}. \end{cases}$$

По аналогии с предыдущем случаем, если в теореме 3 положить $f_\beta(k) = \sum_{j=1}^n (ik_j)^\beta$, то в качестве следствия получим следующее уточнение неравенства (6) для пространств L_p.

***Следствие* 2.** *Пусть* $0 < p < 1$ *и* $\beta > 0$. *Тогда*

$$\sup_{\|T_N\|_p \le 1} \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^\gamma}{\partial x_j^\gamma} T_N \right\|_p \asymp \begin{cases} N^\beta, & \beta \in \mathbb{N} \text{ или } \beta \notin \mathbb{N} \text{ и } \beta > 1/p - 1, \\ N^{1/p-1}, & \beta \notin \mathbb{N} \text{ и } \beta < 1/p - 1, \\ N^{1/p-1} \log^{1/p} N, & \beta = 1/p - 1 \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. – М.: АН СССР, 1952. – Т. 1. – 582 с.
2. *Riesz M.* Formule d'interpolation pour la dérivée d'un polynome trigonométrique // C. r. Acad. sci. – 1914. – **158**. – P. 1152 – 1154.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 538 с.
4. *Иванов В. И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Мат. заметки. – 1975. – **18**, № 5. С. 641 – 658.
5. *Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сб. – 1975. – **98(140)**, № 3(11). – С. 395 – 415.
6. *Mate A., Nevai P. G.* Bernsten's inequality in L_p for $0 < p < 1$ and $(C, 1)$ bounds for ortogonal polynomials // Ann. Math. – 1980. – **111**, № 1. – P. 145 – 154.
7. *Арестов В. В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1981. – **45**, № 1. – С. 3 – 22.
8. *Лизоркин П. И.* Оценки тригонометрических интегралов и неравенство Бернштейна для дробных производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1965. – **29**, № 1. – С. 109 – 126.
9. *Görlich E., Nessel R. J., Trebels W.* Bernstein-type inequalities for families of multiplier operators in Banach spaces with Cesáro decompositions. I. General theory // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1973. – **34**. – P. 121 – 130.
10. *Taberski R.* Approximation in the Frechet spaces L^p $(0 < p < 1)$ // Funct. Approxim. – 1979. – **7**. – P. 105 – 121.
11. *Belinsky E., Liflyand E.* Approximation properties in L_p, $0 < p < 1$ // Funct. Approxim. – 1993. – **22**. – P. 189 – 199.
12. *Runovski K., Schmeisser H.-J.* On some extensions of Berenstein's inequality for trigonometric polynomials // Funct. Approxim. – 2001. – **29**. – P. 125 – 142.
13. *Пичугов С. А.* Неравенства для тригонометрических полиномов в пространствах с интегральной метрикой // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 12. – С. 1657 – 1671.
14. *Коломойцев Ю. С.* О неравенствах типа Бернштейна для дробных производных в классах $\varphi(L)$ // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2013. – **26**. – С. 95 – 103.
15. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Наука, 1974. – 330 с.
16. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
17. *Trigub R. M., Belinsky E. S.* Fourier analysis and appoximation of functions. – Kluwer, 2004.
18. *Ingham A. E.* A note on Fourier transforms // J. London Math. Soc. – 1934. – **1 - 9**, № 1. – P. 29 – 32.

Получено 25.12.13