УДК 517.5

В. М. Кузаконь (Одес. нац. акад. пищ. технологий)

О ГОЛОМОРФНОСТИ ТОРСООБРАЗУЮЩИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПОЧТИ ЭРМИТОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

We introduce the notion of absolutely developable and biholomorphic vector fields defined on almost Hermitian manifolds. It is shown that, on a Kählerian manifold, any developable vector field is an absolutely developable vector field. It is also proved that, on a nearly Kählerian manifold, an absolutely developable vector field ξ preserves the almost complex structure if and only if ξ is a special concircular vector field. In addition, we conclude that, on a quasi-Kählerian or Hermitian manifold, a biholomorphic vector field ξ is a special concircular vector field.

Введено поняття абсолютно торсотвірного та біголоморфного векторних полів на майже ермітовому многовиді. Доведено, що будь-яке торсотвірне векторне поле на келеровому многовиді є абсолютно торсотвірним і абсолютно торсотвірне векторне поле ξ на наближено келеровому многовиді зберігає структурний ендоморфізм наближено келерової структури тоді і тільки тоді, коли ξ — спецконциркулярне векторне поле. Крім того, доведено, що на квазікелеровому або ермітовому многовиді біголоморфне векторне поле ξ є спецконциркулярним векторним полем.

Нахождение условий инвариантности геометрических объектов относительно действия той или иной группы преобразований является одной из наиболее актуальных задач геометрического исследования. В работе [1] доказано, что торсообразующее векторное поле ξ на келеровом многообразии сохраняет структурный эндоморфизм келеровой структуры тогда и только тогда, когда ξ — спецконциркулярное векторное поле.

В настоящей работе продолжено развитие этой проблематики. Введено понятие абсолютно торсообразующего векторного поля на почти эрмитовом многообразии. Показано, что любое торсообразующее векторное поле на келеровом многообразии является абсолютно торсообразующим. Доказано, что абсолютно торсообразующее векторное поле ξ на приближенно келеровом многообразии сохраняет структурный эндоморфизм приближенно келеровой структуры тогда и только тогда, когда ξ — спецконциркулярное векторное поле. Более того, доказано, что если это многообразие квазикелерово либо эрмитово, то векторное поле ξ является спецконциркулярным векторным полем.

Пусть M — n-мерное гладкое многообразие, $\mathfrak{X}(M)$ — $C^\infty(M)$-модуль гладких векторных полей на M, d — оператор внешнего дифференцирования, $\mathfrak{L}_X$ — оператор дифференцирования Ли в направлении векторного поля X. Все многообразия, тензорные поля и т. п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞.

Фиксируем векторное поле $\xi \in \mathfrak{X}(M)$. Известно, что оно порождает локальную однопараметрическую группу диффеоморфизмов $\mathcal{F}_t$ многообразия M. Рассмотрим дифференциально-геометрическую структуру $\mathcal{S} = \{T_1, \ldots, T_N\}$ на M, определенную конечным числом тензорных полей на M. Примерами таких структур являются римановы структуры ($N = 1$), почти эрмитовы структуры ($N = 2$), почти контактные структуры ($N = 3$) и т. п.

Определение 1. *Структура $\mathcal{S}$ называется ξ-инвариантной, если каждый из тензоров, составляющих ее, инвариантен относительно операций увлечения, порожденных элементами локальной однопараметрической группы $\mathcal{F}_t$.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма [2]**.** *Структура $\mathcal{S}$ ξ-инвариантна тогда и только тогда, когда*

$$\mathfrak{L}_\xi(T_k) = 0, \qquad k = 1, \ldots, N.$$

Пример [2]**.** Риманова структура $g = \langle\,\cdot,\cdot\,\rangle$ ξ-инвариантна тогда и только тогда, когда ξ — векторное поле Киллинга, т. е.

$$\langle \nabla_X \xi, Y\rangle + \langle \nabla_Y \xi, X\rangle = 0, \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

где ∇ — оператор Кошуля римановой связности метрики g.

Определение 2 [2]**.** *Векторное поле $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ называется торсообразующим, если*

$$\nabla\xi = \rho id + a \otimes \xi,$$

и псевдоторсообразующим, если $\nabla\xi = \rho J + a \otimes \xi$, для некоторых $\rho \in C^\infty(M)$ и $a \in \mathfrak{X}^*(M)$. Дифференциальную 1-форму a и функцию ρ назовем характеристическими. Торсообразующее векторное поле называется конциркулярным, если $da = 0$, и спецконциркулярным, если $a = 0$.

Пусть $\mathcal{S} = \{g, J\}$ — почти эрмитова (сокращенно $A\mathcal{H}$-) структура на M, $J^2 = -\mathrm{id}$, $\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle$ (эндоморфизм J называется *почти комплексной структурой*).

Рассмотрим шесть наиболее изученных подклассов класса почти эрмитовых структур вместе с условиями, определяющими их [3]:

почти келеровы (AK): $d\Omega = 0$;

приближенно келеровы (NK): $\nabla_X(J)Y + \nabla_Y(J)X = 0$;

квазикелеровы (QK): $\nabla_X(J)Y + \nabla_{JX}(J)(JY) = 0$;

эрмитовы (H): $\nabla_X(J)Y - \nabla_{JX}(J)(JY) = 0$;

келеровы (K): $\nabla J = 0$;

локально конформно келеровы (LCK-многообразия).

Имеют место следующие включения [3]:

$$K \subset AK \subset QK, \qquad K \subset NK \subset QK, \qquad K \subset LCK \subset H. \tag{1}$$

Определение 3. *Торсообразующее векторное поле ξ на почти эрмитовом многообразии (M, J, g) назовем абсолютным, если векторное поле $J\xi$ псевдоторсообразующее.*

Теорема 1. *Торсообразующее векторное поле $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ будет абсолютно торсообразующим тогда и только тогда, когда*

$$\nabla_X(J)\xi = 0 \qquad (X \in \mathfrak{X}(M)). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть ξ — абсолютно торсообразующее векторное поле на почти эрмитовом многообразии (M, J, g). Введем обозначение $J\xi = \eta$. Тогда

$$\nabla_X \eta = \nabla_X(J\xi) = \nabla_X(J)\xi + J(\nabla_X\xi) = \nabla_X(J)\xi + J(a(X)\xi + \rho X) =$$

$$= \nabla_X(J)\xi + a(X)(J\xi) + (\rho\cdot J)X = \nabla_X(J)\xi + a(X)\eta + (\rho\cdot J)X.$$

Отсюда видно, что если выполняется соотношение (2), то η — псевдоторсообразующее векторное поле с параметрами $\tilde{a} = a$, $\tilde{\rho} = \rho \cdot J$. Следовательно, векторное поле ξ абсолютно торсообразующее.

Обратно, пусть η — псевдоторсообразующее векторное поле с параметрами $\tilde{a} = a$, $\tilde{\rho} = \rho \cdot J$. Учитывая, что $J^{-1} = -J$, получаем

$$\nabla_X \xi = -\nabla_X(J\eta) = -\nabla_X(J)\eta - J(\nabla_X \eta) = -\nabla_X(J)\eta - J(\tilde{a}(X)\eta + \tilde{\rho}X) =$$

$$= -\nabla_X(J)\eta - \tilde{a}(X)(J\eta) - (\tilde{\rho} \cdot J)X = -\nabla_X(J)\eta + a(X)\xi + \rho X.$$

Поскольку ξ — торсообразующее векторное поле, отсюда следует, что $0 = \nabla_X(J)\eta = \nabla_X(J)J\xi = -J\nabla_X(J)\xi$ и, значит, $\nabla_X(J)\xi = 0$.

Теорема 1 доказана.

***Следствие* 1.** *Любое торсообразующее векторное поле на келеровом многообразии является абсолютно торсообразующим.*

Определение 4. *Векторное поле ξ на почти эрмитовом многообразии M называется голоморфным, если эндоморфизм J ξ-инвариантен, и биголоморфным, если, кроме того, он $(J\xi)$-инвариантен.*

Теорема 2 [1]. *Торсообразующее векторное поле ξ на почти эрмитовом многообразии M голоморфно тогда и только тогда, когда*

$$\nabla_\xi(J)X = a(JX)\xi - a(X)J\xi, \qquad X \in \mathfrak{X}(M). \tag{3}$$

Теорема 3. *Абсолютно торсообразующее векторное поле на приближенно келеровом многообразии голоморфно тогда и только тогда, когда оно спецконциркулярно.*

Доказательство. Пусть ξ — голоморфное абсолютно торсообразующее векторное поле на приближенно келеровом многообразии M. Поскольку ξ — голоморфное векторное поле, в силу теоремы 2 справедливо тождество (3). Поскольку ξ — абсолютно торсообразующее векторное поле, из теоремы 1 следует, что

$$\nabla_X(J)\xi = 0 \qquad (X \in \mathfrak{X}(M)). \tag{4}$$

Наконец, из того, что многообразие M приближенно келерово, следует, что $\nabla_X(J)\xi + \nabla_\xi(J)X = 0$. С учетом этого обстоятельства, почленно складывая (3) и (4), получаем

$$a(JX)\xi - a(X)J\xi = 0, \qquad X \in \mathfrak{X}(M). \tag{5}$$

В силу линейной независимости векторных полей ξ, $J\xi$ и произвола в выборе X получаем, что $a = 0$, а значит, векторное поле ξ спецконциркулярно.

Обратно, пусть ξ — абсолютно торсообразующее спецконциркулярное векторное поле на приближенно келеровом многообразии M. Поскольку оно абсолютно торсообразующее, то по теореме 4 $\nabla_X(J)\xi = 0$ и в силу приближенной келеровости многообразия $\nabla_\xi(J)X = 0$. В силу спецконциркулярности векторного поля ξ $a = 0$. Осталось заметить, что в силу этих соотношений уравнение (3) выполняется тождественно, а значит, векторное поле ξ голоморфно.

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Биголоморфное абсолютно торсообразующее векторное поле на квазикелеровом многообразии спецконциркулярно.*

Доказательство. Пусть ξ — биголоморфное абсолютно торсообразующее векторное поле на квазикелеровом многоообразии $\{M, J, g\}$. Вследствие его голоморфности $\nabla_\xi(J)X = a(JX)\xi - a(X)J\xi$. Поскольку ξ — биголоморфное абсолютно торсообразующее векторное поле, векторное поле $\eta = J\xi$ голоморфное абсолютно торсообразующее и, значит, удовлетворяет тому же уравнению, записанному в виде

$$\nabla_{J\xi}(J)X = -a(X)\xi + a(JX)J\xi.$$

Заменив в этом уравнении X на JX, придем к системе уравнений

$$\nabla_\xi(J)X = a(JX)\xi - a(X)J\xi,$$

$$\nabla_{J\xi}(J)JX = -a(JX)\xi - a(X)J\xi.$$

Складывая почленно эти уравнения, с учетом квазикелеровости многообразия находим, что $a = 0$, а значит, векторное поле ξ спецконциркулярно.

Теорема 4 доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 5. *Биголоморфное абсолютно торсообразующее векторное поле на эрмитовом многообразии спецконциркулярно.*

С учетом теорем 4 и 5, а также включений (1) получаем такие утверждения.

***Следствие* 2.** *Биголоморфное абсолютно торсообразующее векторное поле на почти келеровом многообразии спецконциркулярно.*

***Следствие* 3.** *Биголоморфное абсолютно торсообразующее векторное поле на локально конформно келеровом многообразии спецконциркулярно.*

1. *Кириченко В. Ф., Кузаконь В. М.* О геометрии голоморфных торсообразующих векторных полей на почти эрмитовых многообразиях // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 7. – С. 1005 – 1008.
2. *Аминова А. В.* Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. – М.: Янус-К, 2003. – 619 с.
3. *Gray A., Hervella.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Math. Pure and Appl. – 1980. – **123**. – P. 35 – 58.

Получено 14.05.14