УДК 517.956

Т. О. Дерев'янко, В. М. Кирилич (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОЮ СИСТЕМОЮ НАПІВЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З НЕСКІНЧЕННИМ ГОРИЗОНТОМ ПЛАНУВАННЯ

We establish necessary conditions for the optimality of smooth boundary and initial controls over a semilinear first-order hyperbolic system. The problem adjoint to the original problem is a semilinear hyperbolic system without initial conditions. The suggested approach is based on the use of a special variation of the continuously differentiable control. The existence of global generalized solution of a semilinear first-order hyperbolic system in a domain unbounded in time is proved. The proof is based on the use of the principle of contractive mappings and a space metric with weight functions.

Установлены необходимые условия для задачи оптимального управления полулинейной гиперболической системой. Сопряженная задача к исходной является полулинейной гиперболической задачей без начальных условий. Предложенный подход основан на использовании специальной вариации непрерывно дифференцированного управления. Доказано существование глобального решения смешанной задачи для полулинейной гиперболической системы в неограниченной по времени полосе. При доказательстве соответствующих теорем использован принцип сжимающих отображений и метрики с весовыми функциями.

1. Вступ. Задачі оптимального керування гіперболічними системами рівнянь першого порядку моделюють різноманітні процеси природознавства та техніки [1 – 3]. В роботі [1] динамічні процеси, що описані напівлінійними системами гіперболічних рівнянь першого порядку, розглядалися в обмеженій області. Обмеженість просторової змінної зумовлена реальними інтерпретаціями, наприклад віком у математичній моделі керування популяцією з віковою структурою та профілем гравітаційної хвилі [1, 2]. Однак керування довготривалими процесами також становлять науковий інтерес і частково були розглянуті, зокрема, в роботах [2, 3].

Метою даної статті є встановлення необхідних умов оптимальності для задачі оптимального керування гіперболічною системою рівнянь першого порядку з нескінченним горизонтом планування (необмеженість процесу в часі).

За допомогою теореми Банаха про нерухому точку з використанням метрики з ваговими функціями [4] встановлено існування узагальненого розв'язку мішаної гіперболічної задачі на необмеженому часовому проміжку. Зазначимо, що для спряженої системи задачі оптимального керування початкову умову не задано, а задано лише поведінку її розв'язку на нескінченності. Задачі подібного типу досліджувалися в роботах [5, 6]. Використану тут методику застосовано в роботі [7] для оптимального керування системами звичайних диференціальних рівнянь.

2. Формулювання задачі. В області $(x,t) \in \Pi = (0,l)\times(0,+\infty)$ розглянемо деякий процес $y = y(x,t)$, еволюцію якого в часі та просторі описуємо напівлінійною системою гіперболічних рівнянь першого порядку

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + \lambda(x,t)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = f(y(x,t),x,t), \tag{1}$$

де $y\colon \Pi \to \mathbb{R}^n$ — вектор-функція розв'язку, λ — відображення з $\overline{\Pi}$ на простір діагональних дійснозначних $(n\times n)$-матриць

$$\lambda(x,t) = \operatorname{diag}(\lambda_1(x,t), \lambda_2(x,t), \ldots, \lambda_n(x,t))$$

і $f: \mathbb{R}^n \times \Pi \to \mathbb{R}^n$ — задана нелінійна вектор-функція.

Зауважимо, що в одновимірному випадку довільну напівлінійну гіперболічну систему першого порядку з не діагональною характеристичною матрицею можна завжди звести до напівлінійної гіперболічної системи з діагональною характеристичною матрицею [8, с. 22].

Розглянемо множини

$$I = \{1, 2, \ldots, n\},$$

$$I_0 = \{i \in I | \lambda_i(x,t) > 0,\ (x,t) \in \overline{\Pi}\},$$

$$I_l = \{i \in I | \lambda_i(x,t) < 0,\ (x,t) \in \overline{\Pi}\},$$

для яких $m_1 = \operatorname{card}(I_0)$, $m_2 = \operatorname{card}(I \backslash I_l)$. Тобто без обмеження загальності будемо вважати, що перші m_1 власних значень є додатними, наступні $m_2 - m_1$ — нульовими, а решта $n - m_2$ — від'ємними.

Для системи (1) задамо початкові та крайові умови:

$$y(x,0) = y^0(u(x),x),\ x \in [0,l], \tag{2}$$

$$y_+(0,t) = \gamma^0(y_-(0,t), u^{(1)}(t), t),\ t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

$$y_-(l,t) = \gamma^l(y_+(l,t), u^{(2)}(t), t),\ t \in \mathbb{R}_+. \tag{4}$$

Тут u, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ — керуючі впливи такі, що для компактів U, U^1, U^2, $u: [0,l] \to U$, $U \subset \mathbb{R}^r (r \in \mathbb{N})$, $u^{(1)}: \mathbb{R}_+ \to U^1$, $U^1 \subset \mathbb{R}^{r_1}$, $r_1 \in \mathbb{N}$, $u^{(2)}: \mathbb{R}_+ \to U^2$, $U^2 \subset \mathbb{R}^{r_2}$, $r_2 \in \mathbb{N}$, $y^0: U \times [0,l] \to \mathbb{R}^n$; $y_+: \overline{\Pi} \to \mathbb{R}^{m_1}$, $y_-: \overline{\Pi} \to \mathbb{R}^{n-m_2}$ — підвектори вектора y, що відповідають відповідним додатним та від'ємним власним значенням характеристичної матриці системи (1) (аналогічні позначення використовуватимемо далі для інших функцій); $\gamma^0: \mathbb{R}^{n-m_2} \times U^1 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{m_1}$, $\gamma^l: \mathbb{R}^{m_1} \times U^2 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n-m_2}$.

Нехай цільовий функціонал має вигляд

$$J(u, u^{(1)}, u^{(2)}) = \int_0^{+\infty} G_0(y_-(0,t), y_+(l,t), t)dt + \iint_{\Pi} G(y(x,t), x, t)dxdt, \tag{5}$$

де $G_0: \mathbb{R}^{m_1+n-m_2} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $G: \mathbb{R}^n \times \overline{\Pi} \to \overline{\Pi}$, причому ці функції є вимірними на $[0, +\infty)$ для довільної функції y з простору $\mathcal{Q}$, який введено нижче.

***Зауваження* 1.** Підінтегральні функції G, G_0 в цільовому функціоналі (5), зазвичай, в прикладних задачах, наприклад для G, мають один із виглядів [7]:

1) $G(y,x,t) = \dfrac{1}{2} e^{-\rho_G t} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y}_i)^2$, де $\overline{y}: \overline{\Pi} \to \mathbb{R}^n$ — задана функція, ρ_G — норма дисконтування;

2) $G(y,x,t) = e^{-\rho_G t} g(y,x,t)$, де $g: \mathbb{R}^n \times \overline{\Pi} \to \overline{\Pi}$ — задана обмежена функція.

Перелічені класи функцій не вичерпують усі можливі варіанти підінтегральних функцій цільового функціонала (5). Однак підінтегральні функції цільового функціонала повинні бути подані у вигляді добутку інтегровної функції на відповідній області, яка не залежить від розв'язку задачі (1)–(4), та нелінійної функції від розв'язку тієї ж задачі, ріст якого не перевищує ріст інтегровної функції для всіх допустимих наборів керувань та відповідних розв'язків задачі (1) – (4) при $t \to \infty$.

Отже, потрібно дослідити задачу

$$\min_{u, u^{(1)}, u^{(2)}} J(u, u^{(1)}, u^{(2)}), \tag{6}$$

де мінімум береться по тих $u, u^{(1)}, u^{(2)}$, для яких існує єдиний розв'язок задачі (1) – (4) в сенсі означення 1.

3. Коректна розв'язність гіперболічної задачі. Розглянемо простір $\mathcal{U}_{ad}$, елементами якого є набори керувань $(u, u^{(1)}, u^{(2)})$, що задовольняють умови

$$u \in (C[0,l])^r, \quad u^{(1)} \in (C(\mathbb{R}_+))^{r_1}, \quad u^{(2)} \in (C(\mathbb{R}_+))^{r_2},$$

$$y_+^0(0, u(0)) = \gamma^0(y_-^0(0), u^{(1)}(0), 0), \qquad y_-^0(l, u(l)) = \gamma^l(y_+^0(l), u^{(2)}(0), 0),$$

$$\forall x \in [0,l] : u(x) \in U, \ \ \forall t \in \mathbb{R}_+ : u^{(1)}(t) \in U^1, \quad u^{(2)}(t) \in U^2.$$

Для довільного елемента $(u, u^{(1)}, u^{(2)}) \in \mathcal{U}_{ad}$ керування u, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ є неперервними, тому можна позначити

$$y^0(u(x), x) = \tilde{y}^0(x),$$

$$\gamma^0(y_-(0,t), u^{(1)}(t), t) = \tilde{\gamma}^0(y_-(0,t), t),$$

$$\gamma^l(y_+(l,t), u^{(2)}(t), t) = \tilde{\gamma}^l(y_+(l,t), t).$$

Нехай L — спільна стала Ліпшиця для функції y, тобто

$$|f_i(y^1, x, t) - f_i(y^2, x, t)| \leqslant L \max_{j \in I} |y_j^1 - y_j^2|,$$

а Λ — стала, що обмежує власні значення характеристичної матриці системи (1) за модулем:

$$\Lambda = \sup_{\substack{i \in I \\ (x,t) \in \overline{\Pi}}} |\lambda_i(x,t)|.$$

На множині $\overline{\Pi}$ для $i \in I$ визначимо функції

$$\alpha_i(x, t; a, p) = \begin{cases} e^{px(l-x)-at}, & i \in I_0, \ i \in I_l, \\ e^{px-at}, & i \in I_0, \ i \notin I_l, \\ e^{p(l-x)-at}, & i \notin I_0, \ i \in I_l, \\ e^{pl-at}, & i \notin I_0, \ i \notin I_l, \end{cases}$$

з вибраними параметрами a та p:

$$p = \max\{\ln(4L)/l, 0\} + p_0,$$

$$a = \max\left\{p\Lambda, pl\Lambda, 4L\max\{e^{pl}, e^{pl^2/4}\}\right\} + a_0,$$

у яких a_0, $p_0 > 0$ — довільно фіксовані величини.

Позначимо через $\xi = \varphi_i(\tau; x, t)$, $i \in I$, розв'язок задачі Коші

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi, \tau), \ \xi\big|_{\tau=t} = x,$$

який називатимемо характеристикою системи (1). Для всіх $(x,t) \in \overline{\Pi}$ та для довільного $i \in \in I$ існує єдина пара точок $(\varphi_i(\chi_i(x,t); x,t), \chi_i(x,t)), (\varphi_i(\nu_i(x,t); x,t), \nu_i(x,t)) \in \partial\Pi$, причому $(\varphi_i(\chi_i(x,t); x,t), \chi_i(x,t))$ — точка перетину характеристики в напрямку спадання аргумента τ, а $(\varphi_i(\nu_i(x,t); x,t), \nu_i(x,t))$ — в напрямку його зростання. Зауважимо, що для нульових власних значень ν_i може набувати значення $+\infty$.

Введемо області

$$\Pi^i = \left\{(x,t) \in \overline{\Pi} |\ \chi_i(x,t) = 0\right\}, \qquad i \in I,$$

$$\Pi^i_0 = \left\{(x,t) \in \overline{\Pi} |\ \varphi_i(\chi_i(x,t); x,t) = 0\right\}, \qquad i \in I_0,$$

$$\Pi^i_l = \left\{(x,t) \in \overline{\Pi} |\ \varphi_i(\chi_i(x,t); x,t) = l\right\}, \qquad i \in I_l.$$

Зінтегрувавши (1) вздовж характеристик, одержимо для всіх $i \in I$ систему інтегро-операторних рівнянь

$$y_i(x,t) = \mathfrak{R}_i[y](x,t) + \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i(y(\varphi_i(\tau; x,t), \tau), \varphi_i(\tau; x,t), \tau) d\tau, \tag{7}$$

де

$$\mathfrak{R}_i[y](x,t) = \begin{cases} \tilde{y}^0_i(\varphi_i(0; x,t)), & (x,t) \in \Pi^i, \\ \tilde{\gamma}^0_i(y_-(0, \chi_i(x,t)), \chi_i(x,t)), & (x,t) \in \Pi^i_0, \\ \tilde{\gamma}^l_i(y_+(l, \chi_i(x,t)), \chi_i(x,t)), & (x,t) \in \Pi^i_l. \end{cases}$$

Розглянемо метричний простір

$$\mathcal{Q} = \left\{y \in \left(C(\overline{\Pi})\right)^n \cap \left(B(\overline{\Pi})\right)^n : y_i(\varphi_i(\cdot; x,t), \cdot) \in AC\left[\chi_i(x,t), \nu_i(x,t)\right], \ i \in I, \ (x,t) \in \overline{\Pi}\right\},$$

де $B(\overline{\Pi})$ — простір обмежених функцій на множині $\overline{\Pi}$, а $AC\left[\chi_i(x,t), \nu_i(x,t)\right]$ — простір абсолютно неперервних функцій на множині $[\chi_i(x,t), \nu_i(x,t)\rangle$ (тут під $\rangle$ розумітимемо $)$ або $]$ відповідно до того, набуває чи не набуває ν_i значення $+\infty$).

Означення 1. *Під узагальненим розв'язком задачі* (1)–(4), *що відповідає набору керувань* u, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, *будемо розуміти вектор-функцію* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathcal{Q}$, *компоненти якої задовольняють систему інтегро-операторних рівнянь* (7) *в* $\overline{\Pi}$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови*:

1) $\lambda \in \left(C(\overline{\Pi}) \cap \mathrm{Lip}_x(\overline{\Pi})\right)^n, \ \sup\limits_{\substack{i \in I \\ (x,t) \in \overline{\Pi}}} |\lambda_i(x,t)| < +\infty, \ \inf\limits_{\substack{i \in I \\ (x,t) \in \overline{\Pi}}} |\lambda_i(x,t)| < +\infty;$

2) $f \in \left(C(\mathbb{R}^n \times \overline{\Pi}) \cap \mathrm{Lip}_y(\overline{\Pi})\right)^n, \ \sup\limits_{\substack{i \in I \\ (y,x,t) \in \mathbb{R}^n \times \Pi}} |f_i(y,x,t)|\, e^{-at} < +\infty;$

3) $y^0 \in (C(U \times [0,l]))^n$;

4) $\gamma^0 \in \left(C(\mathbb{R}^{n-m_2} \times U^1 \times \mathbb{R}_+) \cap \mathrm{Lip}_y(\mathbb{R}^{n-m_2} \times U^1 \times \mathbb{R}_+)\right)^{m_1}$,

$$\sup_{\substack{i \in I_0 \\ (y^-,u^{(1)},t) \in \mathbb{R}^{n-m_2} \times U^1 \times \mathbb{R}_+}} \left|\gamma_i^0(y^-, u^{(1)}, t)\right| e^{-at} < +\infty,$$

$\gamma^l \in \left(C(\mathbb{R}^{m_1} \times U^2 \times \mathbb{R}_+) \cap \mathrm{Lip}_y(\mathbb{R}^{m_1} \times U^2 \times \mathbb{R}_+)\right)^{n-m_2}$,

$$\sup_{\substack{i \in I_l \\ (y^+,u^{(2)},t) \in \mathbb{R}^{m_1} \times U^2 \times \mathbb{R}_+}} \left|\gamma_i^l(y^+, u^{(2)}, t)\right| e^{-at} < +\infty;$$

5) $u \in (C[0,l])^r$, $u^1 \in (C(\mathbb{R}_+))^{r_1}$, $u^2 \in (C(\mathbb{R}_+))^{r_2}$;

6) $y_+^0(0, u(0)) = \gamma^0(y_-^0(0), u^1(0), 0)$, $y_-^0(0, u(0)) = \gamma^l(y_+^0(l), u^2(0), 0)$ (*умови погодження нульового порядку*).

Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)–(4).

Доведення. На елементах простору $\mathcal{Q}$ визначимо метрику

$$\rho_\alpha(y^1, y^2) = \|y^1 - y^2\|_\alpha, \tag{8}$$

породжену нормою

$$\|y\|_\alpha = \sup_{\substack{i \in I \\ (x,t) \in \overline{\Pi}}} |y_i(x,t)| \alpha_i(x,t;a,p)$$

та вектор-оператор $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n)$ такий, що

$$\mathcal{A}_i[y](x,t) = \mathfrak{R}_i[y](x,t) + \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i(y(\varphi_i(\tau;x,t),\tau), \varphi_i(\tau;x,t),\tau) d\tau, \qquad i \in I.$$

Зазначимо, що введений простір $\mathcal{Q}$ є повним, доведення повноти якого з незначними змінами повторює доведення повноти простору неперервних і обмежених функцій на необмеженій множині з рівномірною метрикою [9, с. 504]. З припущень 2 та 4 отримаємо обмеженість оператора $\mathcal{A}$, тому відшукання узагальненого розв'язку задачі (1)–(4) зводиться до відшукання нерухомої точки оператора $\mathcal{A}$ в просторі $\mathcal{Q}$.

Використавши теорему Банаха про стискуюче відображення, встановимо існування та єдиність нерухомої точки оператора $\mathcal{A}$.

Візьмемо два довільні різні елементи y^1, y^2 з простору $\mathcal{Q}$. Тоді в цьому просторі для всіх допустимих i, x, t виконується нерівність

$$\left|y_i^1(x,t) - y_i^2(x,t)\right| \leqslant \rho_\alpha(y^1, y^2) \alpha_i^{-1}(x,t;a,p).$$

З визначення $\chi_i(x,t)$ легко отримати такі оцінки:

$$\begin{aligned} &\chi_i(x,t) \leqslant t - x/\Lambda, && i \in I_0, \\ &\chi_i(x,t) \leqslant t - (l-x)/\Lambda, && i \in I_l. \end{aligned}$$

Справджуються також оцінки

$$\left|\mathfrak{R}_i[y^1](x,t) - \mathfrak{R}_i[y^2](x,t)\right| \alpha_i(x,t;a,p) \leqslant$$

$$\leqslant L\max\left\{\max_{\substack{i\in I_0\\ j\notin I_0}}\frac{\alpha_i(x,t;a,p)}{\alpha_j(0,\chi_i(x,t);a,p)},\max_{\substack{i\in I_l\\ j\notin I_l}}\frac{\alpha_i(x,t;a,p)}{\alpha_j(l,\chi_i(x,t);a,p)}\right\}\rho_\alpha(y^1,y^2);$$

аналогічно

$$\left|\mathcal{A}_i[y^1](x,t)-\mathcal{A}_i[y^2](x,t)\right|\alpha_i(x,t;a,p)=\left|\Delta\mathfrak{R}_i[y^1](x,t)-\Delta\mathfrak{R}_i[y^2](x,t)\right|\alpha_i(x,t;a,p)+$$

$$+\left|\int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t}\Delta_k f_i(y^k(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\alpha_i(x,t;a,p)d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(L\max\left\{\max_{\substack{i\in I_0\\ j\notin I_0}}\frac{\alpha_i(x,t;a,p)}{\alpha_j(0,\chi_i(x,t);a,p)},\max_{\substack{i\in I_l\\ j\notin I_l}}\frac{\alpha_i(x,t;a,p)}{\alpha_j(l,\chi_i(x,t);a,p)}\right\}+\right.$$

$$\left.+L\int\limits_0^t\max_{\substack{i,j\in I\\ s,x\in[0,l]}}\frac{\alpha_i(x,t;a,p)}{\alpha_j(s,\sigma;a,p)}d\sigma\right)\rho_\alpha(y^1,y^2).$$

Дослідимо на максимум функції в коефіцієнті стиску оператора $\mathcal{A}$. Для параметрів a та p виконується нерівність

$$p\Lambda\max\{1,l\}<a,$$

з якої випливає, що

$$\sup_{(x,t)\in\overline{\Pi}}\max_{\substack{i\in I_0\\ j\notin I_0}}\frac{\alpha_i(x,t;a,p)}{\alpha_j(0,\chi_i(x,t);a,p)}=\sup_{(x,t)\in\overline{\Pi}}\max_{\substack{i\in I_l\\ j\notin I_l}}\frac{\alpha_i(x,t;a,p)}{\alpha_j(l,\chi_i(x,t);a,p)}=e^{-pl}<\frac{1}{4L}$$

та

$$\int\limits_0^t\max_{\substack{i,j\in I\\ s,x\in[0,l]}}\frac{\alpha_i(x,t;a,p)}{\alpha_j(s,\sigma;a,p)}d\sigma\leqslant\frac{1}{a}\max\left\{e^{pl},e^{pl^2/4}\right\}<\frac{1}{4L}.$$

Звідси отримуємо

$$\rho(\mathcal{A}[y^1],\mathcal{A}[y^2])\leqslant\frac{1}{2}\rho_\alpha(y^1,y^2).$$

Отже, оператор $\mathcal{A}$ є стискуючим на елементах повного метричного простору $\mathcal{Q}$ з вибраними функціями $\alpha_i=\alpha_i(x,t;a,p)$ та параметрами a, p.

Тому за теоремою Банаха існує єдина нерухома точка оператора $\mathcal{A}$ в метричному просторі $\mathcal{Q}$. Ця нерухома точка і є узагальненим розв'язком задачі (1)–(4) при довільних u, $u^{(1)}$, $u^{(2)}\in\mathcal{U}_{ad}$.

Теорему 1 доведено.

***Зауваження* 2.** Має місце зображення

$$z^T(x,t)\lambda(x,t)y(x,t)=z_+^T(x,t)\lambda_+(x,t)y_+(x,t)+z_-^T(x,t)\lambda_-(x,t)y_-(x,t),$$

де y, $z\in\mathcal{Q}$, λ — характеристична матриця системи (1), λ_+, λ_- — діагональні матриці, що складаються з додатних та від'ємних власних значень матриці λ відповідно, а T — символ транспонування.

4. Задача лінеаризації. Додатково вимагатимемо, щоб

$$\lambda \in \left(C^{1,0}_{x,t}(\overline{\Pi})\right)^n, \quad f \in \left(C^{1,0,0}_{y,x,t}(\mathbb{R}^n \times \overline{\Pi})\right)^n, \quad y^0 \in \left(C^{1,0}_{u,x}(U \times [0,l])\right)^n,$$

$$\gamma^0 \in \left(C^{1,1,0}_{y,u^{(1)},t}(\mathbb{R}^{n-m_2} \times U^1 \times \mathbb{R}_+)\right)^{m_1}, \quad \gamma^l \in \left(C^{1,1,0}_{y,u^{(2)},t}(\mathbb{R}^{m_1} \times U^2 \times \mathbb{R}_+)\right)^{n-m_2},$$

$$G_0 \in C^{1,1,0}_{y_-,y_+,t}(\mathbb{R}^{n-m_2} \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}_+), \quad G \in C^{1,0,0}_{y,x,t}(\mathbb{R}^n \times \overline{\Pi}).$$

Розглянемо випадок, коли керування системою (1) здійснюємо тільки за допомогою керуючого впливу в початкових умовах.

Нехай маємо два допустимих процеси $\{y, u\}$ та $\{\widetilde{y}, \widetilde{u}\}$, де $\widetilde{y} = y + \Delta y$, $\widetilde{u} = u + \Delta u$. Тоді $\Delta y = \widetilde{y} - y$ та $\Delta u = \widetilde{u} - u$ задовольняють таку крайову задачу для гіперболічної системи:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Delta y(x,t)}{\partial t} + \lambda(x,t)\frac{\partial \Delta y(x,t)}{\partial x} = \Delta_y f(y(x,t),x,t), \\ &\Delta y(x,0) = \Delta_u y^0(u(x),x), \qquad x \in [0,l], \\ &\Delta y_+(0,t) = \Delta_y \tilde{\gamma}^0(y_-(0,t),t), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \\ &\Delta y_-(l,t) = \Delta_y \tilde{\gamma}^l(y_+(l,t),t), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \end{aligned} \tag{9}$$

де, наприклад, $\Delta_y f(y(x,t),x,t) = f(\widetilde{y}(x,t),x,t) - f(y(x,t),x,t)$.

Приріст цільового функціонала (6) має вигляд

$$\Delta J(u) = J(\widetilde{u}) - J(u) = \int\limits_0^{+\infty} \Delta_y G_0(y_-(0,t), y_+(l,t), t)dt + \iint\limits_{\Pi} \Delta_y G(y(x,t),x,t)dxdt,$$

або з урахуванням (9)

$$\Delta J(u) = \int\limits_0^{+\infty} \Delta_y G_0(y_-(0,t), y_+(l,t), t)dt + \iint\limits_{\Pi} \Delta_y G(y(x,t),x,t)dxdt+$$

$$+\iint\limits_{\Pi} \psi^T(x,t)\left(\frac{\partial \Delta y(x,t)}{\partial t} + \lambda(x,t)\frac{\partial \Delta y(x,t)}{\partial x} - \Delta_y f(y(x,t),x,t)\right)dxdt, \tag{10}$$

де $\psi = \psi(x,t)$ — вектор-функція з простору $\mathcal{Q}$.

Введемо функції

$$H(\psi, y, x, t) = \psi^T(x,t) f(y,x,t) - G(y,x,t),$$

$$h(\psi(x,0), u, x) = \psi^T(x,0) y^0(u(x),x),$$

$$h^1(\psi_+(0,t), y_-(0,t), u^{(1)}(t), t) = \psi_+^T(0,t)\lambda_+(0,t)\gamma^0(y_-(0,t), u^{(1)}(t), t),$$

$$h^2(\psi_-(l,t), y_+(l,t), u^{(2)}(t), t) = \psi_-^T(l,t)\lambda_-(l,t)\gamma^l(y_+(l,t), u^{(2)}(t), t).$$

Використавши формулу Тейлора [11, с. 364] для функцій G_0, G та f, із застосуванням зауваження 2 та наведеної нижче леми до останнього доданка в (10), і лінеаризувавши крайові умови для (9), одержимо

$$\Delta J(u) =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\partial G_0(y_-(0,t), y_+(l,t), t)}{\partial y_-}\right)^T \Delta y_-(0,t)dt + \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\partial G_0(y_-(0,t), y_+(l,t), t)}{\partial y_+}\right)^T \Delta y_+(l,t)dt+$$

$$+ \iint\limits_\Pi \left(\frac{\partial G(y(x,t), x, t)}{\partial y}\right)^T \Delta y(x,t) + \int\limits_0^{+\infty} o_{G_0}(\|\Delta y_-(0,t)\|)dt + \int\limits_0^{+\infty} o_{G_0}(\|\Delta y_+(l,t)\|)dt+$$

$$+ \iint\limits_\Pi o_G(\|\Delta y(x,t)\|)dxdt + \int\limits_0^l \lim_{t\to+\infty} \psi^T(x,t)\Delta y(x,t)dx - \int\limits_0^l \Delta_u h(\psi(x,0), u(x), x)dx+$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} \left(\psi_+^T(l,t)\lambda_+(l,t) + \psi_-^T(l,t)\lambda_-(l,t)\left(\frac{\partial \tilde{\gamma}^l(y_+(l,t), t)}{\partial y_+}\right)^T\right) \Delta y_+(l,t)dt-$$

$$- \int\limits_0^{+\infty} \left(\psi_-^T(0,t)\lambda_-(0,t) + \psi_+^T(0,t)\lambda_+(0,t)\left(\frac{\partial \tilde{\gamma}^0(y_-(0,t), t)}{\partial y_-}\right)^T\right) \Delta y_-(0,t)dt+$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} \psi_-^T(l,t)\lambda_-(l,t)o_{\gamma^l}(||\Delta y_+(l,t)||)dt - \int\limits_0^{+\infty} \psi_+^T(0,t)\lambda_+(0,t)o_{\gamma^0}(||\Delta y_-(0,t)||)dt-$$

$$- \iint\limits_\Pi \left(\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + \lambda(x,t)\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial \lambda(x,t)}{\partial x}\psi(x,t)\right)^T \Delta y(x,t)dxdt-$$

$$- \iint\limits_\Pi \psi^T(x,t)\left(\frac{\partial f(y(x,t), x, t)}{\partial y}\right)^T \Delta y(x,t)dxdt - \iint\limits_\Pi \psi^T(x,t)o_f(\|\Delta y(x,t)\|)dxdt,$$

де, наприклад, $\|\Delta y(x,t)\| = \max_{i\in I} |y_i(x,t)|\alpha_i(x,t;a,p)$.

Виконані перетворення дозволяють сформулювати спряжену задачу для задачі оптимального керування (1) – (6):

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + \lambda(x,t)\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial \lambda(x,t)}{\partial x}\psi(x,t) = -H_y(\psi, y, x, t),\ (x,t) \in \Pi, \tag{11}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\psi(x,t)e^{at}=0,\ x\in[0,l], \tag{12}$$

і для всіх $t\in\mathbb{R}_+$

$$\psi_+(l,t)=-\left(\lambda_+(l,t)\right)^{-1}\left(\frac{\partial\tilde{\gamma}^l(y_+(l,t),t)}{\partial y_+}\lambda_-(l,t)\psi_-(l,t)+\frac{\partial G_0(y_-(0,t),y_+(l,t),t)}{\partial y_+}\right),$$
$$\psi_-(0,t)=-\left(\lambda_-(0,t)\right)^{-1}\left(\frac{\partial\tilde{\gamma}^0(y_-(0,t),t)}{\partial y_-}\lambda_+(0,t)\psi_+(0,t)-\frac{\partial G_0(y_-(0,t),y_+(l,t),t)}{\partial y_-}\right), \tag{13}$$

для якої повинен існувати узагальнений розв'язок, означення якого буде наведено нижче.

Для задачі (11)–(13) приріст цільового функціонала набере вигляду

$$\Delta J(u)=-\int\limits_0^l\Delta_u h(\psi(x,0),u(x),x)dx+\int\limits_0^{+\infty}o_{G_0}(\|\Delta y_-(0,t)\|)dt+\int\limits_0^{+\infty}o_{G_0}(\|\Delta y_+(l,t)\|)dt+$$
$$+\iint\limits_\Pi o_G(\|\Delta y(x,t)\|)dxdt-\iint\limits_\Pi\psi^T(x,t)o_f(\|\Delta y(x,t)\|)dxdt+$$
$$+\int\limits_0^{+\infty}\psi_-^T(l,t)\lambda_-(l,t)o_{\gamma^l}(\|\Delta y_+(l,t)\|)dt-\int\limits_0^{+\infty}\psi_+^T(0,t)\lambda_+(0,t)o_{\gamma^0}(\|\Delta y_-(0,t)\|)dt. \tag{14}$$

Перейдемо тепер до випадку, коли керований вплив на систему здійснюється тільки в крайових умовах. Оскільки керуючі впливи в сформульованій задачі не взаємопов'язані, то умови оптимальності для них можна виводити незалежно один від одного, а результуючі умови оптимальності будуть враховувати умови оптимальності кожного окремого керування. Однотипність крайових умов дозволяє розглядати лише випадок наявності керуючого впливу в крайовій умові (13).

Задача лінеаризації в такому випадку, з незначними змінами, повторює описаний вище процес. Основні його відмінності полягають у наступному:

a) початково-крайові умови для задачі на приріст Δy наберуть вигляду

$$\Delta y(x,0)=0,\ x\in[0,l],$$
$$\Delta y_+(0,t)=\Delta_{y,u^{(1)}}\gamma^0(y^-(0,t),u^{(1)}(t),t),\ t\in\mathbb{R}_+,$$
$$\Delta y_-(l,t)=\Delta_y\gamma^l(y^+(l,t),t),\ t\in\mathbb{R}_+;$$

b) замість доданка $-\int_0^l\psi^T(x,0)\Delta y(x,0)dx$ з'явиться доданок

$$-\int\limits_0^{+\infty}\psi_+^T(0,t)\lambda_+(0,t)\frac{\partial\gamma^0(y_-(0,t),u^{(1)}(t),t)}{\partial u^{(1)}}\Delta u^{(1)}(t)dt-$$

$$-\int\limits_0^{+\infty}\psi_+^T(0,t)\lambda_+(0,t)o_{\gamma^0}(||\Delta u^{(1)}(t)||)dt;$$

c) зміниться крайова умова для спряженої системи

$$\psi_-(0,t) = -\left(\lambda_-(0,t)\right)^{-1}\left(\frac{\partial\gamma^0(y_-(0,t),u^{(1)}(t),t)}{\partial y_-}\lambda_+(0,t)\psi_+(0,t)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial G_0(y_-(0,t),y_+(l,t),t)}{\partial y_-}\right),\ t\in[0,+\infty).$$

За припущення, що $\psi(x,t)$ — розв'язок спряженої задачі (11) – (13), приріст цільового функціонала набере вигляду

$$\Delta J(u^{(1)}) = -\int\limits_0^{+\infty}\Delta_{u^{(1)}}h^1(\psi_+(0,t),y_-(0,t),u^{(1)}(t),t)dt + \int\limits_0^{+\infty}o_{G_0}(\|\Delta y_-(0,t)\|)dt+$$

$$+\int\limits_0^{+\infty}o_{G_0}(\|\Delta y_+(l,t)\|)dt + \iint\limits_{\Pi}o_G(\|\Delta y(x,t)\|)dxdt - \iint\limits_{\Pi}\psi^T(x,t)o_f(\|\Delta y(x,t)\|)dxdt+$$

$$+\int\limits_0^{+\infty}\psi_-^T(l,t)\lambda_-(l,t)o_{\gamma^l}(\|\Delta y_+(l,t)\|)dt - \int\limits_0^{+\infty}\psi_+^T(0,t)\lambda_+(0,t)o_{\gamma^0}(\|\Delta y_-(0,t)\|)dt-$$

$$-\int\limits_0^{+\infty}\psi_+^T(0,t)\lambda_+(0,t)o_{\gamma^0}(||\Delta u^{(1)}(t)||)dt.$$

Для керуючого впливу на правій межі одержимо відповідний приріст функціонала:

$$\Delta J(u^{(2)}) = -\int\limits_0^{+\infty}\Delta_{u^{(2)}}h^2(\psi_-(l,t),y_+(l,t),u^{(2)}(t),t)dt + \int\limits_0^{+\infty}o_{G_0}(\|\Delta y_-(0,t)\|)dt+$$

$$+\int\limits_0^{+\infty}o_{G_0}(\|\Delta y_+(l,t)\|)dt + \iint\limits_{\Pi}o_G(\|\Delta y(x,t)\|)dxdt - \iint\limits_{\Pi}\psi^T(x,t)o_f(\|\Delta y(x,t)\|)dxdt+$$

$$+\int\limits_0^{+\infty}\psi_-^T(l,t)\lambda_-(l,t)o_{\gamma^l}(\|\Delta y_+(l,t)\|)dt - \int\limits_0^{+\infty}\psi_+^T(0,t)\lambda_+(0,t)o_{\gamma^0}(\|\Delta y_-(0,t)\|)dt-$$

$$-\int\limits_0^{+\infty}\psi_-^T(l,t)\lambda_-(l,t)o_{\gamma^l}(||\Delta u^{(2)}(t)||)dt.$$

Наслідок. *При виконанні припущень цього пункту справджується оцінка*

$$\exists \overline{K} > 0\colon \sup_{\substack{i\in I\\ (x,t)\in\overline{\Pi}}} |\Delta y_i(x,t)|\alpha_i(x,t;a,p) \leqslant \overline{K} \max_{x\in[0,l]} \|\Delta u(x)\|, \tag{15}$$

де

$$\|\Delta u(x)\| = \max_{i\in\{1,2,\ldots,r\}} |\Delta u_i(x)|.$$

Доведення. Використаємо інтегральне зображення розв'язку задачі (1)–(4), тобто для всіх $i \in I$ маємо

$$\Delta y_i(x,t) = \Delta_y \tilde{\mathfrak{R}}_i[y](x,t) + \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} \Delta_y f_i(y(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\varphi_i(\tau;x,t),\tau)d\tau,$$

де

$$\Delta_y \tilde{\mathfrak{R}}_i[y](x,t) = \begin{cases} \Delta_u y_i^0(u(\varphi_i(0;x,t)),\varphi_i(0;x,t)), & (x,t)\in\Pi^i,\\ \Delta_y \tilde{\gamma}_i^0(y_-(0,\chi_i(x,t)),\chi_i(x,t)), & (x,t)\in\Pi_0^i,\\ \Delta_y \tilde{\gamma}_i^l(y_+(l,\chi_i(x,t)),\chi_i(x,t)), & (x,t)\in\Pi_l^i. \end{cases}$$

Справджується така оцінка:

$$|\Delta y_i(x,t)|\alpha_i(x,t;a,p) \leqslant |\Delta_y \tilde{\mathfrak{R}}_i[y](x,t)|\alpha_i(x,t;a,p)+$$

$$+\int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} |\Delta_y f_i(y(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\varphi_i(\tau;x,t),\tau)|\alpha_i(x,t;a,p)d\tau \leqslant K\|\Delta u(x)\|+$$

$$+L\|\Delta y\|_\alpha \left(\sup_{(x,t)\in\overline{\Pi}} \max_{\substack{i\in I_0\\ j\notin I_0}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p)}{\alpha_j(0,\chi_i(x,t);a,p)} + \sup_{(x,t)\in\overline{\Pi}} \max_{\substack{i\in I_l\\ j\notin I_l}} \frac{\alpha_i(x,t;a,p)}{\alpha_j(l,\chi_i(x,t);a,p)} \right)+$$

$$+L\|\Delta y\|_\alpha \int\limits_0^t \max_{\substack{i,j\in I\\ s,x\in[0,l]}} \frac{\alpha_i(x,\tau;a,p)}{\alpha_j(s,t;a,p)} d\tau,$$

де K — стала Ліпшиця для всіх керуючих впливів.

Враховуючи вибір параметрів a та p, одержуємо

$$\|\Delta y\|_\alpha = \sup_{\substack{i\in I\\ (x,t)\in\overline{\Pi}}} |\Delta y_i(x,t)|\alpha_i(x,t;a,p) \leqslant K \max_{x\in[0,l]} \|\Delta u(x)\| + \Big(2Le^{-pl}+$$

$$+\frac{L\max\{e^{pl},e^{pl^2/4}\}}{a}\Big) \|\Delta y\|_\alpha \leqslant K \max_{x\in[0,l]} \|\Delta u(x)\| + \frac{3}{4}\|\Delta y\|_\alpha,$$

звідки отримуємо

$$\sup_{\substack{i\in I\\(x,t)\in\overline{\Pi}}} |\Delta y_i(x,t)|\alpha_i(x,t;a,p) \leqslant \overline{K}\max_{x\in[0,l]}\|\Delta u(x)\|,$$

де $\overline{K} = 4K$.

Наслідок доведено.

***Зауваження* 3.** Аналогічні оцінки можна одержати для крайових керуючих впливів:

$$\exists \overline{K}^j > 0\colon \sup_{\substack{i\in I\\(x,t)\in\overline{\Pi}}} |\Delta y_i(x,t)|\alpha_i(x,t;a,p) \leqslant \overline{K}^j \max_{t\in[0,+\infty)}\|\Delta u^{(j)}(t)\|, \qquad j\in\{1,2\}.$$

5. Розв'язність спряженої задачі. Для справедливості процесу лінеаризації приросту цільового функціонала потрібно вимагати існування розв'язку спряженої задачі (11) – (13).

Введемо області

$$\pi^i = \left\{(x,t)\in\overline{\Pi}|\ \nu_i(x,t) = +\infty\right\}, \qquad i\in I,$$

$$\pi^i_l = \left\{(x,t)\in\overline{\Pi}|\ \varphi_i(\nu_i(x,t);x,t) = l\right\}, \qquad i\in I_0,$$

$$\pi^i_0 = \left\{(x,t)\in\overline{\Pi}|\ \varphi_i(\nu_i(x,t);x,t) = 0\right\}, \qquad i\in I_l.$$

На множині $\overline{\Pi}$ для $i\in I$ визначимо функції

$$\beta_i(x,t;b,q) = \begin{cases} e^{qx(l-x)+bt}, & i\in I_0,\ \ i\in I_l,\\ e^{q(l-x)+bt}, & i\in I_0,\ \ i\notin I_l,\\ e^{qx+bt}, & i\notin I_0,\ \ i\in I_l,\\ e^{ql+bt}, & i\notin I_0,\ \ i\notin I_l,\end{cases}$$

для яких виберемо параметри

$$b = \max\left\{a, q\Lambda, ql\Lambda, 2(n+1)\max\{e^{ql}, e^{ql^2/4}\}\right\} + b_0,$$

$$q = \max\{\ln(2\max\{n-m_2, m_1\}C)/l, 0\} + q_0$$

з довільно фіксованими додатними величинами $b_0,\ q_0$. Стала C обмежує за модулем функції

$$\frac{\partial\lambda_i(x,t)}{\partial x}, \quad i\in I; \qquad \frac{\partial f_j(y,x,t)}{\partial y_i}, \quad i,j\in I,$$

$$(\det\lambda_+(l,t))^{-1}\lambda_i(l,t)\frac{\partial\gamma^l_j}{\partial y_i}(y_+(l,t),u^{(2)}(t),t)\lambda_j(l,t), \qquad i\in I_l, \quad j\in I_0,$$

$$(\det\lambda_-(0,t))^{-1}\lambda_i(0,t)\frac{\partial\gamma^0_j}{\partial y_i}(y_+(0,t),u^{(1)}(t),t)\lambda_j(l,t), \qquad i\in I_0, \quad j\in I_l,$$

на відповідних множинах визначення.

Зінтегрувавши (11) вздовж характеристик та використавши крайові умови (13), для всіх $i \in I$ отримаємо систему інтегро-операторних рівнянь

$$\psi_i(x,t) = \mathfrak{D}_i[\psi](x,t) + \int\limits_t^{\nu_i(x,t)} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\psi_i(\tau;x,t),\tau) -$$

$$-\sum_{j\in I} \frac{\partial f_j}{\partial y_i}(y(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\psi_j(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) +$$

$$+\frac{\partial G}{\partial y_i}(y(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\varphi_i(\tau;x,t),\tau)d\tau, \tag{16}$$

де

$$\mathfrak{D}_i[\psi](x,t) = \begin{cases} 0, & (x,t)\in \pi^i, \\ -(\det\lambda_+(l,\nu_i(x,t)))^{-1}\lambda_i(l,\nu_i(x,t))\times & \\ \times \sum\limits_{j\in I_l} \dfrac{\partial \gamma_j^l}{\partial y_i}(y_+(l,\nu_i(x,t)),u^{(2)}(\nu_i(x,t)),\nu_i(x,t))\lambda_j(l,\nu_i(x,t))\times & \\ \times\psi_j(l,\nu_i(x,t)) - \dfrac{\partial G_0}{\partial y_i}(y_-(0,\nu_i(x,t)),y_+(l,\nu_i(x,t)),\nu_i(x,t)), & (x,t)\in\pi_l^i, \\ -(\det\lambda_-(0,\nu_i(x,t)))^{-1}\lambda_i(0,\nu_i(x,t))\times & \\ \times \sum\limits_{j\in I_0} \dfrac{\partial \gamma_j^0}{\partial y_i}(y_+(0,\nu_i(x,t)),u^{(1)}(\nu_i(x,t)),\nu_i(x,t))\lambda_j(l,\nu_i(x,t))\times & \\ \times\psi_j(0,\nu_i(x,t)) - \dfrac{\partial G_0}{\partial y_i}(y_-(0,\nu_i(x,t)),y_+(l,\nu_i(x,t)),\nu_i(x,t)), & (x,t)\in\pi_0^i. \end{cases}$$

З простору $\mathcal{Q}$ виберемо підпростір $\mathcal{W}$, елементи якого мають властивість

$$\lim_{t\to+\infty}\psi(x,t)e^{at} = 0 \text{ для будь-якого } x\in[0,l], \psi\in\mathcal{W}.$$

Означення 2. *Узагальненим розв'язком спряженої задачі* (11)–(13), *що відповідає набору керувань* u, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, *будемо називати набір неперервних функцій* $(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n)\in\mathcal{W}$, *які задовольняють систему інтегро-операторних рівнянь* (16) *в* $\overline{\Pi}$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови*:

1) $\lambda\in\left(C_x^1(\overline{\Pi})\right)^n, \quad \sup\limits_{\substack{i\in I\\(x,t)\in\overline{\Pi}}}\left\{|\lambda_i(x,t)|,\left|\dfrac{\partial\lambda_i(x,t)}{\partial x}\right|\right\}<+\infty, \quad \inf\limits_{\substack{i\in I\\(x,t)\in\overline{\Pi}}}|\lambda_i(x,t)|<+\infty;$

2) $y\in\mathcal{Q}$ — *розв'язок задачі* (1)–(4);

3) $f\in\left(C_y^1(\mathbb{R}^n\times\overline{\Pi})\right)^n$, *має обмежену на* $\mathbb{R}^n\times\overline{\Pi}$ *та інтегровну похідну по* t;

4) $G_0\in C^{1,1}_{y_-,y_+}(\mathbb{R}^{n-m_2}\times\mathbb{R}^{m_1}\times\mathbb{R}_+), \ \forall i\in I_0\cup I_l: \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\partial G_0(y_-(0,t),y_+(l,t),t)}{\partial y_i}e^{at}=0;$

5) $G \in C_y^1(\mathbb{R}^n \times \overline{\Pi}),\ \forall i \in I\colon\ \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\partial G(y(x,t),x,t)}{\partial y_i} e^{at} = 0;$

6) $\gamma^0 \in \left(C_y^1(\mathbb{R}^{n-m_2} \times U^1 \times \mathbb{R}_+)\right)^{m_1}, \quad \sup\limits_{\substack{i\in I_l, j\in I_0\\ (y_-,u^{(1)},t)\in\mathbb{R}^{n-m_2}\times U^1\times\mathbb{R}_+}} \left|\dfrac{\partial \gamma_j^0(y_-,u^{(1)},t)}{\partial y_i}\right| < +\infty,$

$\gamma^l \in \left(C_y^1(\mathbb{R}^{m_1} \times U^2 \times \mathbb{R}_+)\right)^{n-m_2}, \quad \sup\limits_{\substack{i\in I_0, j\in I_l\\ (y_+,u^{(2)},t)\in\mathbb{R}^{m_1}\times U^2\times\mathbb{R}_+}} \left|\dfrac{\partial \gamma_j^l(y_+,u^{(2)},t)}{\partial y_i}\right| < +\infty.$

Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (11) – (13).

Доведення. Для знаходження розв'язку задачі (11) – (13) також використаємо метод стискуючих відображень. Розглянемо простір $\mathcal{W}$ з метрикою

$$\rho_\beta(\psi^1,\psi^2) = \max_{\substack{i\in I\\ (x,t)\in\overline{\Pi}}} \left|\psi^1(x,t) - \psi^2(x,t)\right| \beta_i(x,t;b,q).$$

Нехай оператор $\mathcal{B}$ визначений правою частиною (16), тобто для $i \in I$ маємо

$$\mathcal{B}_i[\psi](x,t) = \mathfrak{D}_i[\psi](x,t) + \int\limits_t^{\nu_i(x,t)} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\psi_i(\tau;x,t),\tau) -$$

$$-\sum_{j\in I} \frac{\partial f_j}{\partial y_i}(y(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\psi_j(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) +$$

$$+\frac{\partial G}{\partial y_i}(y(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),\varphi_i(\tau;x,t),\tau)d\tau.$$

Для всіх $i \in I_0 \cup I_l$ справджуються оцінки

$$\begin{aligned} &\nu_i(x,t) \geqslant t + (l-x)/\Lambda, && i \in I_0,\\ &\nu_i(x,t) \geqslant t + x/\Lambda, && i \in I_l. \end{aligned}$$

Враховуючи оцінку

$$\left|\Delta_k \mathfrak{D}_i[\psi^k](x,t)\right| \beta_i(x,t;b,q) \leqslant$$

$$\leqslant C \max\left\{(n-m_2)\max_{\substack{i\in I_0\\ j\notin I_0}} \frac{\beta_i(x,t;b,q)}{\beta_j(l,\nu_i(x,t);b,q)}, m_1 \max_{\substack{i\in I_l\\ j\notin I_l}} \frac{\beta_i(x,t;b,q)}{\beta_j(0,\nu_i(x,t);b,q)}\right\} \rho_\beta(\psi^1,\psi^2),$$

для оператора $\mathcal{B}$ одержуємо

$$\left|\Delta_k \mathcal{B}_i[\psi^k]\right| \beta_i(x,t;b,q) \leqslant$$

$$\leqslant C \max\left\{(n-m_2)\max_{\substack{i\in I_0\\ j\notin I_0}} \frac{\beta_i(x,t;b,q)}{\beta_j(l,\nu_i(x,t);b,q)}, m_1 \max_{\substack{i\in I_l\\ j\notin I_l}} \frac{\beta_i(x,t;b,q)}{\beta_j(0,\nu_i(x,t);b,q)}\right\} \rho_\beta(\psi^1,\psi^2) +$$

$$+(n+1)C\int\limits_{t}^{\nu_i(x,t)}\max_{\substack{i,j\in I\\ s,x\in[0,l]}}\frac{\beta_i(x,t;b,q)}{\beta_j(s,\sigma;b,q)}d\sigma\rho_\beta(\psi^1,\psi^2).$$

Вибір параметрів $b,\ q$ у функціях $\beta_i=\beta_i(x,t;b,q)$ дозволяє отримати оцінки

$$\max_{\substack{i\in I_0\\ j\notin I_0}}\frac{\beta_i(x,t;b,q)}{\beta_j(l,\nu_i(x,t);b,q)}=\max_{\substack{i\in I_l\\ j\notin I_l}}\frac{\beta_i(x,t;b,q)}{\beta_j(0,\nu_i(x,t);b,q)}=e^{-ql}<\frac{1}{2nC}$$

і

$$\int\limits_{t}^{\nu_i(x,t)}\max_{i,j,s}\frac{\beta_i(x,t;b,q)}{\beta_j(s,\sigma;b,q)}d\sigma<\frac{\max\{e^{ql},e^{ql^2/4}\}}{b}<\frac{1}{2(n+1)C}.$$

Звідси випливає, що

$$\rho_\beta(\mathcal{B}[\psi^1],\mathcal{B}[\psi^2])<\rho_\beta(\psi^1,\psi^2).$$

Отже, оператор $\mathcal{B}$ є стискуючим на елементах простору $\mathcal{W}$. Тому за теоремою Банаха існує єдина нерухома точка оператора $\mathcal{B}$ у просторі $\mathcal{W}$. Ця нерухома точка і є узагальненим розв'язком задачі (11) – (13).

Теорему 2 доведено.

Лема. *Для довільних вектор-функцій $y\in\mathcal{Q},\psi\in\mathcal{W}$ виконується співвідношення*

$$\iint\limits_{\Pi}\psi^T(x,t)\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}+\lambda(x,t)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)dxdt=$$

$$=\int\limits_0^l\sum_{i=1}^n\psi^T(x,t)y(x,t)\Big|_{t=0}^{+\infty}dx-\int\limits_0^{+\infty}\psi^T(x,t)\lambda(x,t)y(x,t)\Big|_{x=0}^{l}dt-$$

$$-\iint\limits_{\Pi}\left(\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}+\lambda(x,t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial\lambda(x,t)}{\partial x}\psi(x,t)\right)^T y(x,t)dxdt.$$

Доведення цієї леми випливає із подібного факту в [10, с. 459].

6. Необхідні умови оптимальності. Варіаційний аналіз досліджуваної задачі ґрунтується на використанні варіацій, які забезпечують гладкість допустимих керувань. Варіація керування будується за правилом

$$u_{\varepsilon,\delta}(x)=u(x+\varepsilon\delta(x)),\ x\in[0,l], \tag{17}$$

де $\varepsilon\in[0,1]$ — параметр, який характеризує мализну варіації, $\delta(x)$ — неперервно диференційовна функція, яка задовольняє умову

$$0\leqslant x+\delta(x)\leqslant l,\quad x\in[0,l],\quad \delta(0)=\delta(l)=0. \tag{18}$$

Відмітимо деякі властивості варіації (17). Насамперед, керування є гладким, а область значень функції $u_{\varepsilon,\delta}(x)$ визначено областю значень початкового керування $u(x)$. Тому керування $u_{\varepsilon,\delta}(x)$ є допустимим. Крім того, має місце поточкова (і рівномірна) збіжність: $u_{\varepsilon,\delta}(x) \to u(x)$ при $\varepsilon \to 0$ в кожній точці відрізка $[0,l]$ для будь-якого $\delta(x)$, що задовольняє нерівність (18). Остання властивість характеризує відповідну варіацію керування $\Delta u_{\varepsilon,\delta}(x) = u_{\varepsilon,\delta}(x) - u(x)$ як варіацію гладкої функції $u(x)$, при якій рівномірно мала деформація відрізка $[0,l]$ „перемішує" значення початкового керування, зберігаючи рівномірну близькість до нуля функції $\Delta u_{\varepsilon,\delta}(x)$ та її похідної $\dfrac{d}{dx}\Delta u_{\varepsilon,\delta}(x)$.

Вибираючи варіацію керування за правилом (17) і використовуючи зображення

$$\Delta u(x) = \dot{u}(x)\varepsilon\delta(x) + o(\varepsilon),$$

записуємо формулу приросту цільового функціонала (14) так:

$$\Delta J(u) = -\int\limits_0^l h_u(\psi(x,0), u(x), x)\dot{u}(x)\varepsilon\delta(x)dx - \int\limits_0^l o(\varepsilon)dx + \int\limits_0^{+\infty} o_{G_0}(\|\Delta y_-(0,t)\|)dt +$$

$$+\int\limits_0^{+\infty} o_{G_0}(\|\Delta y_+(l,t)\|)dt + \iint\limits_\Pi o_G(\|\Delta y(x,t)\|)dxdt - \iint\limits_\Pi \psi^T(x,t)o_f(\|\Delta y(x,t)\|)dxdt +$$

$$+\int\limits_0^{+\infty} \psi_-^T(l,t)\lambda_-(l,t)o_{\gamma^l}(\|\Delta y_+(l,t)\|)dt - \int\limits_0^{+\infty} \psi_+^T(0,t)\lambda_+(0,t)o_{\gamma^0}(\|\Delta y_-(0,t)\|)dt. \qquad (19)$$

Враховуючи справедливість оцінки (15) для рівності (19), маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} \frac{J(u+\varepsilon\delta) - J(u)}{\varepsilon} = -\int\limits_0^l h_u(\psi(x,0), u(x), x)\dot{u}(x)\delta(x)dx,$$

оскільки всі доданки у (19) мають вигляд інтеграла по відповідній області від підінтегральної функції, яка є добутком величини порядку $o(\varepsilon)$ та інтегровної функції на цій області.

Аналогічно до (17), (18) побудуємо приріст крайових керувань за правилом

$$\Delta u^{(k)}(t) = \dot{u}^{(k)}(t)\varepsilon\delta^{(k)}(t) + o(\varepsilon), \qquad k \in \{1,2\}.$$

Для функціонала J одержимо значення похідної за напрямком, коли крайові умови допускають існування неперервної похідної за відповідним параметром керування, тобто

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} \frac{J(u^{(1)}+\varepsilon\delta^{(1)}) - J(u^{(1)})}{\varepsilon} = -\int\limits_{\mathbb{R}_+} h^1_{u^{(1)}}(\psi_+(0,t), y_-(0,t), u^{(1)}(t), t)\dot{u}^{(1)}(t)\delta^{(1)}(t)dt,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} \frac{J(u^{(2)}+\varepsilon\delta^{(2)}) - J(u^{(2)})}{\varepsilon} = -\int\limits_{\mathbb{R}_+} h^2_{u^{(2)}}(\psi_-(l,t), y_+(l,t), u^{(2)}(t), t)\dot{u}^{(2)}(t)\delta^{(2)}(t)dt.$$

Оскільки $\delta = \delta(x)$, $\delta^{(1)} = \delta^{(1)}(t)$, $\delta^{(2)} = \delta^{(2)}(t)$ — довільні функції, використовуючи теорему Ферма [12, с. 55], можна сформулювати таку теорему.

Теорема 3. *Якщо процес* $\{y, u, u^{(1)}, u^{(2)}\}$ *є оптимальним у задачі* (6), *то виконуються умови*

$$h_u(\psi(x,0), u(x), x) u_x(x) = 0, \ x \in [0,l],$$

$$h^1_{u^{(1)}}(\psi_+(0,t), y_-(0,t), u^{(1)}(t), t) u^{(1)}_t(t) = 0, \ t \in \mathbb{R}_+,$$

$$h^2_{u^{(2)}}(\psi_-(l,t), y_+(l,t), u^{(2)}(t), t) u^{(2)}_t(t) = 0, \ t \in \mathbb{R}_+,$$

де $y = y(x,t)$ — *узагальнений розв'язок задачі* (1)–(4), $\psi = \psi(x,t)$ — *узагальнений розв'язок спряженої задачі при* $y = y(x,t)$, $u = u(x)$, $u^{(1)} = u^{(1)}(t)$, $u^{(2)} = u^{(2)}(t)$.

1. *Аргучинцев А. В.* Оптимальное управление гиперболическими системами. – М.: Физматлит, 2007. – 168 с.
2. *Chan W. L., Guo B. Z.* Optimal birth control of population dynamics // J. Math. Anal. and Appl. – 1989. – **144**. – P. 532 – 552.
3. *Chan W. L., Guo B. Z.* Overtaking optimal control problem of age-dependent populations with infinite horizon // J. Math. Anal. and Appl. – 1990. – **150**. – P. 41 – 53.
4. *Пелюшкевич О. В.* Про одну задачу для навантаженої гіперболічної системи напівлінійних рівнянь з горизонтальними характеристиками // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2012. – Вип. 76. – С. 109 – 118.
5. *Кирилич В. М., Мышкис А. Д.* Краевая задача без начальных условий для линейной одномерной системы уравнений гиперболического типа // Дифференц. уравнения. – 1992. – **28**, № 3. – С. 463 – 469.
6. *Kmit I., Recke L., Tkachenko V.* Robustness of exponential dichotomies of boundary-value problems for general first-order hyperbolic systems // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 2. – P. 236 – 251.
7. *Асеев С. М., Кряжимский А. В.* Об одном классе задач оптимального управления, возникающих в математической экономике // Труды Мат. ин-та РАН. – 2008. – **262**. – С. 16 – 31.
8. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
9. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Гостехтеориздат, 1957. – 552 с.
10. *Матвеев Г. И., Якубович В. А.* Оптимальные системы управления: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи. – С.-Петербург, 2003. – 540 с.
11. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1969. – Т. II. – 800 с.
12. *Моклячук М. П.* Варіаційне числення. Екстремальні задачі. – Київ: ТВІМС, 2004. – 384 с.

Одержано 26.11.13,
після доопрацювання — 24.10.14