УДК 519.41/47

П. П. Барышовец (Нац. авиац. ун-т, Киев)

БЕСКОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ДОПОЛНЯЕМЫМИ НЕАБЕЛЕВЫМИ ПОДГРУППАМИ

We obtain a description of locally finite A-groups with complemented non-Abelian subgroups.

Наведено опис локально скінченних A-груп з доповнюваними неабелевими підгрупами.

1. Введение. Подгруппа A группы G называется дополняемой в G, если в G существует такая подгруппа B, что $G = AB$ и $AB = 1$. Конечные группы с дополняемыми подгруппами изучал Ф. Холл [1]. Произвольные (как конечные, так и бесконечные) группы с таким свойством, получившие название вполне факторизуемых, были полностью описаны в [2] (см. также [3, 4]). Сужение системы дополняемых подгрупп от всех подгрупп группы до системы абелевых подгрупп не привело к расширению класса вполне факторизуемых групп [5, 6]. Естественно возник вопрос об изучении неабелевых групп с дополняемыми неабелевыми подгруппами, поставленный С. Н. Черниковым в [7].

В разные годы рассматривалось влияние дополняемости систем подгрупп, близких к системе неабелевых подгрупп, на строение группы, прежде всего нециклических [8], элементарных абелевых нециклических [9] и непримарных [10, 11]. Несмотря на то, что группы указанных классов имели большие различия в строении, некоторые общие подходы при изучении таких групп сохранялись.

В работах автора [12 – 14] изучались конечные группы с дополняемыми неабелевыми подгруппами. Оказалось, в частности, что они разрешимы и их ступень разрешимости не превышает числа 3. Изучены также локально конечные ненильпотентные группы с дополняемыми неабелевыми подгруппами, содержащие неабелевы силовские подгруппы [15]. В настоящей работе рассматриваются локально конечные ненильпотентные группы с дополняемыми неабелевыми подгруппами, не содержащие неабелевых силовских подгрупп. Их строение описано до определяющих соотношений. Таким образом, результаты работы [15] и настоящей статьи дают описание локально конечных неабелевых групп с дополняемыми неабелевыми подгруппами.

Из полученных результатов следует, что среди новых групп наибольшее сходство с вполне факторизуемыми группами сохранили группы с бесконечным абелевым коммутантом: для таких групп необходимым условием дополняемости неабелевых подгрупп является дополняемость цоколя группы и разложимость его в прямое произведение минимальных нормальных делителей группы. Понятие цоколя введено Р. Ремаком и использовалось С. Н. Черниковым при рассмотрении новых характеризаций вполне факторизуемых групп [16]. Отметим, что Б. И. Мищенко [17], не используя строения групп с дополняемыми неабелевыми подгруппами, показал, что в бесконечной локально ступенчатой неабелевой нечерниковской группе G из условия дополняемости в ней бесконечных неабелевых подгрупп следует дополняемость в группе G всех неабелевых подгрупп.

Перспективным в плане дальнейшего исследования влияния дополняемости систем подгрупп на строение группы, по мнению автора, могло бы быть изучение групп с дополняемыми неметациклическими подгруппами.

2. Предварительные результаты. Пусть G — произвольная неабелева группа, имеющая следующее свойство: любая неабелева подгруппа из G дополняема в G. Тогда все неабелевы подгруппы и неабелевы фактор-группы группы G, а также все прямые произведения вида $G \times H$, где H — абелева вполне факторизуемая группа, имеют то же свойство. Кроме того, фактор-группа группы G по ее неабелевому нормальному делителю вполне факторизуема.

Определение. *Следуя Ф. Холлу и Тонту, локально конечные разрешимые группы с абелевыми силовскими подгруппами будем называть* A*-группами (как и в конечном случае).*

Лемма 1. *В* A*-группе пересечение центра с коммутантом тривиально.*

Следует из аналогичного утверждения для конечных групп [18].

Лемма 2 [18]. *В конечной* A*-группе коммутанты нормальных подгрупп дополняемы.*

Следующие четыре леммы доказаны в [15].

Лемма 3. *Если в неабелевой бесконечной бинарно конечной группе* G *с дополняемыми неабелевыми подгруппами коммутант конечен, то* $G = H \times B$, *где* H *— конечная группа с дополняемыми неабелевыми подгруппами, а* B *— бесконечная вполне факторизуемая группа.*

Лемма 4. *Локально конечная неабелева группа* G *с дополняемыми неабелевыми подгруппами не более, чем трехступенно разрешима. Если* G *нильпотентна, то* $G'' = 1$.

Лемма 5. *Если в бесконечной неабелевой локально вполне факторизуемой группе* G *дополняемы все неабелевы подгруппы, то она вполне факторизуема.*

Лемма 6. *Локально конечная не нильпотентная прямо неразложимая не вполне факторизуемая группа* G *с бесконечным коммутантом и дополняемыми неабелевыми подгруппами содержит бесконечную максимальную абелеву нормальную подгруппу конечного индекса.*

3. Бесконечные ненильпотентные A**-группы с дополняемыми неабелевыми подгруппами.** Строение локально конечных групп такого вида описывает следующая теорема.

Теорема 1. *В локально конечной ненильпотентной* A*-группе* G *тогда и только тогда дополняемы все неабелевы подгруппы, когда* $G = H \times B$, *где* B *— вполне факторизуемая абелева группа, а* H *— группа одного из следующих типов:*

1) H *— неабелева вполне факторизуемая группа;*

2) $H = K\langle c \rangle$, K *— абелева нормальная вполне факторизуемая группа,* $|c| = q^m$, $c^q \in Z(H)$, $|K : C_K(\langle c \rangle)| = \infty$, q *— простое число,* $q \notin \pi(K)$, m *— натуральное;*

3) $H = K \leftthreetimes \langle b \rangle$, K *разлагается в прямое произведение конечных минимальных нормальных делителей* K_α *группы* H, *на множителях которого вполне факторизуемая группа* $\langle b \rangle$ *и ее собственные подгруппы действуют неприводимо и нетождественно, причем среди подгрупп* K_α *по крайней мере одна имеет непростой порядок, а произведение подгрупп* K_α, *имеющих одинаковые порядки, является силовской подгруппой группы* H;

4) $H = K \leftthreetimes (\langle b \rangle \leftthreetimes \langle a \rangle)$, *где* $b^q = a^r = 1$, $a^{-1}ba = b^\alpha$, $\alpha^r \equiv 1 \pmod q$, K *разлагается*

в прямое произведение конечных минимальных нормальных делителей K_α *группы* H, $|K_\alpha|$ *есть либо простое число, и тогда* $[K_\alpha, b]=1$, $K_\alpha\langle a\rangle$ *— неабелева группа, либо* r*-я степень простого числа, отличного от* q *и* r; *среди подгрупп* K_α *по крайней мере одна имеет непростой порядок; если* $|K_\alpha|=p^r$, *то элементы* a *и* b *действуют на* K_α *следующим образом*:

$$b=\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_t \end{pmatrix}, \qquad a=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$|\alpha_1|=q$, $\alpha_1^r=\alpha_2,\ldots,\alpha_t^r=\alpha_1$, *причем* p^2-1 *делится на* q.

Для доказательства теоремы 1 нам потребуются еще две леммы.

Лемма 7. *Пусть* H *— локально конечная ненильпотентная прямо неразложимая не вполне факторизуемая группа с бесконечным коммутантом и дополняемыми неабелевыми подгруппами. Если силовские подгруппы и коммутант* H' *группы* H *абелевы, то* H *— бесконечная группа типа* 2 *или* 3 *теоремы* 1.

Доказательство. Бесконечность группы H следует из бесконечности ее коммутанта H'.

1. Пусть $C=C_H(H')$. Тогда $C\lhd H$ и $H'\subseteq C$. Покажем, что C — абелева группа. Действительно, $C'\subseteq H'\subseteq Z(C_H(H'))=Z(C)$. В силу леммы 1 $C'=1$.

Согласно лемме 6 группа H содержит бесконечную максимальную абелеву нормальную подгруппу K конечного индекса в H. Пусть $CK=T$. Тогда вследствие абелевости нормальных подгрупп C и K коммутант T' содержится в их пересечении: $T'\subseteq K\bigcap C=K_1$. Но $K_1=(K\bigcap C)\subseteq Z(T)$ и, значит, $T'\subseteq Z(T)$. В силу леммы 1 $T'=1$. Итак, централизатор $C=C_H(H')$ абелев и имеет в группе H конечный индекс.

Пусть $x\notin C$. Тогда подгруппа $C\langle x\rangle$ неабелева, причем x можно считать элементом примарного порядка, например p^α, $\alpha\geq 1$. Если $C\langle x\rangle=H$, то силовские подгруппы группы C по числам $q\neq p$ элементарные абелевы, а $[C, x^p]=1$. Следовательно, H — бесконечная группа типа 2 теоремы 1.

Пусть

$$C\langle x\rangle\neq H. \tag{1}$$

Тогда подгруппа $C\langle x\rangle$ дополняема в группе H. Если

$$H=(C\langle x\rangle)\leftthreetimes L, \tag{2}$$

то L — вполне факторизуемая абелева группа, $[C, L] \neq 1$. Поскольку в предыдущих рассуждениях, начиная с (1), элемент x можно заменить элементом из подгруппы L, можно считать, что x имеет простой порядок. $\langle L, x \rangle = D$ — конечная A-группа и в силу леммы 2 $D = D' \leftthreetimes M$, где M — абелева группа. При этом произведение подгрупп C и D равно H, $D' \subseteq H' \subseteq C$, значит, $H = CD = CD'M = CM$. Но согласно (2) индекс $|H:C| = |L||x|$. Далее, $D' \subseteq C$, $L \cap C = 1$, следовательно, $D' \cap L = 1$. При этом $D'L \neq D$, значит, $D = (D'L)\langle x \rangle$ и $|D:D'| = |L||x|$. Отсюда следует, что $H = C \leftthreetimes M$.

Если $y \in M$, то подгруппа $C\langle y \rangle$ неабелева и, значит, дополняема в H. Отсюда вытекает, что подгруппа $\langle y \rangle$ дополняема в H, а значит, и в M. Таким образом, M — абелева вполне факторизуемая группа.

Если C — не вполне факторизуемая группа, то пусть R — не элементарная абелева конечная примарная подгруппа из C, t — такой элемент из M, что $[R, t] \neq 1$. Из описания конечных A-групп с дополняемыми неабелевыми подгруппами [12, 14] следует, что силовские подгруппы группы $\langle R, t \rangle$ элементарные абелевы. Из полученного противоречия следует, что группа C абелева вполне факторизуемая.

2. Покажем, что если $X \lhd H$, $X \subset C$, то $(XM)' = X$.

Действительно, предположим, что $(XM)' \neq X$. Ясно, что $(XM)' \subseteq X$. Если $x_1 \in (XM)'$, $x_2 \in X$, $x_2 \notin (XM)'$, то в конечной группе $\langle x_1, x_2, M \rangle$ центр нетривиален и содержится в C. Тогда и центр $Z(H)$ группы H нетривиален и содержится в C. Отсюда в силу леммы 1 следует прямая разложимость группы H. Значит, $(XM)' = X$.

В частности, $H' = C$.

3. Поскольку группа H предполагается не вполне факторизуемой, она содержит конечную группу Миллера – Морено W с $|W'| = p^a$, где $a > 1$. Рассмотрим конечную подгруппу $U = \langle W', M \rangle$. Так как $N_H(U') \supseteq C$ и $N_H(U') \supseteq M$, то $U' \lhd H$. Тогда из утверждения пункта 2 настоящего доказательства следует, что $(U'M)' = U'$. Пусть X_α — произвольное конечное множество элементов из C. Подгруппа $U_\alpha = \langle X_\alpha, M \rangle$ конечна, $U_\alpha \cap C = C_\alpha \lhd H$ и, значит, в силу утверждения пункта 2 $C_\alpha = (U_\alpha)'$.

Рассмотрим подгруппу $B = \bigcup_\alpha C_\alpha$, порожденную всеми подгруппами C_α. Она, очевидно, нормальна в H и содержится в C. Поскольку любой элемент из C содержится по крайней мере в одном множестве C_α, то $C \subseteq B$. Значит, $C = \bigcup_\alpha C_\alpha$. Отсюда с помощью трансфинитной индукции и утверждения пункта 2 нетрудно получить разложение подгруппы C в прямое произведение конечных нормальных делителей группы H. Если C_β — любой из них, то $C_\beta M$ — конечная неабелева группа с дополняемыми неабелевыми подгруппами. Применяя ко всем таким подгруппам теорему из [14], получаем, что H — бесконечная группа типа 2 или 3 теоремы 1.

Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть H — локально конечная ненильпотентная прямо неразложимая не вполне факторизуемая группа с бесконечным коммутантом и дополняемыми неабелевыми подгруппами. Если силовские подгруппы группы H абелевы, а коммутант H' неабелев, то H — бесконечная группа типа* 4 *теоремы* 1.

Доказательство. Бесконечность группы H следует из бесконечности ее коммутанта H'.

1. Пусть $C = C_{H'}(H'')$. Тогда $C \lhd H$ и $H'' \subseteq C$. Покажем, что C — абелева группа. Действительно, $C' \subseteq H'' \subseteq Z(C_{H'}(H'')) = Z(C)$. В силу леммы 1 $C' = 1$, а в силу леммы 6 группа H содержит бесконечную максимальную абелеву нормальную подгруппу K конечного индекса в H. Пусть $CK = T$. Тогда вследствие абелевости нормальных подгрупп C и K коммутант T' содержится в их пересечении: $T' \subseteq K \bigcap C = K_1$. Но $K_1 = (K \bigcap C) \subseteq Z(T)$ и, значит, $T' \subseteq Z(T)$. Согласно лемме 1 $T' = 1$. Итак, подгруппа T абелева, содержит коммутант H'' и имеет в группе H конечный индекс. Следовательно, $T \subseteq C_H(H'')$ и, значит, централизатор $N = C_H(H'')$ имеет в группе H конечный индекс. Заметим, что в силу леммы 1 N является абелевой группой. Отсюда и из дополняемости в H неабелевых подгрупп следует, что фактор-группа H/N неабелева вполне факторизуема.

Пусть X_1 — нормальная подгруппа простого порядка p в фактор-группе H/N, а X — ее прообраз в H. Подгруппа X неабелева и дополняема в H. Если $H = X \leftthreetimes Y$, то подгруппа NY имеет простой индекс в H. Пусть $t \in H$, $t \notin (NY)$. Тогда $N\langle Y, t\rangle \supseteq (NY)\langle t\rangle = H$. Подгруппа $R = \langle Y, t\rangle$ конечна и, очевидно, неабелева. Поскольку $R'' \subseteq H'' \subseteq C$ и в силу леммы 2 коммутант R'' дополняем в R, например, подгруппой U, заменив R на U, не теряя общности, можно считать R двуступенно разрешимой группой. Согласно лемме 2 $R = R' \leftthreetimes D$, а из описания конечных A-групп с дополняемыми неабелевыми подгруппами [14] следует, что R' — вполне факторизуемая абелева группа.

Далее, R — дисперсивная группа. Пусть $R_i = P_i \leftthreetimes D$, где P_i — силовская p_i-подгруппа группы R'. Используя результаты работы [14], можно разложить P_i в прямое произведение минимальных нормальных делителей группы R. Если P_1 — один из них, то $(N \bigcap P_1) \lhd R$. Значит, либо $P_1 \subset N$, либо $P_1 \bigcap N = 1$. Так как фактор-группа H/N вполне факторизуема, отсюда следует, что R' разлагается в прямое произведение нормальных в R подгрупп простых порядков. Не теряя общности, можно считать, что $N \bigcap R' = 1$.

2. Покажем, что если $X \lhd H'$, $X \subset H''$, то $(XR')' = X$.

Действительно, предположим, что $(XR')' \neq X$. Ясно, что $(XR')' \subseteq X$. Если $x_1 \in (XR')'$, $x_2 \in X$, $x_2 \notin (XR')'$, то в конечной группе $\langle x_1, x_2, R'\rangle$ центр нетривиален и содержится в X. Тогда и центр $Z(H')$ группы H' нетривиален и содержится в H''. Получили противоречие с леммой 1. Значит, $(XR')' = X$. Утверждение доказано.

Из него, в частности, следует, что $H'' = (H''R')'$.

3. Пусть $y \in H''$, $[y, R'] \neq 1$. Тогда $W = \langle y, R\rangle$ — неабелева конечная группа. $1 \neq L =$

$= (H'' \bigcap W) \lhd W$, и, значит, $N_H(L) \supseteq R$. Но $L \subset N$, а N — абелева группа. Поскольку $H = NR$, L — конечный нормальный делитель группы H, содержащийся в H''. Тогда в силу утверждения пункта 2 настоящего доказательства $(LR')' = L$. Вследствие выбора подгруппы R пересечение $L \bigcap R = 1$. Рассмотрим подгруппу $M = L \leftthreetimes R$. Нетрудно убедиться, что

$$M = M'' \leftthreetimes (R' \leftthreetimes D),$$

где $M'' = L$. Подгруппу L можно считать, без потери общности, минимальным нормальным делителем группы H (а значит, и M).

Тогда на основании результатов работы [19] силовские подгруппы группы M, а значит, и D элементарные абелевы. Следовательно, $R = R' \leftthreetimes D$ — вполне факторизуемая группа. Тогда если пересечение $N \bigcap R \neq 1$, то его дополнение в R дополняет N в H. Не теряя общности, можно считать, что

$$H = N \leftthreetimes R.$$

Как показано в [19], $M''R'$ — вполне факторизуемая группа, $|R'| = q$, $|D| = r$, $|M''| = p^r$, где p, q, r — различные простые числа. Таким образом,

$$H = N \leftthreetimes (\langle b \rangle \leftthreetimes \langle c \rangle),$$

где $|b| = q$, $|c| = r$.

Пусть X_α — произвольное конечное множество элементов из N. Подгруппа $U_\alpha = \langle X_\alpha, b, c \rangle$ конечна, $U_\alpha \bigcap N = C_\alpha \lhd H$ и, значит, из утверждения пункта 2 доказательства леммы 7 следует, что $C_\alpha = (U_\alpha)'$.

Рассмотрим подгруппу $B = \bigcup_\alpha C_\alpha$, порожденную всеми подгруппами C_α. Она, очевидно, нормальна в H и содержится в N. Поскольку любой элемент из N содержится по крайней мере в одном множестве X_α, то $N \subseteq B$. Значит, $N = \bigcup_\alpha C_\alpha$. Отсюда с помощью трансфинитной индукции и утверждения пункта 2 настоящего доказательства нетрудно получить разложение подгруппы H'' в прямое произведение конечных минимальных нормальных делителей группы H. Если C_β — любой из них, причем $C_\beta \subseteq H''$, то $C_\beta R$ — конечная неабелева группа с неабелевым коммутантом и дополняемыми неабелевыми подгруппами. Если же $C_\beta \not\subset H''$, то $[C_\beta, b] = 1$ и, значит, $|C_\beta|$ — простое число. Применяя ко всем таким подгруппам теорему [14], получаем, что $H = H''R$ — бесконечная группа типа 4 теоремы 1.

Лемма доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** *Необходимость*. Пусть G — локально конечная ненильпотентная и, значит, неабелева группа с дополняемыми неабелевыми подгруппами. Если

$$G = H \times B, \tag{3}$$

где обе подгруппы H и B неабелевы вполне факторизуемые, то и группа G такая же и, значит, принадлежит типу 1 доказываемой теоремы. Отсюда вследствие неабелевости группы G следует, что одна из подгрупп, например B, в разложении (3) является абелевой вполне факторизуемой, а вторая, H, — прямо неразложимой неабелевой не вполне факторизуемой группой. Если коммутант H' подгруппы H конечен, то в силу леммы 3 H можно считать конечной группой. Применяя к H теорему из [14], получаем, что H — конечная группа одного из типов 2 – 4 теоремы 1. Если же коммутант H' подгруппы H бесконечен, то необходимость следует из лемм 7 и 8.

Достаточность. 1. Пусть группа G удовлетворяет условию теоремы 1. В силу разложения (3), где B — вполне факторизуемая абелева группа, а H — неабелева группа, достаточно доказать дополняемость в группе H неабелевых подгрупп из H. Действительно, если F — подгруппа группы G, то

$$FB = F\left(\left(F \cap B\right)K\right) = FK = F \times K,$$

где K — дополнение подгруппы $F \cap B$ в B. С другой стороны, по свойству прямого произведения [20, с. 104] $FB = \left(H \cap FB\right) \times B$. Следовательно, если подгруппа $H \cap FB$ дополняема в H, то FB, а значит, и F дополняемы в группе G. Осталось заметить, что группы $H \cap FB$ и F одновременно абелевы или неабелевы.

2. Дополняемость неабелевых подгрупп в конечной группе H типа 2 – 4 теоремы 1 следует из результатов работы [14]. В дальнейшем подгруппу H можно считать бесконечной, а в силу леммы 3 можно считать, что бесконечен и ее коммутант H'. Дополняемость неабелевых подгрупп в бесконечной группе H типа 2 теоремы 1 доказывается аналогично лемме 10 [13].

3. Пусть H — бесконечная группа типа 3 и R — ее неабелева подгруппа. Тогда $RL = L \rtimes \left(RL \cap P\right)$ по лемме Черникова [16, с. 151]. Пусть $D = RL \cap P$. Единственной недополняемой подгруппой в группе P является ее коммутант P'. Поскольку $C_P\left(L\right) \lhd P$, $1 \neq C_P\left(L\right) \neq P$, то $P' \subseteq C_P\left(L\right)$. Следовательно, подгруппа RL абелева в случае $D = P'$ и этот случай невозможен. Таким образом, подгруппа D дополняема в группе P. Пусть $P = D \cdot N$, $D \cap N = 1$. Тогда $H = LP = L\left(DN\right) = \left(LD\right)N = \left(LR\right)N$, $LR \cap N = 1$. Но

$$RL = \left(R\left(R \cap L\right)\right)L = R\left(\left(R \cap L\right)L\right) = R\left(\left(R \cap L\right)T\right) = \left(R\left(R \cap L\right)\right)T = RT = T \rtimes R,$$

где T — дополнение к подгруппе $R \cap L$ в L, составленное из множителей некоторого разложения подгруппы L в прямое произведение нормальных в H подгрупп простых порядков. Отсюда следует, что подгруппа TN дополняет подгруппу R в группе H.

4. Пусть H — бесконечная группа типа 4 и R — ее неабелева подгруппа. Тогда имеет место следующее утверждение.

Для любой неабелевой группы R из H и любого минимального нормального делителя K_α группы H, содержащегося в K, либо $K_\alpha \subset R$, либо $K_\alpha \cap R = 1$.

Действительно, предположим, что K_1 — минимальный нормальный делитель группы H, содержащийся в K, причем $1 \neq K_1 \bigcap R = M \neq K_1$. Ясно, что K_1 имеет непростой порядок. Поскольку подгруппа R неабелева, то $R \bigcap \langle b \rangle = \langle b_1 \rangle \neq 1$. Далее, $M \triangleleft R$, следовательно, $b_1^{-1} M b_1 = M$, т. е. подгруппа b_1 действует на K_1 приводимо. Из полученного противоречия следует доказываемое утверждение.

Далее, используя утверждение из пункта 4 настоящего доказательства, рассуждаем, как при рассмотрении случая группы типа 3.

5. Пусть H — группа типа 4 и R — ее неабелева подгруппа. Нетрудно заметить, что вместо дополняемости неабелевой подгруппы R в указанной выше группе H достаточно доказать дополняемость в H подгруппы $Z(H')R$. Поэтому можно считать, что $Z(H') \subseteq R$. Но тогда $R = Z(H') \leftthreetimes L$, где $L = R \bigcap H'' \langle b, a \rangle$. Итак, достаточно доказать дополняемость подгруппы L в группе $H'' \langle b, a \rangle$.

Поскольку $R = Z(H') \leftthreetimes L$ и R — неабелева группа, то $L \not\subseteq H''$. Если $\pi(L) \supseteq \{q, r\}$, то подгруппа L в группе $H'' \langle b, a \rangle$ дополняема, а если $\pi(L) \bigcap \{q, r\} = \varnothing$, то подгруппа R абелева вопреки ее выбору. Так как множества $\pi(H'')$, $\{q\}$ и $\{r\}$ попарно не пересекаются, осталось рассмотреть два случая: либо $\pi(L) \bigcap \{q, r\} = \{r\}$, либо $\pi(L) \bigcap \{q, r\} = \{q\}$. В первом случае в силу полной факторизуемости группы $H'' \langle b \rangle$ подгруппа L дополняема в группе $H'' \langle b, a \rangle$. Во втором случае вследствие неабелевости группы R пересечение $L \bigcap H''$ нетривиально. Пусть P_i — силовская p_i-подгруппа коммутанта H''. Если $L \bigcap P_i \neq 1$, то подгруппа $L \bigcap P_i \rtimes \langle b' \rangle$, где $\langle b' \rangle$ — силовская q-подгруппа группы L, непримарна и дополняема в непримарно факторизуемой группе $H''_{p_i} \langle b, a \rangle$ (здесь H''_{p_i} — силовская p_i-подгруппа группы H''). Обозначим это дополнение через Y_i. Если же $L \bigcap P_i = 1$, то положим $Y_i = P_i \langle a \rangle$. Обозначим, далее, через $\overline{Y_i}$ произведение $Y_i P_{i'}$, где $P_{i'}$ — силовское p_i-дополнение коммутанта H''. Очевидно, $\overline{Y_i}$ дополняет подгруппу $(L \cap P_i) \rtimes \langle b' \rangle$ в группе $H'' \langle b, a \rangle$. Теперь нетрудно убедиться, что пересечение подгрупп $\overline{Y_i}$ дополняет подгруппу L в группе $H'' \langle b, a \rangle$. Достаточность доказана.

1. *Hall Ph.* Complemented groups // J. London Math. Soc. – 1937. – **12**. – P. 201–204.
2. *Баева Н. В.* Вполне факторизуемые группы // Докл. АН СССР . – 1953. – **92**, № 5. – С. 877 – 880.
3. *Черникова Н. В.* Группы с дополняемыми подгруппами // Мат. сб. – 1956. – **39**. – С. 273 – 292.
4. *Черникова Н. В.* К основной теореме о вполне факторизуемых группах // Группы с системами дополняемых подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1972. – С. 49 – 58.
5. *Черников С. Н.* Группы с системами дополняемых подгрупп // Мат. сб. – 1954. – **35**. – С. 93 – 128.
6. *Горчаков Ю. М.* Примитивно факторизуемые группы // Учен. зап. Перм. ун-та. – 1960. – **17**, вып. 2. – С. 15 – 31.
7. *Черников С. Н.* Исследование групп с заданными свойствами подгрупп // Укр. мат. журн. – 1969. – **21**, № 2. – С. 193 – 209.
8. *Зуб О. Н.* Группы, нециклические подгруппы которых дополняемы // Группы с ограничениями для подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1971. – С. 134 – 159.
9. *Сысак Я. П.* Конечные элементарно факторизуемые группы // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 1. – С. 67 – 76.
10. *Алексеева Э. С.* Бесконечные непримарно факторизуемые группы // Некоторые вопросы теории групп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. – С. 123 – 140.

11. *Сучков Н. М.* О некоторых линейных группах с дополняемыми подгруппами // Алгебра и логика. – 1977. – **16**, № 5. – С. 603 – 620.
12. *Барышовец П. П.* О конечных неабелевых группах с дополняемыми неабелевыми подгруппами // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 6. – С. 733 – 737.
13. *Барышовец П. П.* Конечные неабелевы 2-группы с дополняемыми неабелевыми подгруппами // Теоретико-групповые исследования. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 34 – 50.
14. *Барышовец П. П.* Об одном классе конечных групп с дополняемыми неабелевыми подгруппами // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 3. – С. 291 – 296.
15. *Барышовец П. П.* О бесконечных группах с дополняемыми неабелевыми подгруппами // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 11. – С. 1443 – 1455.
16. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
17. *Мищенко Б. И.* Локально ступенчатые группы с дополняемыми бесконечными неабелевыми подгруппами // Укр. мат. журн. –1991. – **43**, № 7-8. – С. 1098 – 1100.
18. *Taunt D.* On A-groups // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1949. – **45**, № 1. – P. 24 – 42.
19. *Маланьина Г. А., Хлебутина В. И., Шевцов Г. С.* Конечные минимальные не вполне факторизуемые группы // Мат. заметки. – 1972. – **12**, № 2. – С. 157 – 162.
20. *Курош А. Г.* Теория групп. – 3-е изд. – М.: Наука, 1967.

Получено 13.01.14,
после доработки — 02.12.14