УДК 515.162, 517.51, 517.27

Е. А. Полулях (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ГРАФЫ КРОНРОДА – РИБА ФУНКЦИЙ НА НЕКОМПАКТНЫХ ДВУМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ. I

We consider continuous functions on two-dimensional surfaces satisfying the following conditions: they have a discrete set of local extrema; if a point is not a local extremum, then there exist its neighborhood and a number $n \in \mathbb{N}$ such that a function restricted to this neighborhood is topologically conjugate to $\operatorname{Re} z^n$ in a certain neighborhood of zero. Given $f: M^2 \to \mathbb{R}$, let $\Gamma_{K-R}(f)$ be a quotient space of M^2 with respect to its partition formed by the components of the level sets of f. It is known that, for compact M^2, the space $\Gamma_{K-R}(f)$ is a topological graph. In the paper, we introduce the notion of graph with stalks, which generalizes the notion of topological graph. For noncompact M^2, we estblish three conditions sufficient for $\Gamma_{K-R}(f)$ to be a graph with stalks.

Розглядаються неперервні функції на двовимірних поверхнях, які задовольняють такі умови: множина їх локальних екстремумів дискретна; якщо точка не є локальним екстремумом, то існують її окіл і число $n \in \mathbb{N}$ такі, що функція в цьому околі топологічно спряжена до $\operatorname{Re} z^n$ в околі нуля. Нехай для кожної функції $f: M^2 \to \mathbb{R}$ $\Gamma_{K-R}(f)$ — фактор-простір M^2 по розбиттю, елементами якого є компоненти множин рівня функції f. Відомо, що для компактного M^2 простір $\Gamma_{K-R}(f)$ є топологічним графом. У даній роботі введено поняття графа з черенками, яке є узагальненням топологічного графа. Для некомпактного M^2 наведено три умови, при виконанні яких простір $\Gamma_{K-R}(f)$ є графом з черенками.

1. Определения и формулировки результатов. Пусть f — непрерывная функция на двумерной поверхности M^2, удовлетворяющая следующим свойствам:

(f_1) множество локальных экстремумов f дискретно;

(f_2) если точка $x \in M^2$ не является локальным экстремумом f, то существует ее окрестность U_x, в которой f топологически сопряжена с функцией $\operatorname{Re} z^n$ в окрестности нуля для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Напомним, что непрерывные функции $g_1: V_1 \to \mathbb{R}$ и $g_2: V_2 \to \mathbb{R}$ называются *топологически сопряженными*, если для некоторых гомеоморфизмов $h: V_1 \to V_2$ и $h': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выполняется равенство $h' \circ g_1 = g_2 \circ h$.

Определение 1. *Назовем точки, в окрестности которых f сопряжена с* $\operatorname{Re} z$, *регулярными точками f. Точки, для которых f сопряжена с z^n, $n > 1$, назовем точками ветвления множества уровня. Точки плоскости, которые не являются регулярными, будем называть сингулярными точками f.*

Далее для краткости будем писать „точки ветвления” вместо „точки ветвления множества уровня f”. Понятно, что все сингулярные точки f изолированы.

Таким образом, функция f порождает на поверхности одномерное слоение с особенностями. Множество его особенностей совпадает с сингулярными точками f. Регулярные слои состоят из регулярных точек f и являются максимальными связными подмножествами множеств уровня этой функции, которые состоят из регулярных точек. Обозначим это слоение через $\mathfrak{F}_0$.

Очевидно, регулярные слои $\mathfrak{F}_0$ являются вложенными в M^2 одномерными многообразиями без края (либо окружностями, либо прямыми линиями).

Рассмотрим еще разбиение $\mathfrak{F}$ поверхности на компоненты множеств уровня f. Ясно, что слои $\mathfrak{F}_0$ являются подмножествами элементов разбиения $\mathfrak{F}$.

Элементы разбиения $\mathfrak{F}$ будем называть *регулярными*, если они не содержат сингулярных точек f. Элементы разбиения $\mathfrak{F}$, которые не являются регулярными, назовем *сингулярными*.

Фактор-пространство поверхности по разбиению $\mathfrak{F}$ далее будем обозначать через $\Gamma_{K-R}(f)$. Обозначим через $\pi_f : M^2 \to \Gamma_{K-R}(f)$ отображение проекции.

Поскольку f отображает элементы разбиения $\mathfrak{F}$ в точки пространства $\mathbb{R}$, существует (см. [1]) непрерывное фактор-отображение $\hat{f} : \Gamma_{K-R}(f) \to \mathbb{R}$ такое, что $f = \hat{f} \circ \pi_f$.

Для произвольной непрерывной функции (не обязательно удовлетворяющей условиям (f_1) и (f_2)) на квадрате I^2 либо на сфере S^2 фактор-пространство $\Gamma_{K-R}(f)$ является дендритом (см. [2]).

С другой стороны, известно, что для гладкой функции f с изолированными особенностями, заданной на двумерной компактной поверхности, пространство $\Gamma_{K-R}(f)$ можно наделить структурой *топологического графа* (см. [3]), который называется *графом Кронрода – Риба* функции f.

Напомним некоторые определения и конструкции.

Будем говорить, что граф *конечен*, если множества его вершин и ребер конечны. Граф *локально конечен*, если каждая его вершина инцидентна конечному числу ребер. Для локально конечного графа количество ребер, которым инцидентна вершина, называется *порядком вершины*. *Петлей* называется ребро графа, концы которого совпадают. *Листьями* называются вершины порядка один.

Пусть G — локально конечный (не обязательно конечный) граф без петель. Рассмотрим G как одномерный предсимплициальный комплекс, нульмерными симплексами которого являются вершины, а одномерными симплексами — ребра (см. [4]). Отметим, что если граф не содержит кратных ребер, то он является симплициальным комплексом. Рассмотрим абстрактный полиэдр $|G|$, соответствующий этому комплексу. Топология на $|G|$ порождается покрытием, состоящим из замкнутых симплексов комплекса G (подмножество $A \subset |G|$ является замкнутым, если и только если его пересечение с любым ребром G замкнуто). Далее, говоря о топологии на графе G, будем подразумевать топологическое пространство $|G|$.

Граф G, на котором задана описанная выше структура топологического пространства, называется *топологическим графом*. Далее будем рассматривать только такие графы, поэтому слово „топологический” будем опускать.

Замкнутым ребром G будем называть соответствующий замкнутый одномерный симплекс, *открытым ребром* — открытый симплекс (ребро без вершин, являющихся его концами).

Отметим, что только по топологическому пространству $|G|$ нельзя восстановить структуру графа G. Препятствием являются вершины порядка два.

Напомним (см. [5]), что *порядком* $\mathrm{ord}_p X$ *топологического пространства* X *в точке* p называется инфимум таких кардинальных чисел $\mathfrak{n}$, что существует сколь угодно малая открытая окрестность U точки p, для которой мощность множества $\mathrm{Fr}\, U$ не превышает $\mathfrak{n}$.

Для топологического графа G порядок любой его вершины v совпадает с $\mathrm{ord}_v |G|$. Для любой точки $p \in |G|$, которая не является вершиной, $\mathrm{ord}_p |G| = 2$. Таким образом, в топологическом пространстве $|G|$ вершины графа G порядка 2 ничем не отличаются от точек, которые не являются вершинами G.

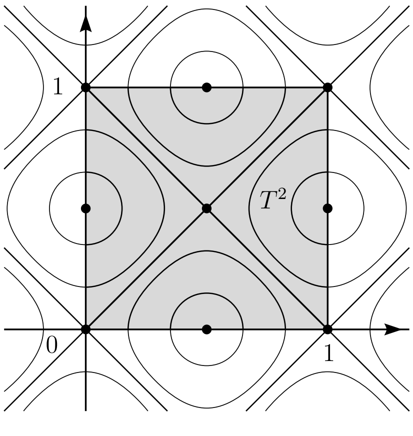
Легко видеть, что для того, чтобы восстановить по топологическому пространству $|G|$ граф G, достаточно знать дополнительно множество вершин V графа G.

В графе Кронрода – Риба вершинам соответствуют компоненты множеств уровня функции, которые содержат сингулярные точки. Как показывает следующий пример, образы таких компонент в пространстве $\Gamma_{K-R}(f)$ могут иметь порядок два.

Рассмотрим на плоскости функцию $\hat{f}(x,y) = \sin\pi(x-y)\cdot\sin\pi(x+y)$. Можно показать, что это функция Морса. Она имеет минимумы в точках с координатами $(k, m+1/2)$, максимумы в точках $(k+1/2, m)$, седла в точках (k,m), $(k+1/2, m+1/2)$, $k,m\in\mathbb{Z}$. Все остальные ее точки регулярны. Ее единственное сингулярное множество уровня $\hat{f}^{-1}(0)$ связно.

Легко видеть, что эта функция 1-периодична по каждой координате. Поэтому корректно определена такая функция $f\colon \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$, что $\hat{f} = f\circ \mathrm{pr}$. Здесь $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$ — двумерный тор, который является фактор-пространством плоскости по целочисленной решетке, $\mathrm{pr}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ — отображение проекции.

Непосредственная проверка показывает, что каждое множество уровня функции f связно. Функция f имеет на торе один максимум $\mathrm{pr}(1/2,0)$, один минимум $\mathrm{pr}(0,1/2)$ и две седловые точки, $\mathrm{pr}(0,0)$ и $\mathrm{pr}(1/2,1/2)$, которые лежат на множестве уровня $f^{-1}(0)$. Множества уровня функции $\hat{f}(x,y)$ и фундаментальная область тора $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ изображены на рисунке.



Пространство $\Gamma_{K-R}(f)$ гомеоморфно отрезку, $\pi_f(f^{-1}(0))$ является его внутренней точкой. Если считать вершинами образы $\pi_f(f^{-1}(-1))$, $\pi_f(f^{-1}(0))$, $\pi_f(f^{-1}(1))$ сингулярных компонент множеств уровня f, то граф Кронрода – Риба функции f является деревом, состоящим из двух ребер.

Приведенные аргументы являются обоснованием для следующего определения.

Определение 2. *Пусть K — объединение всех компонент множеств уровня f, которые содержат сингулярные точки, $V = \pi_f(K)$. Пара $(\Gamma_{K-R}(f), V)$ называется графом Кронрода – Риба функции f.*

Далее будем называть графом Кронрода – Риба пространство $\Gamma_{K-R}(f)$, подразумевая при этом, что указано множество его вершин V.

Для функции f на некомпактной поверхности M^2 пространство $\Gamma_{K-R}(f)$ может быть намного сложнее, чем в компактном случае. В частности, оно, как правило, не компактно и может не быть хаусдорфовым. Например, для функции $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$, образы $\pi_f\big((-\infty,0)\times\{0\}\big)$ и $\pi_f\big((0,\infty)\times\{0\}\big)$ компонент множества уровня $f^{-1}(0)$ не отделимы в пространстве $\Gamma_{K-R}(f)$.

Наша цель — выделить условия, при которых пространство $\Gamma_{K-R}(f)$ имеет простое строение.

Рассмотрим следующие условия:

(k_1) Компоненты множества уровня f могут содержать не более конечного количества сингулярных точек.

(k_2) Пусть K — объединение всех компонент множеств уровня f, которые содержат сингулярные точки. Для любого компакта $C \subset M^2$ множество $f(C \cap K)$ конечно.

(k_3) Пусть для $a \in f(M^2)$ точки $x_1, x_2 \in M^2$ принадлежат разным компонентам множества уровня $f^{-1}(a)$. Тогда найдутся открытые окрестности $U_1 \ni x_1$ и $U_2 \ni x_2$ такие, что для каждого $b \in f(M^2)$ и компоненты F_b множества уровня $f^{-1}(b)$ выполняется соотношение $(F_b \cap U_1 = \varnothing) \vee (F_b \cap U_2 = \varnothing)$.

Определение 3. *Скажем, что непрерывная функция* $f: M^2 \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющая условиям* (f_1) *и* (f_2), *является K-R-простой, если она удовлетворяет также условиям* (k_1)–(k_3).

Определение 4. *Пусть V_0 — подмножество множества листьев V_l графа G (случай $V_0 = \varnothing$ не исключается).*

Пусть $e \subset G$ — (замкнутое) ребро G, инцидентное некоторому листу из V_0. Множество $e \setminus V_0$ назовем черенком. Пространство $G_0 = G \setminus V_0$ называется топологическим графом с черенками.

В данной статье будет доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть непрерывная функция f, удовлетворяющая условиям* (f_1) *и* (f_2), *является K-R-простой.*

Тогда пространство $\Gamma_{K-R}(f)$ является графом с черенками.

Множество вершин графа $\Gamma_{K-R}(f)$ совпадает с образом множества K сингулярных элементов разбиения $\mathfrak{F}$.

Замкнутые ребра $\Gamma_{K-R}(f)$ являются образами замыканий компонент дополнения $M^2 \setminus K$.

Черенки являются образами замыканий компонент дополнения $M^2 \setminus K$, имеющих связную границу.

1.1. Случай гладких функций с изолированными особыми точками. Пусть f — гладкая функция на M^2 с изолированными критическими точками.

Если $x \in M^2$ — регулярная точка функции f, то по теореме о ранге, которая является следствием из теоремы о неявной функции (см. [6]), существует диффеоморфизм некоторой окрестности U_x точки x на окрестность начала координат в $\mathbb{R}^2$, который отображает компоненты пересечения множеств уровня f с U_x в множества уровня координатной проекции $\pi_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi_1: (x_1, x_2) \mapsto x_1$.

Известна следующая теорема.

Теорема 2 [7, 8]. *Для каждой изолированной критической точки x_0 (кроме локальных минимумов и максимумов) функции $f \in C^3(M^2, \mathbb{R})$ существует окрестность, в которой функция топологически сопряжена с функцией $\operatorname{Re} z^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.*

Согласно этой теореме и теореме о ранге f удовлетворяет условиям (f_1) и (f_2). Таким образом, для функции $f \in C^3(M^2, \mathbb{R})$ справедлив аналог теоремы 1.

***Замечание* 1.** Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1 x_2^2 = x_1(x_1^2 + x_2^2)$. В начале координат она имеет изолированную особую точку, но при этом точка 0 не является ни локальным экстремумом, ни точкой ветвления. Следовательно, по теореме 2 в особой точке 0 для данной функции имеем $k = 1$.

Итак, существуют изолированные особые точки гладких функций, которые не являются сингулярными в смысле определения 1. В силу теоремы 1, если компонента множества уровня такой точки не содержит других сингулярных точек, то ее образ в графе Кронрода – Риба, согласно определению 2, не является вершиной.

***Замечание* 2.** Если изолированная особая точка гладкой функции не является сингулярной в смысле определения 1, то топологически структура множеств уровня функции в окрестности этой точки ничем не отличается от аналогичной структуры в окрестности регулярной точки. Однако, с точки зрения гладкой структуры, такая особая точка не является регулярной.

Возможно, в зависимости от целей исследования для случая гладкой функции правильнее считать вершинами графа Кронрода – Риба f все ее особые точки (точки, где $\operatorname{grad} f = 0$).

Далее будем обозначать через $\overline{A}$ и $\operatorname{Fr} A$ замыкание и границу множества A соответственно.

2. Свойства *K*-*R*-простых функций. Пусть $f\colon M^2 \to \mathbb{R}$ — непрерывная K-R-простая функция, $\mathfrak{F}_0$ и $\mathfrak{F}$ — разбиения плоскости на подмножества линий уровня f, определенные выше.

Пусть $\alpha\colon \mathbb{R} \to M^2$ — простая непрерывная кривая. Обозначим

$$L' = \bigcap_{b'>0} \overline{\alpha(\{t \in \mathbb{R} \mid t < -b'\})},$$

$$L'' = \bigcap_{b''>0} \overline{\alpha(\{t \in \mathbb{R} \mid t > b''\})}.$$

Назовем пересечение

$$L = \bigcap_{a>0} \overline{\alpha(\mathbb{R} \setminus [-a, a])} = L' \cup L''$$

предельным множеством кривой α. Другими словами, можно сказать, что предельное множество состоит из предельных точек последовательностей вида $\{\alpha(\tau_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ таких, что $|\tau_i| \to \infty$ при $i \to \infty$.

***Замечание* 3.** Каждое множество $\alpha([-a, a])$, $a > 0$, является компактом как образ компакта $[-a, a]$ при непрерывном отображении α в хаусдорфово пространство M^2. Поэтому

$$L \cup \alpha(\mathbb{R}) = \bigcap_{a>0} \left(\overline{\alpha(\mathbb{R} \setminus [-a, a])} \cup \alpha([-a, a])\right) = \overline{\alpha(\mathbb{R})}.$$

Предложение 1. *Пусть любая точка множества L имеет сколь угодно малую окрестность такую, что $\alpha(\mathbb{R})$ пересекается с границей этой окрестности не более чем в конечном числе точек.*

Тогда каждое из множеств L' и L'' содержит не более одной точки.

Доказательство. Пусть $L' \neq \varnothing$. Тогда найдется $x \in L'$. Используя то, что пространство M^2 удовлетворяет первой аксиоме счетности, можно выбрать последовательность $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ окрестностей точки x, удовлетворяющих следующим условиям:

(1) $\alpha(\mathbb{R})$ пересекается с границей U_k не более чем в конечном числе точек для каждого $k \in \mathbb{N}$;

(2) $\overline{U}_{k+1} \subset U_k$, $k \in \mathbb{N}$;

(3) $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k = \{x\}$.

Из условий (2) и (3) следует, что $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{U}_k = \{x\}$.

Предположим, что $\operatorname{Fr} U_k \cap \alpha(\mathbb{R}) \neq \varnothing$. Пусть $\operatorname{Fr} U_k \cap \alpha(\mathbb{R}) = \{\tau_1^k, \ldots, \tau_{n(k)}^k\}$. Обозначим $t_k = \min(\tau_1^k, \ldots, \tau_{n(k)}^k)$ и $A_k = \alpha(\{t \in \mathbb{R} \mid t < t_k\})$.

Пусть $A_k = \alpha(\mathbb{R})$, если $\operatorname{Fr} U_k \cap \alpha(\mathbb{R}) = \varnothing$.

По построению A_k не пусто и $A_k \cap \operatorname{Fr} U_k = \varnothing$. Множество A_k является связным, как образ связного множества под действием непрерывного отображения α. Поэтому либо $A_k \subset U_k$, либо $A_k \cap U_k = \varnothing$.

Ясно, что $L' \subset \overline{A}_k$, следовательно, $x \in \overline{A}_k$ и $A_k \cap U_k \neq \varnothing$. Таким образом, $A_k \subset U_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Итак,

$$L' \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{A}_k \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{U}_k = \{x\}.$$

Для множества L'' рассуждения аналогичны.

Предложение 1 доказано.

Легко видеть, что определение предельного множества не зависит от выбора параметризации простой непрерывной кривой. Таким образом, можно говорить о предельном множестве для множества $\alpha(\mathbb{R})$.

Лемма 1. *Регулярные слои $\mathfrak{F}_0$ являются вложенными в M^2 окружностями или открытыми интервалами.*

Если слой гомеоморфен интервалу, то каждое из подмножеств L' и L'' его предельного множества либо пусто, либо является точкой ветвления.

Доказательство. В силу определения 1 регулярные слои $\mathfrak{F}_0$ являются вложенными в M^2 одномерными многообразиями без края (либо окружностями, либо интервалами).

Пусть элемент разбиения $F \in \mathfrak{F}_0$, принадлежащий множеству уровня $f^{-1}(c)$, гомеоморфен интервалу. Зафиксируем вложение $\alpha\colon \mathbb{R} \to M^2$, $\alpha(\mathbb{R}) = F$. Пусть L' и L'' — те же, что и выше. Заметим, что $L' \cup L'' \subset \overline{F}$. Из непрерывности f следует, что $L' \cup L'' \subset f^{-1}(c)$.

Пусть x — регулярная точка множества уровня $f^{-1}(c)$. Согласно определению 1 точка x имеет окрестность U, все точки которой являются регулярными, такую, что множество $A = U \cap f^{-1}(c)$ является гомеоморфным образом интервала (в частности, оно связно). Поэтому множество A является подмножеством одного из элементов разбиения $\mathfrak{F}_0$. Пусть $A \subset F'$, $F' \in \mathfrak{F}_0$.

Если $F' \neq F$, то $F \cap U = \varnothing$. Тогда $\overline{F} \cap U = \varnothing$ и $x \notin L' \cup L''$.

Пусть $F' = F$. Тогда $A \subset \alpha(\mathbb{R})$, в частности $x = \alpha(t_0)$ для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}$.

Множество $\alpha^{-1}(U)$ — открытая окрестность точки t_0 в $\mathbb{R}$. Следовательно, найдутся $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ такие, что $t_1 < t_0 < t_2$ и интервал $Q = (t_1, t_2)$ содержится в $\alpha^{-1}(U)$. Поскольку отображение α является вложением, множество $\alpha(Q)$ — открытая окрестность точки x в пространстве $\alpha(\mathbb{R})$ в индуцированной с M^2 топологии. Следовательно, существует открытая окрестность V точки x в M^2, для которой $V \cap \alpha(\mathbb{R}) = \alpha(Q)$. Тогда справедливо равенство

$$V \cap \Big(\alpha(\{t \in \mathbb{R} \mid t < t_1\}) \cup \alpha(\{t \in \mathbb{R} \mid t > t_2\})\Big) = \varnothing.$$

Из этого непосредственно следует, что $x \notin L' \cup L''$.

Итак, мы доказали, что регулярная точка множества уровня $f^{-1}(c)$ не может принадлежать предельному множеству слоя $F \in \mathfrak{F}_0$.

Пусть x — сингулярная точка множества уровня $f^{-1}(c)$. Тогда x является либо локальным экстремумом, либо точкой ветвления f.

Согласно условию (f_1) множество локальных экстремумов f дискретно. Поэтому любая точка локального экстремума является изолированной точкой множества уровня f и не может принадлежать предельному множеству.

Итак, предельное множество слоя $F \in \mathfrak{F}_0$ состоит только из точек ветвления.

Пусть x — точка ветвления. Согласно определению 1 точка x имеет окрестность U_x, в которой f топологически сопряжена с функцией $\operatorname{Re} z^n$ в окрестности нуля для некоторого $n > 1$. Легко видеть, что существуют сколь угодно малые окрестности точки x такие, что их граница пересекается с множеством уровня $f^{-1}(c)$ ровно в $2n$ точках. Следовательно, границы таких окрестностей пересекаются с $F = \alpha(\mathbb{R}) \subset f^{-1}(c)$ в конечном числе точек и условия предложения 1 выполнены.

Лемма 1 доказана.

***Следствие* 1.** *Регулярные элементы разбиения $\mathfrak{F}$ являются либо вложенными в M^2 окружностями, либо интервалами.*

Если регулярный элемент разбиения гомеоморфен интервалу, то его предельное множество пусто.

***Следствие* 2.** *Пусть F — регулярный элемент разбиения $\mathfrak{F}_0$. Предположим, что либо множество F гомеоморфно окружности, либо F гомеоморфно интервалу и его предельное множество пусто.*

Тогда множество F является регулярным элементом разбиения $\mathfrak{F}$.

Предложение 2. *Пусть подмножество R регулярного элемента F разбиения $\mathfrak{F}_0$ гомеоморфно отрезку.*

Существуют открытая окрестность N множества R и гомеоморфизмы $h\colon \overline{N} \to [-1,1]^2$, $h'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что:

(1) $0 \in h(R) \subset \{0\} \times (-1,1)$;

(2) $h' \circ f = \mathrm{pr}_1 \circ h$, *где* $\mathrm{pr}_1 : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$, $\mathrm{pr}_1(x_1,x_2) = x_1$ — *координатная проекция.*

Доказательство. Пусть G^* — поверхность M^2 без множества локальных экстремумов f. Из свойств (f_1) и (f_2) следует, что G^* является двумерной поверхностью и все особые слои $\mathfrak{F}_0$ на G^* являются точками ветвления.

Поэтому можно применить лемму 3.1 из [9], которая утверждает, что существуют открытая окрестность N множества R и гомеоморфизм $h\colon \overline{N} \to [-1,1]^2$ такие, что $0 \in h(R) \subset \{0\} \times \times (-1,1)$, и разбиение множества $\overline{N}$, элементами которого являются кривые $h^{-1}(\{c\} \times [-1,1])$, $c \in [-1,1]$, подчинено разбиению $\mathfrak{F}_0$ (каждая кривая $h^{-1}(\{c\} \times [-1,1])$ содержится в некотором элементе разбиения $\mathfrak{F}_0$).

Ясно, что каждое множество $h^{-1}(\{c\} \times [-1,1])$ является подмножеством некоторого множества уровня f. Поэтому (см. [1]) существует непрерывное фактор-отображение $g\colon [-1,1] \to \to \mathbb{R}$, которое замыкает коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
[-1,1]^2 & \xrightarrow{h^{-1}} & \overline{N} \\
{\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\
[-1,1] & \xrightarrow[g]{} & \mathbb{R}\,.
\end{array}$$

Докажем инъективность отображения g.

Пусть для $t_1 < t_2$ выполняется равенство $g(t_1) = g(t_2) = c$. Обозначим $W = (t_1, t_2) \times \times (-1, 1) \subset [-1, 1]^2$, $V = h^{-1}(W)$.

Если мы предположим, что $g(t) = c$ для всех $t \in (t_1, t_2)$, то получим равенство $c = f(x)$, $x \in V$. Однако согласно свойству (f_1) функция f не может быть постоянной на открытом множестве V. Таким образом, $g(t) \neq c$ для некоторого $t \in (t_1, t_2)$.

Непрерывная функция g на компакте $[t_1, t_2]$ достигает своих максимального и минимального значений. Мы уже проверили, что одно из них отличается от c. Без ограничения общности рассуждений будем считать, что $g(t_0) = \max\{g(t) \mid t \in [t_1, t_2]\} \neq c$ для некоторого $t_0 \in (t_1, t_2)$.

Обозначим $w_0 = (t_0, 0) \in W$, $x_0 = h^{-1}(w_0) \in V$. По построению $g \circ \mathrm{pr}_1(w) \leq g \circ \mathrm{pr}_1(w_0)$ для всех $w \in W$. Следовательно, $f(x) \leq f(x_0)$ для каждого $x \in V$ и x_0 является точкой локального максимума f. Однако $V \subset N \subset G^*$ и G^* не содержит локальных экстремумов f.

Полученное противоречие доказывает строгую монотонность g. Без ограничения общности будем считать g возрастающей функцией. Образ g является компактным подмножеством $\mathbb{R}$. Пусть $g([-1, 1]) = [a_1, a_2]$. Продолжим g на $\mathbb{R}$ следующим образом:

$$\hat{g}(t) = \begin{cases} a_1 + (t+1) & \text{при} \quad t < -1, \\ g(t) & \text{при} \quad t \in [-1, 1], \\ a_2 + (t-1) & \text{при} \quad t > 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\hat{g} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является гомеоморфизмом.

Пусть $h' = \hat{g}^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Поскольку по построению $f(\overline{N}) = g([-1, 1]) = [a_1, a_2]$ и $\hat{g}^{-1}|_{[a_1, a_2]} = g^{-1}|_{[a_1, a_2]}$, то $h' \circ f = \mathrm{pr}_1 \circ h$.

Предложение 2 доказано.

Предложение 3. *Для любого открытого $U \subset M^2$ множество*

$$W(U) = \{F \in \mathfrak{F}_0 \mid F \cap U \neq \varnothing\}$$

открыто в M^2.

Доказательство. Пусть $x \in W(U) \cap F$, $F \in \mathfrak{F}_0$. Тогда $F \cap U \neq \varnothing$.

Если F — сингулярный элемент $\mathfrak{F}_0$, то $F = \{x\}$ и $x \in U \subset \operatorname{Int} W(U)$.

Пусть F — регулярный элемент $\mathfrak{F}_0$. Если $x \in U$, то x — внутренняя точка множества $W(U)$.

Предположим, что $x \notin U$. Зафиксируем $x' \in U \cap F$. Согласно лемме 1 F является вложенным в M^2 интервалом или окружностью. Тогда существует подмножество $R \subset F$, которое гомеоморфно отрезку и содержит точки x и x'.

Пусть открытая окрестность N множества R и гомеоморфизмы h и h' удовлетворяют предложению 2. Легко видеть, что каждое множество $h^{-1}(\{c\} \times (-1, 1))$, $c \in (-1, 1)$, связно, принадлежит некоторому множеству уровня f и состоит из регулярных точек (в частности, $R \subset h^{-1}(\{0\} \times (-1, 1)) \subset F$). Поэтому из включения $h^{-1}(w) \in N \cap U$ следует $N \cap \cap h^{-1}(\mathrm{pr}_1^{-1}(\mathrm{pr}_1(w))) \subset W(U)$.

Координатная проекция pr_1 является открытым отображением, поэтому множество $N \cap \cap ((\mathrm{pr}_1 \circ h)_1^{-1}(\mathrm{pr}_1 \circ h(N \cap U)))$ открыто в M^2, содержит R (а вместе с ним и x) и является подмножеством $W(U)$.

Предложение 3 доказано.

Предложение 4. *Пространство Γ_{K-R} хаусдорфово.*

Доказательство. Пусть $F', F'' \in \mathfrak{F}$, $F' \subset f^{-1}(c')$, $F'' \subset f^{-1}(c'')$. Предположим, что $c' \neq c''$. Тогда множества $\pi_f(f^{-1}(\{c \mid c < (c'+c'')/2\}))$ и $\pi_f(f^{-1}(\{c \mid c > (c'+c'')/2\}))$ являются непересекающимися открытыми окрестностями точек $\pi_f(F')$ и $\pi_f(F'')$ пространства Γ_{K-R}.

Пусть F' и F'' — две разные компоненты множества уровня $f^{-1}(c)$.

Из условия (f_1) следует, что локальные экстремумы являются изолированными точками множества уровня f.

Пусть F' — регулярный элемент разбиения $\mathfrak{F}$ или точка локального экстремума f. Зафиксируем любую точку $x_1 \in F'$.

Если F' — сингулярный элемент $\mathfrak{F}$, не сводящийся к точке локального экстремума, он содержит хотя бы одну точку ветвления f. Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — все точки ветвления f, лежащие в множестве F' (согласно условию (k_1) их конечное число).

Аналогичным образом выберем конечный набор точек $y_1, \ldots, y_n \in F''$.

Зафиксируем открытое множество $Q \subset M^2$ с компактным замыканием такое, что $x_1, \ldots$ $\ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in Q$. Согласно условию ($\mathrm{k}_2$) найдется такое $\varepsilon > 0$, что множество $Q \cap$ $\cap f^{-1}((c-\varepsilon, c) \cup (c, c+\varepsilon))$ пересекается только с регулярными элементами разбиения $\mathfrak{F}$. Из непрерывности f следует, что $f^{-1}((c-\varepsilon, c+\varepsilon))$ является открытой окрестностью множества уровня $f^{-1}(c)$.

Обозначим $\hat{Q} = Q \cap f^{-1}((c-\varepsilon, c+\varepsilon))$. Ясно, что $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in \hat{Q}$.

Пусть U'_{ij} и U''_{ij} — окрестности точек x_i и y_j из условия (k_3), $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Уменьшая при необходимости эти окрестности, можно считать, что $U'_{ij}, U''_{ij} \subset \hat{Q}$. Аналогично, используя условие (f_2), окрестности U'_{ij} и U''_{ij} можно уменьшить так, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{gathered} U'_{ij} \cap f^{-1}(c) \subset F', \quad i = 1, \ldots, m, \\ U''_{ij} \cap f^{-1}(c) \subset F'', \quad j = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{1}$$

Для каждого $i = 1, \ldots, m$ множество $V'_i = \bigcap_{j=1}^{n} U'_{ij}$ является окрестностью точки x_i. Аналогично для каждого $j = 1, \ldots, n$ множество $V''_j = \bigcap_{i=1}^{m} U''_{ij}$ является окрестностью точки y_j. При этом для всех $F \in \mathfrak{F}$ выполняются соотношения

$$(F \cap V'_i = \varnothing) \vee (F \cap V''_j = \varnothing), \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Рассмотрим множества

$$W' = \left\{ F \in \mathfrak{F} \;\middle|\; F \cap \bigcup_{i=1}^{n} V'_i \neq \varnothing \right\},$$

$$W'' = \left\{ F \in \mathfrak{F} \;\middle|\; F \cap \bigcup_{j=1}^{n} V''_j \neq \varnothing \right\}.$$

Очевидно, что $F' \subset W'$, $F'' \subset W''$, $\pi_f^{-1}(\pi_f(W')) = W'$ и $\pi_f^{-1}(\pi_f(W'')) = W''$. Из соотношений (2) следует, что $W' \cap W'' = \varnothing$. Поэтому $\pi_f(W') \cap \pi_f(W'') = \varnothing$.

Для завершения доказательства достаточно показать, что множества W' и W'' открыты в M^2. Тогда по определению фактор-топологии (см. [1]) множества $\pi_f(W')$ и $\pi_f(W'')$ будут тоже открытыми.

Рассмотрим множества

$$\tilde{W}' = \left\{ F_0 \in \mathfrak{F}_0 \;\middle|\; F_0 \cap \bigcup_{i=1}^{n} V_i' \neq \varnothing \right\},$$

$$\tilde{W}'' = \left\{ F_0 \in \mathfrak{F}_0 \;\middle|\; F_0 \cap \bigcup_{j=1}^{n} V_j'' \neq \varnothing \right\}.$$

Согласно предложению 3 они открыты в M^2. Поскольку $U'_{ij}, U''_{ij} \subset \hat{Q}$, то $W', W'', \tilde{W}', \tilde{W}'' \subset f^{-1}((c-\varepsilon, c+\varepsilon))$, причем множества $W' \cap f^{-1}((c-\varepsilon, c) \cup (c, c+\varepsilon))$ и $W'' \cap f^{-1}((c-\varepsilon, c) \cup (c, c+\varepsilon))$ состоят из регулярных элементов разбиения $\mathfrak{F}$ (которые, в свою очередь, являются регулярными элементами разбиения $\mathfrak{F}_0$).

Из соотношений (1) следует, что

$$W' \cap f^{-1}(c) = F'. \tag{3}$$

Если F' — регулярный элемент разбиения $\mathfrak{F}$ или точка локального экстремума f, то $F' \subset \tilde{W}'$. Тогда множество $W' = \tilde{W}'$ открыто в M^2.

Пусть F' — сингулярный элемент разбиения $\mathfrak{F}$, который не сводится к точке локального экстремума. Тогда все сингулярные элементы разбиения $\mathfrak{F}_0$, которые содержатся в F', являются точками ветвления. Это точки $x_1, \ldots, x_m$.

Согласно лемме 1 и следствию 2 все регулярные элементы $\mathfrak{F}_0$, которые содержатся в F', гомеоморфны интервалу и имеют непустые предельные множества. Если регулярный элемент $F_0 \in \mathfrak{F}_0$ лежит в F', то его предельное множество L содержит одну из точек $x_1, \ldots, x_m$. Из замечания 3 получим соотношение

$$F_0 \cap \bigcup_{i=1}^{m} V_i' \neq \varnothing.$$

Из этого следует, что $F' \subset \tilde{W}' \cap f^{-1}(c)$. А так как $\tilde{W}' \subset W'$, то $\tilde{W}' = W'$ и множество W' открыто в M^2.

Для множества W'' рассуждения аналогичны.

Предложение 4 доказано.

Напомним (см. [1]), что множество $A \subset M^2$ называется *насыщенным множеством* относительно разбиения $\mathfrak{F}$, если для любого $F \in \mathfrak{F}$ из неравенства $F \cap A \neq \varnothing$ следует включение $F \subset A$. Другими словами, можно сказать, что A — насыщенное множество относительно разбиения $\mathfrak{F}$, если $A = \pi_f^{-1}(\pi_f(A))$.

При доказательстве предложения 4 мы построили специфическую окрестность компоненты множества уровня f (см. (3)). Фактически доказано следующее предложение.

Предложение 5. *Для любой компоненты F множества уровня $f^{-1}(c)$ существует насыщенная относительно разбиения $\mathfrak{F}$ окрестность W такая, что $W \cap f^{-1}(c) = F$.*

2.1. Компоненты дополнения $M^2 \setminus K$ и их проекции под действием π_f. Напомним, что K — объединение всех сингулярных элементов разбиения $\mathfrak{F}$. Пусть Q — компонента множества $M^2 \setminus K$.

Предложение 6. *Множество Q открыто в M^2.*

Доказательство. Докажем сначала, что множество K замкнуто.

Напомним (см. [10]), что топологическое пространство X называется *компактно порожденным*, если подмножество $A \subset X$ замкнуто в X в случае, когда для каждого компактного подпространства $C \subset X$ замкнуто пересечение $A \cap C$. Известно [10], что локально компактное пространство является компактно порожденным. Таким образом, M^2 — компактно порожденное пространство.

Пусть $C \subset M^2$ — компактное множество. По условию (k$_2$) множество $f(K \cap C)$ конечно. Пусть $f(K \cap C) = \{c_1, \ldots, c_m\}$.

Согласно предложению 5 каждая компонента произвольного множества уровня f является его открыто-замкнутым подмножеством. Множества уровня непрерывной функции f замкнуты, поэтому для любого множества уровня объединение произвольного семейства его компонент является замкнутым множеством. Таким образом, все множества $f^{-1}(c_i) \cap K$, $i = 1, \ldots, m$, замкнуты. Тогда и множество

$$K \cap C = K \cap C \cap \bigcup_{i=1}^{m} f^{-1}(c_i)$$

замкнуто.

Из произвольности выбора компакта $C \subset M^2$ следует, что множество K замкнуто в M^2.

Пространство M^2 локально связно. Поэтому (см. [5]) компонента Q открытого множества $M^2 \setminus K$ сама является открытым множеством.

Предложение 6 доказано.

Предложение 7. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \colon [0,1] \to \overline{Q}$ — непрерывные кривые, имеющие следующие свойства*:

(1) $\alpha_1(0), \alpha_2(0) \in F_0$ *для некоторого регулярного элемента* $F_0 \in \mathfrak{F}$;

(2) $f \circ \alpha_1(1) = f \circ \alpha_2(1)$;

(3) *функции* $f \circ \alpha_1, f \circ \alpha_2 \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *строго монотонны*;

(4) $\alpha_1(t), \alpha_2(t) \in Q$ *для всех* $t \in [0,1)$.

Тогда для любых $\tau_1, \tau_2 \in [0,1]$ из равенства $f \circ \alpha_1(\tau_1) = f \circ \alpha_2(\tau_2)$ следует, что точки $\alpha_1(\tau_1)$ и $\alpha_2(\tau_2)$ принадлежат одной компоненте множества уровня f.

Доказательство. Обозначим $x_1 = \alpha_1(0)$, $x_2 = \alpha_2(0)$, $y_1 = \alpha_1(1)$, $y_2 = \alpha_2(1)$, $c_0 = f(x_1) = f(x_2)$, $c_1 = f(y_1) = f(y_2)$. Не ограничивая общности рассуждений будем считать, что $c_0 < c_1$.

Изменим для удобства параметризацию кривой α_2.

Функции $f \circ \alpha_1$ и $f \circ \alpha_2$ строго монотонны и $f \circ \alpha_1(k) = f \circ \alpha_2(k)$, $k = 0, 1$, поэтому $f \circ \alpha_1([0,1]) = f \circ \alpha_2([0,1]) = [c_0, c_1]$ и определено непрерывное отображение $\gamma = (f \circ \alpha_2)^{-1} \circ f \circ \alpha_1 \colon [0,1] \to [0,1]$. При этом γ биективно и $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$. Заменив α_2 на $\alpha_2' = \alpha_2 \circ \gamma \colon [0,1] \to \overline{Q}$, получим пару непрерывных кривых α_1 и α_2', которые удовлетворяют всем условиям предложения, а также следующему условию:

$$f \circ \alpha_1(t) = f \circ \alpha_2'(t) \qquad \text{для всех} \quad t \in [0,1].$$

Далее вместо α_2' будем писать α_2, подразумевая, что это условие выполняется.

Из строгой монотонности функций $f \circ \alpha_1$ и $f \circ \alpha_2$ заключаем, что $f \circ \alpha_1(\tau_1) \neq f \circ \alpha_2(\tau_2)$ при $\tau_1 \neq \tau_2$.

Рассмотрим множество

$$T = \{t \in [0,1] \mid \forall \tau \in [0,t]\ \exists F_\tau \in \mathfrak{F} \colon \alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau) \in F_\tau\}.$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что $T = [0,1]$.

Очевидно, $0 \in T$, так как $\alpha_1(0), \alpha_2(0) \in F_0$.

Проверим, что множество T открыто в пространстве $[0,1]$.

Пусть $a \in T$. Тогда по определению $[0,a] \subset T$. Если $a = 1$, то $T = [0,1]$.

Предположим, что $a < 1$. Тогда $\alpha_1(a), \alpha_2(a) \in F_a$ для некоторого регулярного элемента $F_a \in \mathfrak{F}$.

Если $\alpha_1(a) = \alpha_2(a)$, то вследствие условия (f_2) найдется окрестность U точки $\alpha_1(a)$ в M^2 такая, что на U функция f топологически сопряжена с функцией $\operatorname{Re} z$ в окрестности $(-1,1) \times (-1,1)$ начала координат. Легко видеть, что все непустые пересечения множеств уровня f с U являются связными. Вследствие непрерывности α_1 и α_2 существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau) \in U$ при всех $\tau \in [a, a+\varepsilon)$. Тогда точки $\alpha_1(\tau)$ и $\alpha_2(\tau)$ принадлежат одной компоненте связности множества уровня f при каждом $\tau \in [a, a+\varepsilon)$ и $[0, a+\varepsilon) \subset T$.

Пусть $\alpha_1(a) \neq \alpha_2(a)$. Поскольку элемент $F_a \in \mathfrak{F}$, содержащий точки $\alpha_1(a)$ и $\alpha_2(a)$, регулярен, он гомеоморфен либо окружности, либо интервалу (см. следствие 1). В любом случае найдется подмножество $R \in F_a$, гомеоморфное отрезку, которое содержит точки $\alpha_1(a)$ и $\alpha_2(a)$. Выберем окрестность $N \supset R$, $N \subset Q$, которая удовлетворяет предложению 2. Как и выше, все непустые пересечения множеств уровня f с N являются связными. Так как $\alpha_1(a), \alpha_2(a) \in R$, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau) \in N$ при всех $\tau \in [a, a+\varepsilon)$. Таким образом, и в этом случае $[0, a+\varepsilon) \subset T$ и множество T открыто в $[0,1]$.

Проверим, что множество T замкнуто.

Пусть $b \in \overline{T}$. Из $a \in T$ следует, что $[0,a] \subset T$. Поэтому $[0,b) \subset T$. Выберем возрастающую последовательность $\{t_k \in [0,1]\}_{k \in \mathbb{N}}$ такую, что $t_k \to b$ при $k \to \infty$. Поскольку $t_k \in T$ при всех $k \in \mathbb{N}$, для каждого k найдется $F_k \in \mathfrak{F}$, содержащее точки $\alpha_1(t_k)$, $\alpha_2(t_k)$.

Кривые α_1 и α_2 непрерывны, поэтому для любой пары окрестностей V_1 и V_2 точек $\alpha_1(b)$ и $\alpha_2(b)$ соответственно существует $m \in \mathbb{N}$, для которого $\alpha_1(t_m) \in V_1$ и $\alpha_2(t_m) \in V_2$. Тогда $(F_m \cap V_1 \neq \varnothing) \wedge (F_m \cap V_2 \neq \varnothing)$. По построению $f \circ \alpha_1(b) = f \circ \alpha_2(b)$. Поэтому из условия ($k_3$) заключаем, что $\alpha_1(b), \alpha_2(b) \in F_b$ для некоторого $F_b \in \mathfrak{F}$. Таким образом, $b \in T$ и множество T замкнуто.

Итак, T — непустое открыто-замкнутое подмножество связного пространства $[0,1]$. Следовательно, $T = [0,1]$.

Предложение 7 доказано.

Лемма 2. *Пусть точки $x, y \in Q$ принадлежат различным множествам уровня f. Тогда x и y можно соединить в Q простой непрерывной кривой $\alpha_{x,y} \colon [0,1] \to M^2$ так, что функция $f \circ \alpha_{x,y} \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ строго монотонна.*

Доказательство. Открытое связное подмножество Q локально линейно связного пространства M^2 является линейно связным (см. [5]). Поэтому существует простая непрерывная кривая $\alpha \colon [0,1] \to Q$ такая, что $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$.

Согласно свойству (f_2) функции f для каждого $t \in [0,1]$ найдутся окрестность $U_t \subset Q$ точки $\alpha(t)$ и гомеоморфизмы $h_t \colon U_t \to (-1,1) \times (-1,1)$, $h'_t \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $\mathrm{pr}_1 \circ h_t = h'_t \circ f$.

Из открытого покрытия $\{\alpha^{-1}(U_t)\}_{t \in [0,1]}$ отрезка $[0,1]$ выберем конечное подпокрытие. Пусть оно состоит из прообразов множеств $U_k = U_{t_k}$, $k = 1, \ldots, m$. Пусть $h_k \colon U_k \to (-1,1) \times (-1,1)$, $h'_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, — соответствующие гомеоморфизмы, для которых $\mathrm{pr}_1 \circ h_k = h'_k \circ f$, $k = 1, \ldots, m$.

Найдем число Лебега d покрытия $\{\alpha^{-1}(U_k)\}_{k=1}^{m}$. Зафиксируем натуральное $n > 1/d$. Набор точек $\tau_r = r/n$, $r = 0, \ldots, n$, имеет такое свойство: для каждого $r = 1, \ldots, n$ существует $k(r) \in \{1, \ldots, m\}$ такое, что $\tau_{r-1}, \tau_r \in \alpha^{-1}(U_{k(r)})$. Обозначим $x_r = \alpha(\tau_r)$. Тогда $x_{r-1}, x_r \in \in U_{k(r)}$, $r = 1, \ldots, n$.

Для каждого $r = 1, \ldots, n$ соединим точки $h_{k(r)}(x_{r-1})$, $h_{k(r)}(x_r) \in (-1, 1)^2$ прямой линией $\mu_r : [0, 1] \to (-1, 1)^2$, $\mu_r(t) = th_{k(r)}(x_{r-1}) + (1 - t)h_{k(r)}(x_r)$, $t \in [0, 1]$. Очевидно, что функция $\mathrm{pr}_1 \circ \mu_r$ либо строго монотонна, либо постоянна. А так как отображение $h'_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является гомеоморфизмом, то и функция $(h'_r)^{-1} \circ \mathrm{pr}_1 \circ \mu_r$ имеет это свойство.

Обозначим $\alpha_r^1 = h_{k(r)}^{-1} \circ \mu_r : [0, 1] \to U_{k(r)}$. Ясно, что α_r^1 — простая непрерывная кривая, соединяющая точки x_{r-1} и x_r. Из равенств

$$(h'_{k(r)})^{-1} \circ \mathrm{pr}_1 \circ \mu_r = (h'_{k(r)})^{-1} \circ h'_{k(r)} \circ f \circ (h_{k(r)}^{-1} \circ \mu_r) = f \circ \alpha_r^1$$

следует, что функция $f \circ \alpha_r^1$ либо постоянна, либо строго монотонна.

Определим $\alpha^1 : [0, 1] \to Q$ следующим образом:

$$\alpha^1(t) = \alpha_r^1(tn - r + 1), \qquad \text{если} \quad t \in [(r - 1)/n, r/n].$$

По построению $\alpha_r^1(1) = \alpha_{r+1}^1(0) = x_r$, $r = 1, \ldots, n - 1$, поэтому это определение корректно и кривая α^1 непрерывна. Заметим, что α_r^1 может иметь самопересечения.

Итак, имеется конечное число максимальных неперекрывающихся отрезков, на которых функция $f \circ \alpha^1$ строго монотонна, и конечное число отрезков, на которых она постоянна. С помощью индукции изменим кривую α^1 так, чтобы остались отрезки строгой монотонности только одного типа (либо возрастания, либо убывания f).

Шаг индукции. Пусть для непрерывной кривой $\alpha^k : [0, 1] \to Q$, $\alpha^k(0) = x$, $\alpha^k(1) = y$, отрезок $[0, 1]$ можно представить в виде суммы конечного числа неперекрывающихся отрезков, каждый из которых является либо максимальным отрезком строгой монотонности функции $f \circ \alpha^k$, либо максимальным отрезком, на котором она постоянна.

Предположим, что найдутся точки $0 \leq t'_1 < t''_1 \leq t'_2 < t''_2 \leq 1$ такие, что при условии $t''_1 \neq t'_2$ отрезок $[t''_1, t'_2]$ является максимальным отрезком постоянства $f \circ \alpha^k$, а отрезки $[t'_1, t''_1]$ и $[t'_2, t''_2]$ являются максимальными отрезками строгой монотонности разных типов. Не ограничивая общности будем считать, что на первом из них $f \circ \alpha^k$ возрастает, а на втором убывает. Тогда $f \circ \alpha^k(t'_1) < f \circ \alpha^k(t''_1)$, $f \circ \alpha^k(t''_1) = f \circ \alpha^k(t'_2)$ и $f \circ \alpha^k(t'_2) > f \circ \alpha^k(t''_2)$.

Пусть $f \circ \alpha^k(t'_1) \leq f \circ \alpha^k(t''_2)$ (случай $f \circ \alpha^k(t'_1) \geq f \circ \alpha^k(t''_2)$ рассматривается аналогично). По теореме о промежуточном значении существует $t_0 \in [t'_1, t''_1)$, для которого $f \circ \alpha^k(t_0) = f \circ \alpha^k(t''_2)$.

По предположению функция $f \circ \alpha^k$ постоянна на отрезке $[t''_1, t'_2]$, поэтому точки $\alpha^k(t''_1)$ и $\alpha^k(t'_2)$ принадлежат одной компоненте связности множества уровня функции f и можно применить предложение 7 к непрерывным кривым

$$\beta_1(t) = \alpha^k((1 - t)t''_1 + tt_0),$$

$$\beta_2(t) = \alpha^k((1 - t)t'_2 + tt''_2), \quad t \in [0, 1].$$

Следовательно, точки $\beta_1(1) = \alpha^k(t_0)$ и $\beta_2(1) = \alpha^k(t''_2)$ принадлежат одной компоненте связности F множества уровня функции f. Поскольку носитель кривой α^k принадлежит Q, элемент $F \in \mathfrak{F}$ является регулярным и существует непрерывная кривая $\beta : [0, 1] \to F$, $\beta(0) = \alpha^k(t_0)$, $\beta(1) = \alpha^k(t''_2)$.

Рассмотрим непрерывную кривую $\alpha^{k+1}\colon [0,1] \to Q$,

$$\alpha^{k+1}(t) = \begin{cases} \beta\left(\dfrac{t-t_0}{t_2''-t_0}\right), & \text{если} \quad t \in [t_0, t_2''], \\ \alpha^k(t) & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Легко видеть, что отрезок $[0,1]$ можно представить в виде суммы конечного числа неперекрывающихся отрезков, каждый из которых является либо максимальным отрезком строгой монотонности функции $f \circ \alpha^{k+1}$, либо максимальным отрезком, на котором она постоянна. Вместо двух отрезков строгой монотонности $[t_1', t_1'']$ и $[t_2', t_2'']$ функции $f \circ \alpha^k$ новая функция $f \circ \alpha^{k+1}$ имеет один отрезок $[t_1', t_0]$ (или ни одного, если $t_1' = t_0$). Все остальные максимальные отрезки строгой монотонности функций $f \circ \alpha^k$ и $f \circ \alpha^{k+1}$ совпадают.

Таким образом, общее количество максимальных отрезков строгой монотонности функции $f \circ \alpha^{k+1}$ меньше, чем функции $f \circ \alpha^k$. Следовательно, стартуя с непрерывной кривой α^1, мы можем применить шаг индукции лишь конечное число раз.

Итак, существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что к кривой α^p шаг индукции уже неприменим. Легко видеть, что на всех максимальных отрезках строгой монотонности $f \circ \alpha^p$ имеет монотонность одного типа. Без ограничения общности можно считать, что на каждом из них $f \circ \alpha^p$ возрастает.

По построению существует такое разбиение $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_l = 1$ отрезка $[0,1]$, что $f \circ \alpha^p$ либо постоянна, либо строго возрастает на каждом $[t_{r-1}, t_r]$, $r = 1, \ldots, l$. При этом для каждой пары соседних отрезков на одном из них функция постоянна, а на другом возрастает.

Зафиксируем t_r такое, что на отрезке $[t_{r-1}, t_r]$ функция $f \circ \alpha^p$ постоянна. Пусть $[t_{r-1}, t_r] \subset \subset (f \circ \alpha^p)^{-1}(c_r)$. Будем считать, что $t_{r-1} \neq 0$ и $t_r \neq 1$. Связное множество $\alpha^p([t_{r-1}, t_r]) \subset Q$ принадлежит некоторому множеству уровня функции f, поэтому найдется регулярный элемент $F_r \in \mathfrak{F}$, который содержит $\alpha^p([t_{r-1}, t_r])$.

Согласно лемме 1 F_r является вложенным в M^2 интервалом или окружностью. Тогда, если $\alpha^p(t_{r-1}) \neq \alpha^p(t_r)$, существует подмножество $R \subset F_r \subset Q$, которое гомеоморфно отрезку и содержит точки $\alpha^p(t_{r-1})$ и $\alpha^p(t_r)$. Пусть открытая окрестность N множества R и гомеоморфизмы h и h' удовлетворяют предложению 2.

Если $\alpha^p(t_{r-1}) = \alpha^p(t_r)$, то в качестве N можно взять окрестность точки $\alpha^p(t_r)$, в которой f топологически сопряжена с $\operatorname{Re} z$ на $(-1,1)^2$.

Не ограничивая общности рассуждений можем считать, что $N \subset Q$.

Используя непрерывность кривой α^p, найдем точки $t' \in (t_{r-2}, t_{r-1})$ и $t'' \in (t_r, t_{r+1})$ такие, что $[t', t''] \subset (\alpha^p)^{-1}(N)$. Пусть $f \circ \alpha^p(t') = c'$, $f \circ \alpha^p(t'') = c''$. В точках t' и t'' неубывающая функция $f \circ \alpha^p$ строго возрастает, поэтому $c' < c_r < c''$, $[0, c'] = (f \circ \alpha^p)^{-1}(\{c \in \mathbb{R} \mid c \leq c'\})$, $[c'', 1] = (f \circ \alpha^p)^{-1}(\{c \in \mathbb{R} \mid c'' \leq c\})$.

Поскольку $h \circ \alpha^p(t_r) \in \{0\} \times (-1,1) \subset N$, то $h'(c_r) = h' \circ f \circ \alpha^p(t_r) = \operatorname{pr}_1 \circ h \circ \alpha^p(t_r) = 0$. Из монотонности гомеоморфизма h' следует, что числа $h'(c')$ и $h'(c'')$ имеют разные знаки. Без ограничения общности можем считать, что $h'(c') < 0 < h'(c'')$.

Соединим точки $u' = h \circ \alpha^p(t')$, $u'' = h \circ \alpha^p(t'')$ в $(-1,1)^2$ прямой линией $\mu\colon [0,1] \to \to (-1,1)^2$, $\mu(t) = tu'' + (1-t)u'$, $t \in [0,1]$. Так как $\operatorname{pr}_1 \circ \mu(0) = \operatorname{pr}_1(u') = \operatorname{pr}_1 \circ h \circ \alpha^p(t') = h' \circ \circ f \circ \alpha^p(t') = h'(c')$ и $\operatorname{pr}_1 \circ \mu(1) = h'(c'')$, функция $\operatorname{pr}_1 \circ \mu$ строго монотонна и $\operatorname{pr}_1 \circ \mu([0,1]) = = [h'(c'), h'(c'')]$.

Рассмотрим простую непрерывную кривую $\beta_r = h^{-1} \circ \mu\colon [0,1] \to N$, которая соединяет точки $\alpha^p(t')$ и $\alpha^p(t'')$. Из строгой монотонности функций h' и $h' \circ f \circ \beta_r = h' \circ f \circ h^{-1} \circ \mu = \operatorname{pr}_1 \circ \mu$ следует строгая монотонность функции $f \circ \beta_r$.

Заменим кривую α^p на $\hat{\alpha}\colon [0,1] \to Q$,

$$\hat{\alpha}(t) = \begin{cases} \beta_r\left(\dfrac{t-t'}{t''-t'}\right), & \text{если} \quad t \in (t', t''), \\ \alpha^p(t) & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Легко видеть, что функция $f \circ \hat{\alpha}$ строго возрастает на отрезке $[t_{r-2}, t_{r+1}]$. На остальных отрезках $[t_{s-1}, t_s]$ эта функция совпадает с $f \circ \alpha^p$.

Если на $[t_{r-1}, t_r]$ функция $f \circ \alpha^p$ постоянна, то одновременное выполнение равенств $t_{r-1} = 0$ и $t_r = 1$ невозможно, так как по условию леммы $f \circ \alpha^p(0) = f(x) \neq f(y) = f \circ \alpha^p(1)$. В силу этого найдется по крайней мере один отрезок $[t_{s-1}, t_s]$, соседний с $[t_{r-1}, t_r]$, на котором функция $f \circ \alpha^p$ строго возрастает.

Таким образом, для случаев $r = 1$ и $r = l$ можно очевидным образом изменить предыдущие рассуждения и построить кривую $\hat{\alpha}$ такую, что функция $f \circ \hat{\alpha}$ будет строго монотонна на отрезке $[t_0, t_2]$ или $[t_{l-2}, t_l]$, а на всех остальных $[t_{s-1}, t_s]$ эта функция совпадет с $f \circ \alpha^p$.

Итак, переходя от α^p к $\hat{\alpha}$, мы уменьшаем на единицу число максимальных отрезков, на которых композиция α и f постоянна. Повторив эту процедуру конечное число раз, придем к непрерывной кривой $\alpha_{x,y}\colon [0,1] \to Q$, $\alpha_{x,y}(0) = x$, $\alpha_{x,y}(1) = y$, для которой функция $f \circ \alpha_{x,y}$ строго монотонна на $[0,1]$.

Поскольку функция $f \circ \alpha_{x,y}$ строго монотонна по построению, кривая $\alpha_{x,y}$ не может иметь точек самопересечения и является простой непрерывной кривой.

Лемма 2 доказана.

***Следствие* 3.** *Если пересечение Q с множеством уровня f не пусто, то оно связно.*

Доказательство. Пусть $F_1 \cup F_2 \subset f^{-1}(c) \cap Q$ для некоторых $c \in \mathbb{R}$, $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$. Зафиксируем $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$.

Так как F_1 — регулярная компонента $f^{-1}(c)$, существует окрестность $U \subset Q$ точки x_1 такая, что $f|_U$ топологически сопряжена с $\operatorname{Re} z$ в некоторой окрестности нуля. Следовательно, существует $y \in U$, для которого $f(y) \neq f(x_1)$.

Воспользуемся леммой 2 и соединим точку y с точками x_1 и x_2 в Q простыми непрерывными кривыми α_1 и α_2 соответственно, такими, что функции $f \circ \alpha_1$ и $f \circ \alpha_2$ строго монотонны.

По построению $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = y$. Поскольку $f(x_1) = f \circ \alpha_1(1) = f \circ \alpha_2(1) = f(x_2)$, из предложения 7 следует, что $F_1 = F_2$.

Следствие 3 доказано.

2.2. Замыкания компонент дополнения $M^2 \setminus K$ и их проекции под действием π_f. Пусть, как и ранее, Q — компонента множества $M^2 \setminus K$.

Лемма 3. *Пусть точки $x, y \in \overline{Q}$ принадлежат различным множествам уровня f.*

Тогда x и y можно соединить в $\overline{Q}$ простой непрерывной кривой $\alpha_{x,y}\colon [0,1] \to M^2$ так, что $\alpha_{x,y}(t) \in Q$ для каждого $t \in (0,1)$ и функция $f \circ \alpha_{x,y}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ строго монотонна.

Доказательство. Если $x, y \in Q$, то доказательство сводится к применению леммы 2.

Предположим, что по крайней мере одна из точек x, y лежит в $\operatorname{Fr} Q$. Разобьем доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. Пусть $x \in \operatorname{Fr} Q$, $c = f(x)$. Докажем, что существует непрерывная кривая $\beta\colon [0,1] \to \overline{Q}$ такая, что $\beta(0) = x$, $\beta(t) \in Q$ для всех $t \in (0,1]$ и функция $f \circ \beta$ строго монотонна.

$\operatorname{Fr} Q \subset K$ согласно определению Q, поэтому точка x принадлежит некоторой сингулярной компоненте $F \in \mathfrak{F}$.

Пусть x является точкой локального экстремума f. Без ограничения общности будем считать, что f имеет в x локальный максимум. Тогда согласно условию (f_1) существует открытая окрестность $U \ni x$ такая, что $f(x') < f(x)$ для каждого $x' \in U \setminus \{x\}$.

Воспользуемся непрерывностью f, свойством (k_2) этой функции и выберем U настолько малой, что $U \setminus \{x\} \subset M^2 \setminus K$. Мы можем выбрать U связной. Тогда, как легко видеть, $U \setminus \{x\} \subset Q$.

Выберем счетную базу вложенных окрестностей точки x так, чтобы выполнялись следующие условия:

все $\overline{W}_k \subset U$ гомеоморфны замкнутым дискам, ограниченным окружностями $S_k = \mathrm{Fr}(W_k)$;

$\overline{W}_{k+1} \subset W_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Пусть $v_k \in S_k \subset U$, $f(v_k) = \max\{f(v) \mid v \in S_k\}$. Ясно, что $v_k \to x$ при $k \to \infty$. Поэтому $f(v_k) \to f(x)$. Поскольку $f(v_k) < f(x)$ при всех $k \in \mathbb{N}$, из последовательности $\{v_k\}$ можно выбрать подпоследовательность, на элементах которой значения f монотонно возрастают. Не ограничивая общности будем считать, что $f(v_k) < f(v_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$.

Воспользуемся леммой 2 и для каждого $k \in \mathbb{N}$ соединим точки v_k и v_{k+1} непрерывной кривой $\beta_k\colon [0,1] \to Q$, $\beta_k(0) = v_k$, $\beta_k(1) = v_{k+1}$, так, что функция $f \circ \beta_k$ строго возрастающая. Так как $f \circ \beta_k(t) > f(v_k)$ при $t > 0$ и $\beta_k(1) = v_{k+1} \in S_{k+1} \subset W_k$, то $\beta_k(t) \in W_k$ для всех $t \in (0,1]$. Отсюда непосредственно следует, что $\beta_m(t) \in W_k$ при любых $m > k$ и $t \in [0,1]$.

Рассмотрим отображение $\beta\colon [0,1] \to U$,

$$\beta(t) = \begin{cases} x & \text{при} \quad t = 0, \\ \beta_k(2 - 2^k t) & \text{при} \quad t \in \left[1/2^k, 1/2^{k-1}\right]. \end{cases}$$

Поскольку $\beta_{k+1}(0) = \beta_k(1)$, $k \in \mathbb{N}$, это определение корректно и кривая β непрерывна при $t > 0$. По построению $\beta(t) \in W_k$ при $t \in [0, 1/2^{k-1}]$, $k \in \mathbb{N}$. Так как $\{W_k\}$ — база окрестностей точки x, β непрерывна и при $t = 0$.

На каждом отрезке $[1/2^k, 1/2^{k-1}]$, $k \in \mathbb{N}$, функция $f \circ \beta$ монотонно убывает, следовательно, она монотонно убывает на $[0,1]$. Осталось заметить, что $\beta(t) \in U \setminus \{x\} \subset Q$ при $t > 0$.

Пусть теперь $x \in \mathrm{Fr}\, Q$ не является точкой локального экстремума f. Согласно свойству (f_2) функции f существуют $n \in \mathbb{N}$, окрестность $U \ni x$ и гомеоморфизмы $h\colon U \to W$, $h'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $h(x) = 0$ и $h' \circ f = g_n \circ h$. Здесь $W = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $g_n\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $g_n(z) = \mathrm{Re}\, z^n$.

Воспользуемся непрерывностью f и свойством (k_2) и выберем U настолько малой, что $U \setminus f^{-1}(c) \subset M^2 \setminus K$. Множество $f^{-1}(c) \cap U = h^{-1}(g_n^{-1}(0) \cap W)$ связное и содержит точку из K, следовательно, $U \cap K = U \cap f^{-1}(c)$.

Пусть $u \in U \cap Q$, $v = h(u) \in W$. Рассмотрим кривую $\hat{\beta}\colon [0,1] \to W$, $\hat{\beta}(t) = tv$, $t \in [0,1]$, которая соединяет точки $0 = h(x)$ и v в W. Так как $f(u) \neq f(x)$, то $g_n(v) = \mathrm{Re}\, v^n \neq 0$ и функция $g_n \circ \hat{\beta}(t) = t^n g_n(v)$ строго монотонна на $[0,1]$.

Рассмотрим непрерывную кривую $\beta = h^{-1} \circ \hat{\beta}\colon [0,1] \to U$, соединяющую точки x и u. Поскольку $g_n \circ \hat{\beta} = g_n \circ h \circ \beta = h' \circ f \circ \beta$ и функция $h'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ строго монотонна, функция $f \circ \beta$ также строго монотонна в области своего определения.

$f \circ \beta(t) \neq f(x) = c$ при $t \neq 0$. Следовательно, $\beta(t) \in M^2 \setminus K$ при $t \in (0,1]$ согласно выбору окрестности U. А так как $u = \beta(1) \in Q$, то $\beta(t) \in Q$ для всех $t \in (0,1]$.

Шаг 2. Пусть $x \in \mathrm{Fr}\, Q$, $y \in Q$. Докажем, что существует простая непрерывная кривая $\alpha_{x,y}$, соединяющая точки x и y и удовлетворяющая требованиям леммы.

Пусть $u \in Q$ — точка, которую можно соединить с x с помощью непрерывной кривой $\beta\colon [0,1] \to \overline{Q}$, $\beta(0) = x$, $\beta(1) = u$, удовлетворяющей требованиям шага 1. Не ограничивая общности рассуждений будем считать, что $f(x) < f(u) = f \circ \beta(1)$.

Покажем, что для любого $v \in Q$ выполняется неравенство $f(x) < f(v)$.

Предположим, что $f(x) \geq f(v)$ для некоторого $v \in Q$. Согласно лемме 2 точки u и v можно соединить непрерывной кривой $\gamma\colon [0,1] \to Q$, $\gamma(0) = u$, $\gamma(1) = v$, так, что функция $f \circ \gamma$ строго монотонна. По теореме о промежуточном значении существует $t_0 \in (0,1]$ такое, что $f \circ \gamma(t_0) = f(x)$.

Рассмотрим непрерывные кривые $\mu_1, \mu_2\colon [0,1] \to \overline{Q}$,

$$\mu_1(t) = \beta(1-t), \qquad \mu_2(t) = \gamma(tt_0), \quad t \in [0,1].$$

Очевидно, что функции $f \circ \mu_1$ и $f \circ \mu_2$ строго монотонны, а также $\mu_1(t), \mu_2(t) \in Q$ при $t < 1$. Поскольку $\mu_1(0) = \mu_2(0) = u$ и $f \circ \mu_1(1) = f \circ \mu_2(1) = f(x)$, кривые μ_1 и μ_2 удовлетворяют предложению 7. Следовательно, существует $F \in \mathfrak{F}$ такое, что $\mu_1(1), \mu_2(1) \in F$. А это невозможно, так как $\mu_2(1) \in Q$, $\mu_1(1) = x \in K$.

Полученное противоречие доказывает, что $f(x) < f(v)$. В частности, если $x \in \operatorname{Fr} Q$, то $f^{-1}(f(x)) \cap Q = \varnothing$.

Итак, $f(x) < f(y)$. Если $f(y) \leq f(u)$, по теореме о промежуточном значении существует $t_0 \in (0,1]$, для которого $f \circ \beta(t_0) < f(y)$. Если $f(y) > f(u)$, возьмем $t_0 = 1$. Воспользуемся леммой 2 и соединим точки $\beta(t_0)$ и y простой непрерывной кривой $\hat{\beta}\colon [0,1] \to Q$ так, что функция $f \circ \hat{\beta}$ монотонно возрастает.

Рассмотрим непрерывную кривую $\alpha_{x,y}\colon [0,1] \to \overline{Q}$,

$$\alpha_{x,y}(t) = \begin{cases} \beta(2tt_0) & \text{при} \quad t \in [0,1/2], \\ \hat{\beta}(2t-1) & \text{при} \quad t \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Функция $f \circ \alpha_{x,y}$ возрастает на каждом из промежутков $[0,1/2]$ и $[1/2,1]$, следовательно, она возрастает на $[0,1]$. Из этого следует, что кривая $\alpha_{x,y}$ не имеет самопересечений. По построению также $\alpha_{x,y}(t) \in Q$ при $t \in (0,1]$.

Шаг 3. Пусть $x, y \in \operatorname{Fr} Q$. Докажем существование кривой $\alpha_{x,y}$, которая удовлетворяет лемме.

По условию леммы $f(x) \neq f(y)$. Не ограничивая общности будем считать, что $f(x) < f(y)$.

Зафиксируем точку $v \in Q$. Выше было доказано, что $f(v) \neq f(x)$ и $f(v) \neq f(y)$. Пусть $\beta_x, \beta_y\colon [0,1] \to \overline{Q}$ — непрерывные кривые, удовлетворяющие требованиям шага 2 и такие, что $\beta_x(0) = x$, $\beta_y(0) = y$, $\beta_x(1) = \beta_y(1) = v$.

Проверим, что $f(v) \in (f(x), f(y))$.

Предположим, что $f(v) < f(x)$ (случай $f(v) > f(y)$ рассматривается аналогично). По теореме о промежуточном значении существует $t_0 \in (0,1)$, для которого $f \circ \beta_y(t_0) = f(x)$. Тогда точки $\beta_y(t_0) \in Q$ и $x \in \operatorname{Fr} Q$ принадлежат одному множеству уровня f, а это, как было доказано выше, невозможно.

Итак, $f(x) < f(v) < f(y)$. Рассмотрим непрерывную кривую $\alpha_{x,y}\colon [0,1] \to \overline{Q}$,

$$\alpha_{x,y}(t) = \begin{cases} \beta_x(2t) & \text{при} \quad t \in [0,1/2], \\ \beta_y(2-2t) & \text{при} \quad t \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что эта кривая удовлетворяет всем требованиям леммы.

Лемма 3 доказана.

***Следствие* 4.** *Пусть пересечение* $\operatorname{Fr} Q$ *с множеством уровня* $f^{-1}(c)$ *не пусто.*

Тогда $\operatorname{Fr} Q \cap f^{-1}(c)$ *содержится в сингулярном элементе разбиения* $\mathfrak{F}$ *и выполняется соотношение*

$$\big(f(Q) \subset \{t \in \mathbb{R} \mid t < c\}\big) \vee \big(f(Q) \subset \{t \in \mathbb{R} \mid t > c\}\big). \tag{4}$$

Доказательство. При доказательстве леммы 3 мы проверили выполнение соотношения (4). Из него следует, что $\operatorname{Fr} Q \cap f^{-1}(c)$ содержится в объединении сингулярных элементов $\mathfrak{F}$.

Пусть $\operatorname{Fr} Q \cap F_1 \neq \varnothing$, $\operatorname{Fr} Q \cap F_2 \neq \varnothing$ для некоторых $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$, $F_1, F_2 \subset f^{-1}(c)$. Зафиксируем $x_1 \in \operatorname{Fr} Q \cap F_1$, $x_2 \in \operatorname{Fr} Q \cap F_2$.

Поскольку Q непусто, из соотношения (4) следует, что найдется точка $y \in Q$, для которой $f(y) \neq c$. Повторяя рассуждения из доказательств следствия 3, леммы 3 и предложения 7, получаем равенство $F_1 = F_2$.

Следствие 4 доказано.

Обозначим $I = [0,1]$, $\partial I = \{0,1\}$.

Теорема 3. *Для любой компоненты* $Q \subset M^2 \setminus K$ *существуют* $J \in \{(0,1), (0,1], [0,1), I\}$ *и инъективное непрерывное отображение* $\alpha_Q \colon J \to \overline{Q}$ *такие, что*:

(1) *функция* $f \circ \alpha_Q \colon J \to \mathbb{R}$ *строго возрастает на* J;

(2) $f \circ \alpha_Q(J \setminus \partial J) = f(Q)$, $f \circ \alpha_Q(\partial J) = f(\operatorname{Fr} Q)$;

(3) *отображение* $\hat{\alpha}_Q = \pi_f \circ \alpha_Q \colon J \to \Gamma_{K-R}(f)$ *является гомеоморфизмом на свой образ* $\overline{\pi_f(Q)} = \pi_f(\overline{Q})$.

Прежде чем доказывать теорему, убедимся в справедливости одного вспомогательного утверждения.

Предложение 8. *Пусть* $\chi_1 \colon X_1 \to Y$, $\chi_2 \colon X_2 \to Y$, $\varphi \colon X_1 \to X_2$ — *непрерывные отображения топологических пространств* X_1, X_2, Y *такие, что* $\chi_1 = \chi_2 \circ \varphi$.

Предположим, что χ_1 — *вложение, а множество* $\varphi(X_1)$ *замкнуто в* X_2.

Тогда φ — *замкнутое отображение.*

Доказательство. Пусть множество $R \subset X_1$ замкнуто.

Поскольку χ_1 — вложение, множество $\chi_1(R)$ замкнуто в $\chi_1(X_1)$ в индуцированной с Y топологии. Следовательно, $\chi_1(R) = \overline{\chi_1(R)} \cap \chi_1(X_1)$ и $\chi_2^{-1}(\chi_1(R)) = \chi_2^{-1}(\overline{\chi_1(R)}) \cap \chi_2^{-1}(\chi_1(X_1))$.

С другой стороны, $\varphi(R) = \chi_2^{-1}(\chi_1(R)) \cap \varphi(X_1) = \chi_2^{-1}(\overline{\chi_1(R)}) \cap \big(\chi_2^{-1}(\chi_1(X_1)) \cap \varphi(X_1)\big) = \chi_2^{-1}(\overline{\chi_1(R)}) \cap \varphi(X_1)$.

Множество $\varphi(X_1)$ замкнуто по условию, а $\chi_2^{-1}(\overline{\chi_1(R)})$ замкнуто как прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении. Следовательно, и пересечение $\varphi(R)$ этих множеств замкнуто в X_2.

Из произвола в выборе замкнутого множества $R \subset X_1$ следует, что отображение φ замкнуто.

Предложение 8 доказано.

***Доказательство теоремы* 3.** Заметим, что множество $f(Q)$ открыто. Действительно, Q состоит из регулярных точек и является открытым множеством согласно предложению 6. Поэтому для каждого $x \in Q$ существует окрестность $U_x \subset Q$, на которой f топологически сопряжена с $\operatorname{Re} z$. Следовательно, найдется $\varepsilon = \varepsilon(U_x) > 0$ такое, что $f(U_x) \supset (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$.

По определению множество Q связное. Следовательно, связными являются также множества $\overline{Q}$, $f(Q)$ и $f(\overline{Q})$.

Ясно, что открытое связное множество $f(Q) \in \mathbb{R}$ гомеоморфно интервалу $(0,1)$. Поэтому $f(\overline{Q})$ гомеоморфно с сохранением ориентации одному из множеств $(0,1)$, $[0,1)$, $(0,1]$, $[0,1]$. Пусть $f(\overline{Q}) \cong J$, $J \in \{(0,1),[0,1),(0,1],[0,1]\}$.

Построим непрерывную кривую $\alpha_Q \colon J \to \overline{Q}$, для которой функция $f \circ \alpha_Q \colon J \to \mathbb{R}$ будет строго возрастающей, такую, что $f \circ \alpha_Q(J) = f(\overline{Q})$.

Зафиксируем точку $y \in Q$, для которой выполняются неравенства

$$\inf_{x\in Q} f(x) < f(y) < \sup_{x\in Q} f(x).$$

Пусть $0 \in J$. Тогда $a_0 = \inf_{x\in Q} f(x) \in f(\overline{Q})$. Выберем $x_0 \in \overline{Q} \cap f^{-1}(a_0)$. Согласно изложенному $x_0 \in \operatorname{Fr} Q$ и $f(x_0) < f(y)$. Воспользуемся леммой 3 и найдем простую непрерывную кривую $\alpha_0 \colon [0,1/2] \to \overline{Q}$ такую, что $\alpha_0(0) = x_0$, $\alpha_0(1/2) = y$ и функция $f \circ \alpha_0$ строго возрастает.

Пусть теперь $0 \notin J$. Положим $y_1 = y$ и выберем $y_k \in Q$, $k \geq 2$, так, что последовательность $\{f(y_k)\}$ монотонно убывает и стремится к a_0. Воспользуемся леммой 2 и для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдем простую непрерывную кривую $\beta_k \colon [0,1] \to Q$ такую, что $\beta_k(0) = y_{k+1}$, $\beta_k(1) = y_k$ и функция $f \circ \beta_k$ строго возрастает.

Рассмотрим кривую $\alpha_0 \colon (0,1/2] \to Q$,

$$\alpha_0(t) = \beta_k(2^{k+1}t - 1), \qquad \text{если} \quad t \in [2^{-(k+1)}, 2^{-k}], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $\beta_{k+1}(1) = \beta_k(0)$, $k \in \mathbb{N}$, эта кривая корректно определена и непрерывна. Легко видеть, что функция $f \circ \alpha_0$ строго возрастает на $(0,1/2]$. Вследствие этого α_0 — простая непрерывная кривая.

Аналогично строится и кривая $\alpha_1 \colon J \cap [1/2,1] \to \overline{Q}$ такая, что $\alpha_1(1/2) = y$, функция $f \circ \alpha_1$ монотонно возрастает и $\alpha_1(t) \in Q$ при $t < 1$.

Положим

$$\alpha_Q(t) = \begin{cases} \alpha_0(t), & \text{если} \quad t \leq 1/2, \\ \alpha_1(t), & \text{если} \quad t \geq 1/2. \end{cases}$$

Получим непрерывную кривую $\alpha_Q \colon J \to \overline{Q}$, которая удовлетворяет условиям (1) и (2) теоремы 3.

Рассмотрим отображение $\hat{\alpha}_Q = \pi_f \circ \alpha_Q \colon J \to \Gamma_{K-R}(f)$. Вследствие монотонности $f \circ \alpha_Q$ отображение $\hat{\alpha}_Q$ инъективно.

Применяя следствия 3 и 4, из доказанного соотношения $f \circ \alpha_Q(J) = f(\overline{Q})$ получаем равенство $\hat{\alpha}_Q(J) = \pi_f(\overline{Q})$.

Множество $\pi_f^{-1}(\pi_f(\overline{Q}))$ является объединением тех элементов разбиения $\mathfrak{F}$, которые пересекаются с $\overline{Q}$. Множество Q совпадает с $\pi_f^{-1}(\pi_f(Q))$ по своему определению. Из следствия 4 и свойств кривой α_Q получим следующее соотношение:

$$\pi_f^{-1}\big(\pi_f(\operatorname{Fr} Q)\big) = \bigcup_{\tau \in J\cap\partial I} F_\tau.$$

Здесь F_τ — единственная компонента множества уровня $f^{-1}(f \circ \alpha_Q(\tau))$, которая пересекается с $\operatorname{Fr} Q$. Множества уровня функции f замкнуты, следовательно, их компоненты также замкнуты. Поскольку множество $J \cap \partial I$ содержит не более двух элементов, $\pi_f^{-1}(\pi_f(\operatorname{Fr} Q))$ замкнуто.

Итак, множество $\pi_f^{-1}\big(\pi_f(\overline{Q})\big) = Q \cup \operatorname{Fr} Q \cup \pi_f^{-1}(\pi_f(\operatorname{Fr} Q)) = \overline{Q} \cup \pi_f^{-1}(\pi_f(\operatorname{Fr} Q))$ замкнуто. Вследствие этого множество $\pi_f(\overline{Q})$ замкнуто в $\Gamma_{K-R}(f)$ по определению фактор-топологии.

Из включений $\pi_f(Q) \subset \pi_f(\overline{Q}) \subset \overline{\pi_f(Q)}$ и замкнутости $\pi_f(\overline{Q})$ следуют равенства $\hat{\alpha}_Q(J) = \pi_f(\overline{Q}) = \overline{\pi_f(Q)}$.

Рассмотрим тройку непрерывных отображений $f \circ \alpha_Q : J \to \mathbb{R}$, $\hat{f} : \Gamma_{K-R}(f) \to \mathbb{R}$ и $\hat{\alpha}_Q : J \to \Gamma_{K-R}(f)$.

По построению J связно и $f \circ \alpha_Q$ строго возрастает на J. Из этого легко следует, что $f \circ \alpha_Q$ — вложение. Кроме того, множество $\hat{\alpha}_Q(J)$ замкнуто. Итак, условия предложения 8 выполнены и отображение $\hat{\alpha}_Q$ является замкнутым. А так как оно непрерывно и инъективно, то $\hat{\alpha}_Q$ является гомеоморфизмом на свой образ $\overline{\pi_f(Q)}$.

Теорема 3 доказана.

Обозначим через $\mathcal{Q}$ разбиение множества $M^2 \setminus K$ на компоненты связности.

Предложение 9. *Пусть $F \in \mathfrak{F}, F \subset K$. Тогда существуют насыщенная относительно разбиения $\mathfrak{F}$ окрестность W множества F и конечный набор компонент $Q_1, \ldots, Q_m \in \mathcal{Q}$, $m = m(F)$, имеющие следующие свойства*:

$\overline{Q}_s \cap F \neq \varnothing$ *при* $s = 1, \ldots, m$;

$\overline{Q} \cap W = \varnothing$ *для всех* $Q \in \mathcal{Q} \setminus \{Q_1, \ldots, Q_m\}$.

Доказательство. Если F содержит локальный экстремум f, то согласно свойству (f_1) F является изолированной точкой множества уровня f и предложение справедливо.

Пусть F не содержит локальных экстремумов f. Из свойства (k_1) функции f следует, что все точки F являются регулярными, кроме конечного числа $x_1, \ldots, x_k$ сингулярных точек f.

Пусть U_i — открытая окрестность точки x_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$, такая, что ограничение f на U_i топологически сопряжено с $\operatorname{Re} z^r$ при некотором $r = r(i) > 1$ в окрестности начала координат. Воспользуемся свойством (k_2) функции f и выберем U_i настолько малой, что $K \cap U_i \subset F$. Тогда существуют $Q_{ij} \in \mathcal{Q}$, $j = 1, \ldots, 2r(i)$, такие, что $F \cap \overline{Q}_{ij} \neq \varnothing$, $j = 1, \ldots, 2r(i)$, и

$$U_i \subset F \cup \bigcup_{j=1}^{2r(i)} Q_{ij}.$$

Изменим нумерацию множеств Q_{ij}: пусть

$$\{Q_s\}_{s=1}^m = \{Q_{ij}\}_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=1,\ldots,2r(i)}}.$$

Тогда $Q \cap U_i = \varnothing$, $i = 1, \ldots, k$, если $Q \in \mathcal{Q} \setminus \{Q_s\}_{s=1}^m$.

Рассмотрим множество

$$W = \left\{ \hat{F} \in \mathfrak{F} \;\middle|\; \hat{F} \cap \bigcup_{i=1}^{k} U_i \neq \varnothing \right\}.$$

Так же, как при доказательстве предложения 4, доказывается, что это множество открыто.

W является насыщением множества $F \cup \bigcup_{i=1}^k U_i$, следовательно, $W \subset F \cup \bigcup_{s=1}^m Q_s$ и $W \cap Q = \varnothing$ для любого $Q \in \mathcal{Q} \setminus \{Q_s\}_{s=1}^m$. А так как W открыто, то и $W \cap \overline{Q} = \varnothing$ при $Q \in \mathcal{Q} \setminus \{Q_s\}_{s=1}^m$.

Предложение 9 доказано.

***2.3. Доказательство теоремы* 1.** Построим по функции f топологический граф G.

Согласно теореме 3 для каждой компоненты Q множества $M^2 \setminus K$ существуют $J_Q \in \in \{(0,1), [0,1), (0,1], I\}$ и вложение $\hat{\alpha}_Q \colon J_Q \to \Gamma_{K-R}(f)$. Пусть $J_Q \subset I_Q = [0,1]$.

Рассмотрим множество $\tilde{V} = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \partial I_Q$ всех концов отрезков I_Q и введем на нем следующее отношение. Предположим, что $w_1 \in \partial I_{Q_1}$, $w_2 \in \partial I_{Q_2}$. Пусть $w_1 \sim w_2$ тогда и только тогда, когда $w_1 \in J_{Q_1}$, $w_2 \in J_{Q_2}$ и $\hat{\alpha}_{Q_1}(w_1) = \hat{\alpha}_{Q_2}(w_2)$.

Ясно, что $\sim$ является отношением эквивалентности. Следовательно, оно порождает разбиение $\mathfrak{h}$ множества $\tilde{V}$, элементами которого являются классы эквивалентности.

Очевидно, разбиение $\mathfrak{h}$ является измельчением разбиения

$$\tilde{V} = \left(\tilde{V} \cap \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} J_Q\right) \sqcup \left(\tilde{V} \setminus \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} J_Q\right).$$

Отметим два свойства разбиения $\mathfrak{h}$:

Пусть $A \in \mathfrak{h}$ и $A \subset \tilde{V} \setminus \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} J_Q$. Тогда $\sharp A = 1$.

Если $A \in \mathfrak{h}$ и $A \subset \tilde{V} \cap \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} J_Q$, то $\sharp A < \infty$.

Первое свойство следует из определения отношения эквивалентности.

Проверим выполнение второго свойства.

Предположим, что $A \in \mathfrak{h}$ и $A \subset \tilde{V} \cap \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} J_Q$. Пусть $w_1 \in \partial I_{Q_1} \cap A$, $w_2 \in \partial I_{Q_2} \cap A$ и $w_1 \neq w_2$. Согласно следствию 4 и теореме 3 это равносильно тому, что $Q_1 \neq Q_2$ и $\alpha_{Q_1}(w_1)$, $\alpha_{Q_2}(w_2) \in F$ для некоторого $F \in \mathfrak{F}$ такого, что $F \subset K$, $F \cap \overline{Q_1} \neq \varnothing$ и $F \cap \overline{Q_2} \neq \varnothing$.

Таким образом, множеству A можно сопоставить сингулярный элемент F разбиения $\mathfrak{F}$, а каждому элементу $w \in A$ — компоненту $Q \in \mathcal{Q}$ такую, что $F \cap \overline{Q} \neq \varnothing$. При этом если $w_1, w_2 \in A$, $w_1 \neq w_2$, то для соответствующих компонент $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ выполняется неравенство $Q_1 \neq Q_2$.

Из предложения 9 следует, что существует конечное семейство $Q_1, \ldots, Q_m \in \mathcal{Q}$ такое, что $F \cap \overline{Q}_s \neq \varnothing$, $s = 1, \ldots, m$, и $F \cap \overline{Q} = \varnothing$ для любого $Q \in \mathcal{Q} \setminus \{Q_s\}_{s=1}^m$. Следовательно, $\sharp A = m$ и второе свойство разбиения $\mathfrak{h}$ справедливо.

Итак, существует инъективное соответствие между элементами разбиения $\mathfrak{h}$, которые содержатся в $\tilde{V} \cap \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} J_Q$, и сингулярными элементами разбиения $\mathfrak{F}$. Заметим, что для любого $F \in \mathfrak{F}$, $F \subset K$, существует $Q \in \mathcal{Q}$ такое, что $F \cap \overline{Q} \neq \varnothing$, поэтому в силу теоремы 3 $F \cap \alpha_Q(J_Q \cap \partial I_Q) \neq \varnothing$ и данное соответствие биективно.

Рассмотрим фактор-множество $V = \tilde{V}/\mathfrak{h}$, элементами которого являются элементы разбиения $\mathfrak{h}$. Обозначим через $\mathrm{pr} \colon \tilde{V} \to V$ отображение проекции.

Рассмотрим предсимплициальный комплекс G, 0-мерными симплексами которого являются элементы V, а одномерными симплексами — пары $\langle v_1, v_2 \rangle$ такие, что $\partial I_Q \cap \mathrm{pr}^{-1}(v_1) \neq \varnothing$ и $\partial I_Q \cap \mathrm{pr}^{-1}(v_2) \neq \varnothing$ для некоторого $Q \in \mathcal{Q}$, зависящего от $\langle v_1, v_2 \rangle$.

Очевидно, что для каждого $v \in V$ количество одномерных симплексов, 0-гранью которых является v, совпадает с мощностью множества $\mathrm{pr}^{-1}(v)$. Известно, что $\sharp\, \mathrm{pr}^{-1}(v) < \infty$, $v \in V$, поэтому комплекс G локально конечный, т. е. G является (абстрактным) графом.

Обозначим $V_0 = \{v \in V \mid \mathrm{pr}^{-1}(v) \cap \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} J_Q = \varnothing\}$. Тогда $\sharp\, \mathrm{pr}^{-1}(v) = 1$ для каждого $v \in V_0$ и $V_0 \subset V_l$, где V_l — множество листьев G.

Рассмотрим абстрактный полиэдр $|G|$, соответствующий комплексу G. Можно считать 1-симплексами $|G|$ отрезки I_Q, $Q \in \mathcal{Q}$. Пусть $\{w_1, w_2\} = \partial I_Q$. Тогда $I_Q = |\langle v_1, v_2 \rangle|$, если $w_1 \in \in \mathrm{pr}^{-1}(v_1)$, $w_2 \in \mathrm{pr}^{-1}(v_2)$. Будем отождествлять концы отрезков с их образами под действием отображения проекции.

Согласно теореме 3 для каждого $Q \in \mathcal{Q}$ определено вложение $\hat{\alpha}_Q^{-1} : \overline{\pi_f(Q)} \to J_Q \subset I_Q$. Так как $\bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} \overline{Q} = M^2$, то $\bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} \pi_f(\overline{Q}) = \bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} \overline{\pi_f(Q)} = \Gamma_{K-R}(f)$. По определению множества V для каждого $x \in \overline{\pi_f(Q_1)} \cap \overline{\pi_f(Q_2)}$ справедливо равенство $\hat{\alpha}_{Q_1}^{-1}(x) = \hat{\alpha}_{Q_2}^{-1}(x) \in |G|$, поэтому определено отображение $\varphi\colon \Gamma_{K-R}(f) \to |G|$,

$$\varphi(x) = \hat{\alpha}_Q^{-1}(x), \qquad \text{если} \quad x \in \overline{\pi_f(Q)} = \pi_f(\overline{Q}). \tag{5}$$

Заметим, что по определению все множества $\pi_f(Q)$, $Q \in \mathcal{Q}$, открыты и попарно не пересекаются. Тогда и $\pi_f(Q_1) \cap \overline{\pi_f(Q_2)} = \varnothing$, если $Q_1 \neq Q_2$, $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$.

Пусть $F \in \mathfrak{F}$, $F \subset K$. Согласно предложению 9 существуют конечное семейство $\{Q_1(F), \ldots$ $\ldots, Q_m(F)\} \subset \mathcal{Q}$ и насыщенная окрестность W множества F такие, что $\overline{Q} \cap W = \varnothing$ при $Q \in \mathcal{Q} \setminus \{Q_1(F), \ldots, Q_m(F)\}$. Тогда и $\pi_f(\overline{Q}) \cap \pi_f(W) = \varnothing$ при $Q \in \mathcal{Q} \setminus \{Q_1(F), \ldots, Q_m(F)\}$.

Из изложенного следует, что покрытие $\{\overline{\pi_f(Q)}\}_{Q\in\mathcal{Q}}$ пространства $\Gamma_{K-R}(f)$ является локально конечным.

Как известно (см. [1]), замкнутое локально конечное покрытие топологического пространства является фундаментальным. Отображение, ограничение которого на каждый элемент такого покрытия непрерывно, само является непрерывным.

Таким образом, отображение φ непрерывно.

Ясно, что $\varphi(\Gamma_{K-R}(f)) = \bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} J_Q$. Покрытие $\{I_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}}$ пространства $|G|$ является фундаментальным по определению топологии на $|G|$. Следовательно, покрытие $\{J_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}}$ пространства $\bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} J_Q$ с индуцированной с $|G|$ топологией также является фундаментальным.

Легко видеть, что корректно определено отображение $\psi\colon \bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} J_Q \to \Gamma_{K-R}(f)$,

$$\psi(u) = \hat{\alpha}_Q(u), \qquad \text{если} \quad u \in J_Q. \tag{6}$$

Его ограничение на каждое из множеств J_Q, $Q \in \mathcal{Q}$, непрерывно, поэтому ψ является непрерывным отображением.

Простая непосредственная проверка показывает, что $\psi = \varphi^{-1}$. Следовательно, φ является гомеоморфизмом пространства $\Gamma_{K-R}(f)$ на свой образ $\bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} J_Q$.

По построению $G_0 = |G| \setminus V_0 = \bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} J_Q = \varphi(\Gamma_{K-R}(f))$. Поэтому G_0 является топологическим графом с черенками.

Остальные утверждения теоремы получаются непосредственно из формул (5), (6) и теоремы 3.

1. *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. – М.: Наука, 1977. – 488 с.
2. *Кронрод А. С.* О функциях двух переменных // Успехи мат. наук. – 1950. – **5**, № 1. – С. 24 – 134.
3. *Reeb G.* Sur les points singuliers d’une forme de Pfaff complétement intégrable ou d’une fonction numérique // Comptes Rend. Hebdomadaires Séances de l’Académie Sci. – 1946. – **222**. – P. 847 – 849.
4. *Hilton P. J., Wylie S.* Homology theory. An introduction to algebraic topology. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1960. – xv+484 p.
5. *Kuratowski K.* Topology. – New York; London: Acad. Press, 1968. – xiv+608 p.
6. *Зорич В. А.* Математический анализ: В 2 т. – М.: МЦНМО, 2002. – Т. 1. – xvi+664 с.
7. *Prishlyak A. O.* Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface // Topology and Appl. – 2002. – **119**, № 3. – P. 257 – 267.
8. *Church P. T., Timourian J. G.* Differentiable open maps of $(p+1)$-manifold to p-manifold // Pacif. J. Math. – 1973. – **48**, № 1. – P. 35 – 45.
9. *Jenkins J., Morse M.* Topological methods on Riemann surfaces // Ann. Math. Stud. – 1953. – № 30. – P. 111 – 139.
10. *Munkres J. R.* Topology. – 2nd Ed. – Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 2000. – xvi+537 p.

Получено 21.07.14