УДК 517.5

А. Л. Гольберг (Холон. технол. ин-т, Израиль),
Е. А. Севостьянов (Житомир. гос. ун-т)

О РАДИУСЕ ИНЪЕКТИВНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ КВАЗИИЗОМЕТРИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ РАЗМЕРНОСТИ БОЛЬШЕ ДВУХ

We consider a class of local homeomorphisms much more general than the mappings with bounded distortion. Under these homeomorphisms, the growth of the p-module $(n-1<p\leq n)$ of the families of curves is controlled by an integral containing an admissible metric and a measurable function Q. It is shown that, under generic conditions imposed on the majorant Q, this class has a positive radius of injectivity (and, hence, a ball in which every mapping is homeomorphic). Moreover, one of the conditions imposed on Q is also necessary for existence of a radius of injectivity.

Для деякого класу локальних гомеоморфізмів, більш загальних, ніж відображення з обмеженим спотворенням, доведено одну версію теореми про універсальний радіус ін'єктивності. При фіксованому $p\in(n-1,n]$ встановлено, що для сім'ї всіх локальних гомеоморфізмів, які спотворюють p-модуль сімей кривих певним чином, знайдеться куля, в якій кожне відображення сім'ї є гомеоморфізмом, як тільки фіксована функція Q, що відповідає за контроль спотворення p-модуля, задовольняє певні обмеження. При цьому одна зі згаданих умов є не лише достатньою, а й необхідною умовою наявності такого радіуса.

1. Введение. В данной работе изучается некоторый класс отображений, более общих, чем квазиконформные, которые удовлетворяют определенным условиям модульно-емкостного характера (см., например, [1, 2]). Основные определения и обозначения, встречающиеся в статье, см., например, в [3].

Одной из классических гипотез в теории отображений является утверждение М. А. Лаврентьева о глобальной инъективности пространственных локальных квазиконформных гомеоморфизмов всего пространства. Это важнейшее свойство, характерное для размерностей $n\geq 3$, было в дальнейшем доказано в работе [4]. Для класса квазирегулярных отображений (отображений с ограниченным искажением по Решетняку) существование обратимости таких отображений в шаре радиуса, зависящего от коэффициента квазиконформности и размерности пространства, доказано в работе [5] (см. также [6]). В дальнейших работах рассматриваются более широкие классы отображений, как квазимероморфные или квазиконформные в некотором интегральном среднем, в которых существование радиуса инъективности доказывается или опровергается (см. [7 – 11]). В работах [12, 13] изучаются поведение радиуса инъективности и его применение к классическим вопросам геометрической теории функций, в частности локальной слабой конформности пространственных отображений.

В последнее время с большим интересом изучаются отображения, характеристика квазиконформности которых построена не на аналитическом описании, а на естественном ослаблении известной геометрической природы квазиконформных отображений. В данной работе мы продолжаем изучение свойств локальных гомеоморфизмов, при которых модуль образа семейств кривых порядка p, $n-1<p\leq n$, мажорируется некоторым интегралом, содержащим произвольную допустимую метрику и измеримую функцию. Идея доказательства основного результата настоящей статьи восходит к [10]. Как оказалось, наличие универсального радиуса инъективности отображений имеет место не только в случае, когда конформный модуль семейств кривых при отображении искажается ограниченное число раз, но и в некотором значительно более общем случае. Именно, указанный результат остается справедливым в случае,

когда модуль семейств кривых имеет произвольный порядок $p \in (n-1, n]$, а вместо правой части известного условия квазиинвариантности p-модуля $M_p(f(\Gamma)) \leq K M_p(\Gamma)$ отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет в некоторой фиксированной точке $x_0 \in D$ более общему соотношению вида

$$M_p\Big(f\big(\Gamma(S_1, S_2, A)\big)\Big) \leq \int\limits_A Q(x)\eta^p\big(|x - x_0|\big)\, dm(x), \tag{1}$$

где $A = A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon r_1 < |x-x_0| < r_2|\}$, $S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x-x_0| = r_i\}$, $i = 1, 2$, $0 < r_1 < r_2 < r_0 := \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$, $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ — произвольная измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1. \tag{2}$$

При этом функция Q в окрестности точки x_0 должна „не очень сильно расти”, что в указанном выше утверждении предполагает наличие дополнительных ограничений аналитического характера. Отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условиям вида (1), (2), будем называть *кольцевым* (p, Q)*-отображением* в точке x_0 (в частности, если f — локальный гомеоморфизм, то будем говорить, что f — *локальный кольцевой* (p, Q)*-гомеоморфизм* в точке x_0, см. [3, 14]). Отметим, что условие $M_p(f(\Gamma)) \leq K M_p(\Gamma)$, получающееся из (1) при $Q(x) \equiv K$, характеризует квазиконформность при $p = n$ и квазиизометрию при $p \neq n$ (см. [15 – 17]), так что отображения, удовлетворяющие неравенству (1) при неограниченных Q, можно было бы также назвать обобщенными квазиизометриями в указанном смысле.

Пусть

$$q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{|x-x_0|=r} Q(x)\, d\mathcal{H}^{n-1},$$

где $\mathcal{H}^{n-1}$ — нормированная $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $p \in (n-1, n]$, $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, — *локальный кольцевой* (p, Q)*-гомеоморфизм в точке* $x_0 = 0$, *такой, что* $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B}^n)$. *Если*

$$\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_0^{\frac{1}{p-1}}(t)} = \infty, \tag{3}$$

то отображение f *инъективно в некотором шаре* $B\left(0, \delta(n, Q, p)\right)$, *где* δ — *положительное число, зависящее только от* n, p *и функции* Q. *Обратно, для каждого* $\delta > 0$ *и функции* $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B}^n)$ *такой, что* $Q(x) \geq 1$ *почти всюду и*

$$\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_0^{\frac{1}{p-1}}(t)} < \infty, \tag{4}$$

найдется локальный кольцевой (p, Q)*-гомеоморфизм* $f = f_Q\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ *в точке* $x_0 = 0$, *не являющийся инъективным в шаре* $B(0, \delta)$.

***Следствие* 1.** *Теорема* 1 *остается справедливой, если вместо условия* (3) *при любом* $p \in \in (n-1, n]$ *потребовать выполнения условия*

$$\int\limits_0^1 \frac{dt}{tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)} = \infty, \tag{5}$$

а вместо (4) — *условия*

$$\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_0^{\frac{1}{n-1}}(t)} < \infty. \tag{6}$$

2. Основная лемма. Следующая лемма несет в себе главную смысловую нагрузку, относящуюся к основным результатам настоящей работы.

Лемма 1. *Пусть* $p \in (n-1, n]$. *Предположим, что* $n \geq 3$, $Q\colon \mathbb{B}^n \to [0, \infty]$ — *измеримая по Лебегу функция и* $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ — *локальный кольцевой* (p, Q)*-гомеоморфизм в точке* $x_0 = 0$. *Предположим, что найдутся измеримая по Лебегу функция* $\psi\colon (0,1) \to [0, \infty]$ *и постоянная* $C = C(n, p, Q, \psi)$ *такие, что*

$$0 < I(r_1, r_2) := \int\limits_{r_1}^{r_2} \psi(t)\, dt < \infty \quad \forall\, r_1, r_2 \in (0,1) \tag{7}$$

и при некотором $\alpha > 0$

$$\int\limits_{r_1<|x|<r_2} Q(x) \psi^p(|x|)\, dm(x) \leq C I^{p-\alpha}(r_1, r_2). \tag{8}$$

Если

$$I(0,1) := \int\limits_0^1 \psi(t) dt = \infty, \tag{9}$$

то отображение f *инъективно в некотором шаре* $B\big(0, \delta(n, p, Q, \psi)\big)$, *где* δ — *положительное число, зависящее только от* n, p *и функций* Q *и* ψ.

Доказательство. *Шаг* 1. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $f(0) = 0$. Пусть $r_0 = \sup\{r \in \mathbb{R}\colon r > 0, \overline{U(0,r)} \subset \mathbb{B}^n\}$, где $U(0,r)$ обозначает компоненту связности множества $f^{-1}(B(0,r))$, содержащую точку 0. Очевидно, что $r_0 > 0$. Зафиксируем число $r < r_0$ и положим $U = U(0,r)$,

$$l^* = l^*(0, f, r) = \inf \big\{|z|\colon z \in \partial U\big\},$$

$$L^* = L^*(0, f, r) = \sup \big\{|z|\colon z \in \partial U\big\}.$$

По лемма 3.1 гл. III [6] f отображает множество $\overline{U}$ на $\overline{B(0,r)}$ гомеоморфно. Следовательно, f инъективно в шаре $B(0, l^*)$ и, значит, достаточно найти нижнюю границу для величины l^*.

Шаг 2. Заметим, что $L^* \to 1$ при $r \to r_0$. Действительно, пусть $L^* \not\to 1$ при $r \to r_0$.

2.1. Заметим, что $U(0,r_1) \subset U(0,r_2)$ при $0 < r_1 < r_2 < r_0$. Действительно, если бы нашелся элемент $x \in U(0,r_1) \setminus U(0,r_2)$, то, поскольку $f(U(0,r_i)) = B(0,r_i)$, $i = 1,2$, мы бы имели $f(x) = y \in B(0,r_1)$ и $f(z) = y \in B(0,r_1)$, $z \in U(0,r_2)$, $z \neq x$. Однако это противоречит лемме 3.3 гл. III [6], так как по этой лемме f должно гомеоморфно отображать объединение множеств $U(0,r_1) \cup U(0,r_2)$.

2.2. Из пункта 2.1 следует, что функция L^* возрастает по r и, следовательно, существует предел величины L^* при $r \to r_0$. Тогда $L^* \to \varepsilon_0$ при $r \to r_0$, где $\varepsilon_0 \in (0,1)$. В таком случае все множества $U(0,r)$, $0 < r < r_0$, лежат в фиксированном шаре $B(0,\varepsilon_0)$.

2.3. Заметим, что $B(0,r_0) \subset f(B(0,\varepsilon_0))$. Действительно, пусть $y \in B(0,r_0)$, тогда также $y \in B(0,r_1)$ при некотором $r_1 \in (0,r_0)$. Отсюда следует, что найдется $x \in U(0,r_1)$ такой, что $f(x) = y$, следовательно, $y \in f(B(0,\varepsilon_0))$, т. е. $B(0,r_0) \subset f(B(0,\varepsilon_0))$.

2.4. Заметим, что $\overline{B(0,r_0)} \subset f(\overline{B(0,\varepsilon_0)})$ и, вследствие локальной гомеоморфности отображения f, при произвольном $\varepsilon_1 \in (\varepsilon_0,1)$ множество $f(B(0,\varepsilon_1))$ содержит некоторую окрестность множества $\overline{B(0,r_0)}$. Значит, компонента связности $U(0,r_0)$ лежит внутри замкнутого шара $\overline{B(0,\varepsilon_0)}$, что противоречит определению величины r_0. Противоречие, полученное выше, означает, что $L^* \to 1$ при $r \to r_0$, что и требовалось установить.

Шаг 3. Выберем x и $y \in \partial U$ так, что $|x| = L^*$ и $|y| = l^*$. По определению множества U имеем $f(x)$, $f(y) \in S(0,r)$. По лемме 3.1 [10] найдется точка $p_0 \in B(0,r)$ такая, что для каждого $t \in \left(\dfrac{r}{2}, \dfrac{\sqrt{3}r}{2}\right)$ элемент $f(x) \in B(p_0,t)$ и либо $0 \in B(p_0,t)$ и $f(y) \notin B(p_0,t)$, либо $0 \notin B(p_0,t)$ и $f(y) \in B(p_0,t)$. Зафиксируем какое-нибудь такое t. Заметим, что 0 и $f(y)$ принадлежат $\overline{f(B(0,l^*))}$ и, следовательно, $f(B(0,l^*)) \cap B(p_0,t) \neq \varnothing \neq f(B(0,l^*)) \setminus B(p_0,t)$. Поскольку множество $f(B(0,l^*))$ связно, найдется точка $z_t \in S(p_0,t) \cap f(B(0,l^*))$ (см. [18], теорема 1, разд. I, § 46, гл. 5).

Пусть z_t^* — единственная точка множества $f^{-1}(z_t) \cap B(0,l^*)$, $C_t(\varphi) \subset S(p_0,t)$ — сферическая шапочка с центром в точке z_t и раствором угла φ, определенная равенством

$$C_t(\varphi) = \left\{y \in \mathbb{R}^n : |y - p_0| = t, (z_t - p_0, y - p_0) > t^2 \cos\varphi\right\}.$$

Обозначим символом φ_t точную верхнюю грань тех углов φ, для которых компонента связности множества $f^{-1}(C_t(\varphi))$, содержащая точку z_t^*, отображается гомеоморфно на множество $C_t(\varphi)$. Обозначим $C_t = C_t(\varphi_t)$ и через C_t^* компоненту связности множества $f^{-1}(C_t)$, содержащую точку z_t^*.

Шаг 4. Покажем, что множества C_t^* и $S(0,L^*)$ имеют общую точку. Предположим противное.

4.1. Поскольку множество C_t^* связно и $C_t^* \cap B(0,L^*) \neq \varnothing$, отсюда следует, что $C_t^* \subset$ $\subset B(0,L^*)$ (см. [18], теорема 1, разд. I, § 46, гл. 5). Заметим, что в таком случае множество $\overline{C_t^*}$ является компактным подмножеством U. По лемме 3.1 гл. III [6] отображение f переводит $\overline{C_t^*}$ на $\overline{C_t}$ гомеоморфно (что не является верным при $n = 2$, так как множество $C_t(\pi)$ не является относительно локально связным в этом случае). По лемме 3.2 гл. III [6] отображение f инъективно в некоторой окрестности множества $\overline{C_t^*}$. Следовательно, $\varphi_t = \pi$, $\overline{C_t} = S(p_0,t)$ и $\overline{C_t^*}$ топологически эквивалентно $(n-1)$-мерной сфере в $\mathbb{R}^n$. Заметим, что ограниченная компонента связности D множества $\mathbb{R}^n \setminus \overline{C_t^*}$ содержится в $B(0, L^*)$. Тогда $\overline{f(D)}$ — компактное подмножество $f(\mathbb{B}^n)$ и, поскольку f — открытое отображение, $\partial f(D) \subset f(\partial D)$.

4.2. Покажем, что $f(D) \subset B(p_0, t)$. Предположим противное, тогда найдется $y \in f(D) \setminus \overline{B(p_0, t)}$. В таком случае $\left(f(\mathbb{B}^n) \setminus \overline{B(p_0, t)}\right) \cap f(D) \neq \varnothing$. Поскольку $f(D)$ — компактная подобласть $f(\mathbb{B}^n)$, имеем $\left(f(\mathbb{B}^n) \setminus \overline{B(p_0, t)}\right) \setminus f(D) \neq \varnothing$. Так как $f(\mathbb{B}^n) \setminus \overline{B(p_0, t)}$ связно, отсюда следует, что найдется $z \in \partial f(D) \cap \left(f(\mathbb{B}^n) \setminus \overline{B(p_0, t)}\right)$ (см. [18], теорема 1, разд. I, § 46, гл. 5), что противоречит включению $\partial f(D) \subset B(p_0, t)$. Таким образом, включение $f(D) \subset B(p_0, t)$ установлено.

4.3. Заметим, что $B(p_0, t) \subset f(D)$. Действительно, пусть найдется $a \in B(p_0, t) \setminus f(D)$. Поскольку множество $B(p_0, t)$ связно и $B(p_0, t) \cap f(D) \neq \varnothing$, отсюда следует, что $\partial f(D) \cap \cap B(p_0, t) \neq \varnothing$ (см. [18], теорема 1 разд. I, § 46, гл. 5). Последнее противоречит включению $\partial f(D) \subset S(p_0, t)$.

4.4. Таким образом, из включений $f(D) \subset B(p_0, t)$ и $B(p_0, t) \subset f(D)$, установленных выше в пунктах 4.2 и 4.3, следует, что $f(D) = B(p_0, t)$. По определению область D является компонентой связности множества $f^{-1}(B(p_0, t))$. В силу леммы 3.1 гл. III [6] отображение f переводит $\overline{D}$ на $\overline{B(p_0, t)}$ гомеоморфно.

4.5. Поскольку $z_t^* \in \overline{C_t^*} \cap U$, имеем $\overline{D} \cap \overline{U} \neq \varnothing$. Так как f гомеоморфно отображает $\overline{U}$ на $\overline{B(0, r)}$, отображение f инъективно в $\overline{U} \cup \overline{D}$ по лемме 3.3 гл. III [6]. Последнее невозможно, поскольку из равенства $f(D) = B(p_0, t)$ и того, что $f(x) \in B(p_0, t)$, следует существование точки $x_1 \neq x$, $x_1 \in D$, такой, что $f(x_1) = f(x)$. Следовательно, множества C_t^* и $S(0, L^*)$ имеют непустое пересечение, что и требовалось показать.

Шаг 5. Пусть $k_t^* \in C_t^* \cap S(0, L^*)$ и $k_t = f(k_t^*)$. Обозначим через Γ_t' семейство всех кривых, соединяющих точки k_t и z_t в C_t. Пусть Γ' — объединение семейств кривых Γ_t', $t \in \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}\right)$. Обозначим через f_t сужение отображения f на множество C_t^*. Тогда f_t гомеоморфно отображает C_t^* на C_t. Обозначим

$$\Gamma = \bigcup_{t \in \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}\right)} \left\{ f_t^{-1} \circ \gamma \colon \gamma \in \Gamma_t' \right\}.$$

Заметим, что при каждом $t \in \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}\right)$ $z_t^* \in B(0, l^*)$ и $k_t \in S(0, L^*)$. Тогда по определению кольцевого Q-отображения в точке 0 для каждой измеримой по Лебегу функции $\eta\colon (l^*, L^*) \to \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{l^*}^{L^*} \eta(r)dr \geq 1, \tag{10}$$

выполняется неравенство

$$M_p\left(f\Big(\Gamma\big(S(0, l^*), S(0, L^*), A(0, l^*, L^*)\big)\Big)\right) \leq \int\limits_{A(0, l^*, L^*)} Q(x)\eta^p\big(|x|\big)dm(x). \tag{11}$$

Пусть $\eta(t) = \psi(t)/I(l^*, L^*)$, где ψ — функция из условия леммы. Заметим, что выбранная таким образом функция η удовлетворяет соотношению (10). Тогда из условий (8) и (11) следует, что

$$M_p(\Gamma') \le M_p\Big(f\Big(\Gamma\big(S(0,l^*), S(0,L^*), A(0,l^*,L^*)\big)\Big)\Big) \le$$

$$\le \int\limits_{A(0,l^*,L^*)} Q(x)\eta^p\big(|x|\big)dm(x) \le C/I^\alpha(l^*,L^*). \tag{12}$$

Шаг 6. Пусть $p = n$. По теореме 10.2 [19]

$$\int\limits_{S(p_0,t)} \rho^n(x)dS \ge \frac{C_n'}{t} \tag{13}$$

для каждой функции $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma_t'$ и некоторой положительной постоянной C_n'. Интегрирование неравенства (13) по всем указанным выше значениям $t \in \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}\right)$ и применение теоремы Фубини (см. [20], теорема 8.1, гл. III) приводит к неравенству

$$M(\Gamma') \ge C_n, \tag{14}$$

где постоянная C_n зависит только от n. Из (12) и (14) следует, что

$$C_n \le C/I^\alpha(l^*,L^*) \le C/I^\alpha(l^*(0,f,r_0), L^*(0,f,r)), \tag{15}$$

так как $I(\varepsilon_1,\varepsilon_2) > I(\varepsilon_3,\varepsilon_2)$ при $\varepsilon_3 > \varepsilon_1$. Переходя к пределу в (15) при $r \to r_0$, получаем

$$C_n \le C/I^\alpha(l^*(0,f,r_0), 1). \tag{16}$$

Заметим, что из (16) следует неравенство $I(\varepsilon, 1) < \infty$ при каждом $\varepsilon \in (0,1)$. Пусть $l^*(0,f,r_0) \to$ $\to 0$. Тогда из (9) следует, что правая часть соотношения (16) стремится к нулю, что противоречит (16). Следовательно, $l^*(0,f,r_0) \ge \delta$ для всех рассматриваемых f. Доказательство в случае $p = n$ завершено.

Шаг 7. Пусть $p \in (n-1, n)$. Согласно следствию 2 [21, с. 513],

$$\int\limits_{S(p_0,t)} \rho^p(x)dS \ge \frac{b_{n,p}}{t^{p-n+1}}. \tag{17}$$

Интегрирование неравенства (17) по всем указанным выше значениям $t \in \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}\right)$ и применение теоремы Фубини (см. [20], теорема 8.1, гл. III) приводит к неравенству

$$M_p(\Gamma') \ge C_{n,p} r^{p-n}, \tag{18}$$

где постоянная $C_{n,p}$ зависит только от n и p. Из (12) и (18) следует, что

$$C_{n,p} r^{p-n} \le C/I^\alpha(l^*,L^*) \le C/I^\alpha(l^*(0,f,r_0), L^*(0,f,r)), \tag{19}$$

так как $I(\varepsilon_1,\varepsilon_2) > I(\varepsilon_3,\varepsilon_2)$ при $\varepsilon_3 > \varepsilon_1$. Переходя к пределу в (19) при $r \to r_0$, получаем

$$C_{n,p} r_0^{p-n} \leq C / I^{\alpha}(l^*(0, f, r_0), 1). \tag{20}$$

Заметим, что из (20) следует неравенство $I(\varepsilon, 1) < \infty$ при каждом $\varepsilon \in (0, 1)$. Пусть $l^*(0, f, r_0) \to \to 0$. Тогда из (9) следует, что правая часть соотношения (16) стремится к нулю, что противоречит (20). Следовательно, $l^*(0, f, r_0) \geq \delta$ для всех рассматриваемых f. Доказательство в случае $p \in (n-1, n)$ также завершено.

Лемма доказана.

3. Основные результаты и следствия. ***Доказательство теоремы*** **1.** Как обычно, мы придерживаемся соотношений: $a/\infty = 0$ при $a \neq \infty$, $a/0 = \infty$ при $a > 0$ и $0 \cdot \infty = 0$ (см. [20, с. 18], § 3, гл. I).

Полагаем

$$I = I(r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_0^{\frac{1}{p-1}}(r)}. \tag{21}$$

Для произвольных $0 < r_1 < r_2 < r_0 = 1$ рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 / \left[t^{\frac{n-1}{p-1}} q_0^{\frac{1}{p-1}}(t) \right], & t \in (r_1, r_2), \\ 0, & t \notin (r_1, r_2). \end{cases} \tag{22}$$

Заметим, что функция ψ удовлетворяет всем условиям леммы 1. В частности, по теореме 3 [22] для конденсатора $E = \left(B(0, r_2), \overline{B(0, r_1)} \right)$, $0 < r_1 < r_2 < 1$, имеем

$$\operatorname{cap}_p f(E) \leq \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}, \tag{23}$$

где I задано в (21), так что $\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_0^{\frac{1}{p-1}}(t)} < \infty$. (В противном случае из (23) следует, что множество $f(\overline{B(0, r_1)})$ имеет p-емкость нуль, но тогда $\operatorname{Int} f(\overline{B(0, r_1)}) = \varnothing$ (см. [6], следствие 1.16, гл. VII), что невозможно вследствие локальной гомеоморфности (открытости) отображения f.)

По теореме Фубини (см. [20], теорема 8.1, гл. III) имеем $\displaystyle\int_{r_1 < |x| < r_2} Q(x) \psi^p(|x|) \, dm(x) = = \omega_{n-1} I(r_1, r_2)$. Таким образом, первая часть теоремы 1 следует из леммы 1.

Для доказательства второй части теоремы выберем $\delta > 0$ и произвольную функцию $Q \in \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{B}^n)$, $Q \geq 1$ почти всюду. Для удобства обозначим

$$\varphi_p(s) = \left(1 + \frac{n-p}{p-1} \int\limits_s^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} \widetilde{q}_0^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{\frac{p-1}{p-n}}, \quad p \in (1, n),$$

и

$$\varphi_n(s) = \exp \left\{ - \int\limits_s^1 \frac{dt}{t \widetilde{q}_0^{\frac{1}{n-1}}(t)} \right\},$$

где

$$\widetilde{q}_0(r) := \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \int\limits_{|x|=r} \widetilde{Q}(x)\, dS,$$

$$\widetilde{Q}(x) = \begin{cases} Q(x), & |x| > \delta, \\ 1/K, & |x| \le \delta, \end{cases}$$

а постоянная величина $K \ge 1$ будет выбрана ниже. Полагаем

$$f_p(x) = \frac{x}{|x|}\varphi_p(|x|), \quad f_p(0) = 0. \tag{24}$$

Заметим, что отображения $f_p(x)$ являются гомеоморфизмами, поскольку выбранные таким образом функции $\varphi_p(s)$ строго возрастают по s. Покажем, что определенные таким образом отображения f_p также являются кольцевыми $(p, \widetilde{Q})$-отображениями в точке $x_0 = 0$. Для этого при произвольных $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ и $0 < r_1 < r_2 < 1$ рассмотрим конденсатор вида $E = \left(B(0, r_2), \overline{B(0, r_1)}\right)$. Заметим, что на основании изложенного выше

$$f_p(E) = \left(B(0, \varphi_p(r_2)), \overline{B(0, \varphi_p(r_1))}\right)$$

и p-емкость конденсатора $f_p(E)$ вычисляется в явном виде (см., например, [16, с. 177], соотношение (2), и [19], разд. 7.5), а именно,

$$\operatorname{cap}_p f_p(E) = \omega_{n-1}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1-p}\left(\varphi_p^{\frac{p-n}{p-1}}(r_1) - \varphi_p^{\frac{p-n}{p-1}}(r_2)\right)^{1-p}, \quad p \in (1, n), \tag{25}$$

$$\operatorname{cap}_n f_n(E) = \frac{\omega_{n-1}}{\left(\log\frac{\varphi_n(r_2)}{\varphi_n(r_1)}\right)^{n-1}}. \tag{26}$$

Подставляя в (25) и (26) значения φ_p, определенные выше, как при $p \in (1, n)$, так и при $p = n$, получаем

$$\operatorname{cap}_p f_p(E) = \omega_{n-1}/I^{p-1},$$

где I определено соотношением вида (21). Следовательно, в силу теоремы 3 [22] гомеоморфизмы f_p, определенные соотношениями (24), являются кольцевыми $(p, \widetilde{Q})$-отображениями в точке $x_0 = 0$. Значит, f_p — кольцевой (p, Q)-гомеоморфизм в нуле, так как $\widetilde{Q}(x) \le Q(x)$ почти всюду по построению.

Заметим, что при $\delta \to 0$ образ $f_p(B(0,\delta))$ шара $B(0,\delta)$ при отображении f_p содержит шар $B(0,\sigma)$, где σ может быть выбрано не зависящим от δ. Отобразим теперь шар $B(0,\sigma)$ с помощью некоторого отображения g, которое преднамеренно выберем отображением с ограниченным искажением с постоянной квазиконформности $K \ge 1$, являющимся локальным гомеоморфизмом и не являющимся инъективным в шаре $B(0,\sigma)$. Например, в качестве g можно выбрать так называемое закручивание вокруг оси, ось вращения которого не содержится в шаре $\mathbb{B}^n = f_p(B(0,1))$ (см. [23], разд. 5.2, гл. I). Заметим, что постоянная квазиконформности K не зависит от δ. Таким образом, нами построен локальный кольцевой $KQ(x)$-гомеоморфизм f_2 в нуле, $f_2 = g \circ f_p$, не являющийся инъективным в шаре $B(0, \delta)$. Поскольку Q — произвольная локально интегрируемая функция, удовлетворяющая условиям $Q \geq 1$ и (4), мы можем заменить Q на Q/K в первой части доказательства. Таким образом, мы получили локальный кольцевой $Q(x)$-гомеоморфизм в нуле с требуемыми свойствами.

Теорема 1 доказана.

***Доказательство следствия* 1** вытекает из утверждения теоремы 1. Действительно, по неравенству Гельдера

$$\widetilde{I} := \int\limits_0^1 \frac{dt}{tq_0^{\frac{1}{n-1}}(t)} \leq I^{\frac{p-1}{n-1}},$$

где I задается соотношением (21), так что из расходимости $\widetilde{I}$ следует расходимость I в (21). Если же $Q \geq 1$, то имеем

$$I = \int\limits_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_0^{\frac{1}{p-1}}(t)} \leq \int\limits_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_0^{\frac{1}{n-1}}(t)},$$

так что из конечности интеграла в (6) следует конечность интеграла I.

Следствие 1 доказано.

Следствие 2. *Пусть* $p \in (n-1, n]$, $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, — *локальный кольцевой* (p, Q)-*гомеоморфизм в точке* $x_0 = 0$, *такой, что* $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B}^n)$. *Если при* $r \to 0$

$$q_0(r) \leq C \log^{n-1} \frac{1}{r}, \tag{27}$$

то отображение f *инъективно в некотором шаре* $B\left(0, \delta(n, Q, p)\right)$, *где* δ — *положительное число, зависящее только от* n, p *и функции* Q.

Доказательство. Утверждение непосредственно вытекает из следствия 1, так как из соотношения (27) следует выполнение соотношения (5).

Дальнейшее изложение связано со свойствами функций конечного среднего колебания, определение и примеры которых могут быть найдены в [2] (разд. 6.1, гл. 6) (см. также [24]). Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $g : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, — *локальный кольцевой* Q-*гомеоморфизм в точке* $x_0 = 0$, *такой, что* $Q \in FMO(0)$. *Тогда отображение* g *инъективно в некотором шаре* $B\left(0, \delta(n, Q)\right)$, *где* δ — *некоторое положительное число, зависящее только от* n *и функции* Q.

Доказательство. Заметим, что согласно лемме 6.1 [2] найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$\int\limits_{B(0,\varepsilon_0)} \frac{Q(x)\, dm(x)}{\left(|x| \log \frac{1}{|x|}\right)^n} < \infty. \tag{28}$$

Рассмотрим отображение $f := g(x\varepsilon_0)$, $x \in \mathbb{B}^n$. Заметим, что g является локальным кольцевым $Q(\varepsilon_0 x)$-гомеоморфизмом в нуле. Применим лемму 1 для отображения g и функции

$\psi = \dfrac{1}{(\varepsilon_0 t)^{n/p}\log^{n/p}\dfrac{1}{\varepsilon_0 t}}$. Согласно (28) для указанной выше функции выполнено соотношение (8) при $\alpha = p$, кроме того, выполнены также соотношения (7) и (9). Необходимое заключение следует из леммы 1.

Теорема 2 доказана.

4. Заключительные замечания. Ограничение $n \geq 3$, содержащееся во всех основных утверждениях работы, является существенным. Пример последовательности отображений $f_j(z) = e^{jz}$, соответствующих случаю $p = n = 2$, не имеющих универсального радиуса инъективности ни в какой точке плоскости $\mathbb{C}$, показывает, что ни одно из заключений статьи не является справедливым при $n = 2$.

Несколько более непростым в этом плане является случай $n = 2$ и $1 < p < 2$. Рассмотрим последовательность отображений $f_m(z) = (z-1)^m/c_m$, $c_m = m\cdot 2^{m-1}$, $z \in \mathbb{B}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Тогда нетрудно видеть, что $l(f_m'(z)) := \inf_{|h|=1} |f_m'(z)\cdot h| = m|z-1|^{m-1}/c_m$ и $J(z, f_m) = \det f_m'(z) = (m|z-1|^{m-1}/c_m)^2$. Таким образом, так называемая *внутренняя дилатация порядка* p, определяемая в регулярных точках равенством $K_{I,p}(z, f_m) = |J(z, f_m)|/l^p(f_m'(z))$, равна $(m|z-1|^{m-1}/c_m)^{(2-p)}$. Как и при доказательстве теоремы 8.6 [2] (а также теоремы 1.1 [25]), можно показать, что последовательность локальных гомеоморфизмов $f_m : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{C}$ удовлетворяет в точке $z_0 = 0$ неравенству (1) при $Q = K_{I,p}(z, f_m) \leq 1$. Однако ясно, что для выбранной последовательности f_m универсального радиуса инъективности в окрестности нуля не существует. Таким образом, основные утверждения статьи при $n = 2$ и $1 < p < 2$ не имеют места.

1. *Gutlyanskii V. Ya., Ryazanov V. I., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation: a geometric approach // Develop. Math. – New York etc.: Springer, 2012. – **26**.
2. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Sci. + Business Media, LLC, 2009.
3. *Севостьянов Е. А.* О некоторых свойствах обобщенных квазиизометрий с неограниченной характеристикой // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 3. – С. 385 – 398.
4. *Зорич В. А.* Теорема М. А. Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства // Мат. сб. – 1967. – **116**, № 3. – С. 415 – 433.
5. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Topological and metric properties of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1971. – **488**. – P. 1 – 31.
6. *Rickman S.* Quasiregular mappings // Res. Math. and Relat. Areas. – 1993. – **26**, № 3.
7. *Perović M.* On the problem of radius of injectivity for the mappings quasiconformal in the mean // Glas. Mat. Ser. III. – 1985. – **20(40)**, № 2. – P. 345 – 348.
8. *Martio O., Srebro U.* Locally injective automorphic mappings in $\mathbb{R}^n$ // Math. scand. – 1999. – **85**, № 1. – P. 49 – 70.
9. *Семенов В.И.* Интегральное условие локальной гомеоморфности отображений с обобщенными производными // Сиб. мат. журн. – 1999. – **40**, № 6. – С. 1339 – 1346.
10. *Koskela P., Onninen J., Rajala K.* Mappings of finite distortion: injectivity radius of a local homeomorphism. – Jyväskylä, 2002. – P. 7. – (Preprint / Univ. Jyväskylä, № 266).
11. *Cristea M.* Local homeomorphisms having local ACL^n inverses // Complex Var. and Ellipt. Equat. – 2008. – **53**, № 1. – P. 77 – 99.
12. *Gutlyanskiĭ V. Ya., Martio O., Ryazanov V. I., Vuorinen M.* On convergence theorems for space quasiregular mappings // Forum Math. – 1998. – **10**, № 3. – P. 353 – 375.
13. *Bishop C. J., Gutlyanskiĭ V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397 – 1420.

14. *Golberg A.* Differential properties of (α, Q)-homeomorphisms // Further Progr. Anal. – 2009. – P. 218 – 228.
15. *Полецкий Е. А.* Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Мат. сб. – 1970. – **83**, № 2. – С. 261 – 272.
16. *Gehring F.* Lipschitz mappings and p-capacity of rings in n-space // Ann. Math. Stud. – 1971. – **66**. – P. 175 – 193.
17. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. – М.: Наука, 1983.
18. *Куратовский К.* Топология. – М.: Мир, 1969. – Т. 2.
19. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971. – **229**.
20. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
21. *Caraman P.* Relations between p-capacity and p-module (I) // Rev. roum. math. pures et appl. – 1994. – **39**, № 6. – P. 509 – 553.
22. *Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* Аналоги леммы Икома – Шварца и теоремы Лиувилля для отображений с неограниченной характеристикой // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 10. – С. 1368 – 1380.
23. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982.
24. *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395 – 417.
25. *Salimov R. R., Sevost'yanov E. A.* The Poletskii and Väisälä inequalities for the mappings with (p, q)-distortion // Complex Var. and Ellipt. Equat. – 2014. – **59**, № 2. – P. 217 – 231.

Получено 07.11.13