УДК 517.5

Д. А. Ковтонюк, В. И. Рязанов (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

К ТЕОРИИ ПРОСТЫХ КОНЦОВ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

We give a canonical representation of prime ends in regular domains and, on this basis, study the boundary behavior of the so-called lower Q-homeomorphisms obtained as a natural generalization of quasiconformal mappings. We establish a series of effective conditions imposed on a function $Q(x)$ for the homeomorphic extension of the given mappings by prime ends in domains with regular boundaries. The developed theory is applicable, in particular, to mappings of the Orlicz – Sobolev classes and also to finitely bi-Lipschitz mappings, which can be regarded as a significant generalization of the well-known classes of isometric and quasiisometric mappings.

Наведено канонічне зображення простих кінців у регулярних областях і на цій підставі досліджено межову поведінку так званих нижніх Q-гомеоморфізмів, які є істотним узагальненням квазіконформних відображень. Знайдено низку ефективних умов на функцію $Q(x)$ для гомеоморфного продовження вказаних відображень по простих кінцях в областях з регулярними межами. Розвинуту теорію можна застосувати, зокрема, до відображень класів Орліча – Соболєва, а також до скінченно біліпшицевих відображень, які є істотним узагальненням відомих класів ізометричних та квазіізометричних відображень.

1. Введение. Проблема граничного поведения является одной из центральных в теории квазиконформных отображений и их обобщений. В последние годы интенсивно изучаются различные классы отображений с конечным искажением, естественным образом обобщающие конформные, квазиконформные и квазирегулярные отображения. При этом, как и ранее, основным геометрическим методом в теории отображений остается метод модулей (см., например, монографии [1, 11, 13, 15, 21 – 23]).

С точки зрения конформных отображений и их обобщений неудовлетворительно рассматривать индивидуальные точки границы односвязной области на плоскости как ее простейшие образующие элементы. Действительно, когда такая область по теореме Римана отображается конформно на единичный круг, точкам единичной окружности соответствуют по теореме Каратеодори простые концы области. Термин „простой конец” восходит к Каратеодори. По истории вопроса (см., например, [10, 12]).

Далее в $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$ используется *сферическая* (*хордальная*) *метрика* $h(x,y) = \big|\pi(x) - \pi(y)\big|$, где π — стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n\left(\dfrac{1}{2}e_{n+1}, \dfrac{1}{2}\right)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, т.е.

$$h(x,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}, \qquad h(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}, \qquad x \neq \infty \neq y.$$

Сферическим (*хордальным*) *диаметром* множества $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ называется величина

$$h(E) = \sup_{x,y\in E} h(x,y).$$

Пусть ω — открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^k}$, $k = 1,\ldots,n-1$. Непрерывное отображение $\sigma\colon \omega \to \overline{\mathbb{R}^n}$ называется k-*мерной поверхностью* в $\overline{\mathbb{R}^n}$, а $(n-1)$-мерная поверхность σ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ — просто *поверхностью*. Поверхность $\sigma\colon \omega \to D$ называется *жордановой поверхностью в* D, если $\sigma(z_1) \neq \sigma(z_2)$ при $z_1 \neq z_2$. В дальнейшем будем использовать σ для обозначения образа

$\sigma(\omega) \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ при отображении σ, $\overline{\sigma}$ вместо $\overline{\sigma(\omega)}$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ и $\partial\sigma$ вместо $\overline{\sigma(\omega)} \setminus \sigma(\omega)$. Жорданова поверхность σ в D называется *разрезом* области D, если σ разбивает D, т. е. $D \setminus \sigma$ имеет более одной компоненты, $\partial\sigma \cap D = \varnothing$ и $\partial\sigma \cap \partial D \neq \varnothing$.

Последовательность разрезов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, \ldots$ области D называется *цепью*, если:

(i) $\overline{\sigma_i} \cap \overline{\sigma_j} = \varnothing$ для всех $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots$;

(ii) для любого $m = 1, 2, \ldots$ $D \setminus \sigma_m$ состоит из двух подобластей, а σ_{m-1} и σ_{m+1} содержатся в различных компонентах $D \setminus \sigma_m$;

(iii) $\cap\, d_m = \varnothing$, где d_m — компонента $D \setminus \sigma_m$, содержащая σ_{m+1}.

Наконец, цепь разрезов $\{\sigma_m\}$ будем называть *регулярной*, если

(iv) $h(\sigma_m) \to 0$ при $m \to \infty$.

В соответствии с определением цепь разрезов $\{\sigma_m\}$ определяется цепью областей $d_m \subset D$ таких, что $\partial\, d_m \cap D = \sigma_m$ и $d_1 \supset d_2 \supset \ldots \supset d_m \supset \ldots$. Две цепи разрезов $\{\sigma_m\}$ и $\{\sigma_l'\}$ называются *эквивалентными*, если каждая область d_m, $m = 1, 2, \ldots$, содержит все области d_l', за исключением конечного числа, и каждая область d_l', $l = 1, 2, \ldots$, содержит все области d_m, также за исключением конечного числа. *Конец* K области D является классом эквивалентных цепей разрезов D. Следуя [12], говорим, что конец K является *простым*, если он содержит цепь разрезов $\{\sigma_m\}$ такую, что

$$\lim_{m\to\infty} M\big(\Delta(C, \sigma_m; D)\big) = 0$$

для некоторого континуума C в D. Здесь и всюду далее, как обычно, $\Delta(E, F; D)$ обозначает семейство Γ всех кривых $\gamma\colon [a, b] \to \overline{\mathbb{C}}$, соединяющих множества E и F в D, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $a < t < b$. Определение модуля $M(\Gamma)$ приведено ниже в (1).

Если класс эквивалентности K содержит по крайней мере одну регулярную цепь, то конец K будем называть *регулярным*. Как это будет следовать из леммы 1, любой регулярный конец является простым.

Пусть K — конец области D в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $\{\sigma_m\}$ и $\{\sigma_m'\}$ — две цепи в K и d_m, d_m' — области, соответствующие σ_m и σ_m'. Тогда

$$\bigcap \overline{d_m} \subseteq \bigcap \overline{d_m'} \subseteq \bigcap \overline{d_m}$$

и, таким образом,

$$\bigcap \overline{d_m} = \bigcap \overline{d_m'},$$

т. е. множество

$$I(K) = \bigcap \overline{d_m}$$

зависит только от K, но не зависит от выбора цепи разрезов $\{\sigma_m\}$. Множество $I(K)$ называется *телом конца* K. Ясно, что $I(K)$ является континуумом, т. е. связным компактом (см., например, I(9.12) в [24]). Кроме того, в силу условий (ii) и (iii) получаем

$$I(K) = \bigcap (\partial d_m \cap \partial D) = \partial D \ \cap\ \bigcap \partial d_m.$$

Таким образом, приходим к следующему заключению.

Предложение 1. *Для любого конца K области D в $\overline{\mathbb{R}^n}$*

$$I(K) \subseteq \partial D.$$

2. О нижних Q-гомеоморфизмах. Класс нижних Q-гомеоморфизмов был введен в работе [6] (см. также [11]) и мотивирован кольцевым определением квазиконформных отображений по Герингу [2]. Теория этого класса отображений нашла интересные приложения к теории отображений классов Соболева и Орлича – Соболева (см., например, [8, 9]).

Напомним, что *функцией кратности* поверхности $\sigma\colon \omega \to \mathbb{R}^n$ в точке $y \in \mathbb{R}^n$ называется число прообразов

$$N(\sigma, y) = \operatorname{card} \sigma^{-1}(y) = \operatorname{card}\{x \in \omega : \sigma(x) = y\}.$$

Известно, что функция кратности полунепрерывна снизу, т. е.

$$N(\sigma, y) \geqslant \liminf_{m\to\infty} N(\sigma, y_m)$$

для любой последовательности $y_m \in \mathbb{R}^n$ такой, что $y_m \to y \in \mathbb{R}^n$ при $m \to \infty$ (см., например, теорему II.3.3 в [14]). Таким образом, функция $N(\sigma, y)$ является борелевской и поэтому измерима относительно любой меры Хаусдорфа H^k (см., например, теорему II(7.4) в [19]).

k-Мерная хаусдорфова площадь в $\mathbb{R}^n$, $k = 1, \ldots, n-1$, или просто *площадь*, ассоциированная с поверхностью $\sigma\colon \omega \to \mathbb{R}^n$, определяется формулой

$$\mathcal{A}(B) = \mathcal{A}_\sigma(B) = \mathcal{A}^k_\sigma(B) := \int\limits_B N(\sigma, y)\, dH^k y$$

для произвольного борелевского множества $B \subseteq \mathbb{R}^n$.

Если $\varrho\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ — борелевская функция, то ее *интеграл по поверхности* σ определяется равенством

$$\int\limits_\sigma \varrho\, d\mathcal{A} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varrho(y)\, N(\sigma, y)\, dH^k y.$$

Борелевская функция $\varrho\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ k-мерных поверхностей σ в $\mathbb{R}^n$ (пишем $\varrho \in \operatorname{adm}\Gamma$), если

$$\int\limits_\sigma \varrho^k\, d\mathcal{A} \geqslant 1$$

для всех $\sigma \in \Gamma$. *Модулем* семейства Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\varrho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varrho^n(x)\, dm(x). \tag{1}$$

Пусть даны область $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, точка $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$ и измеримая функция $Q\colon \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$. Говорим, что гомеоморфизм $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ есть *нижний Q-гомеоморфизм в точке x_0*, если

$$M(f\Sigma_\varepsilon) \geqslant \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|\, Q\|_{\,n-1}(x_0,r)} \tag{2}$$

для всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ и некоторого $\varepsilon_0 < d_0 = \sup_{x\in D}\,|x-x_0|$, где Σ_ε — семейство пересечений сфер $S(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n : |x-x_0|=r\}$, $r\in(\varepsilon,\varepsilon_0)$, с областью D и

$$\|\, Q\|_{\,n-1}(x_0,r) = \left(\int\limits_{D\cap S(x_0,r)} Q^{n-1}\, d\mathcal{A}\right)^{1/(n-1)}.$$

Как обычно, это понятие может быть распространено на случай $x_0=\infty\in\overline{D}$ с помощью инверсии относительно единичной сферы в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $T(x)=x/|x|^2$, $T(\infty)=0$, $T(0)=\infty$. Мы также говорим, что гомеоморфизм $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ является *нижним Q-гомеоморфизмом в области D*, если f — нижний Q-гомеоморфизм в каждой точке $x_0\in\overline{D}$. Эквивалентное определение можно найти в статье [6] и монографии [11].

3. О каноническом представлении концов пространственных областей.

Лемма 1. *Любой регулярный конец K области D в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n\geqslant 2$, содержит цепь разрезов σ_m, лежащих на сферах S_m с центром в некоторой точке $x_0\in\partial D$ и с хордальными радиусами $\rho_m\to 0$ при $m\to\infty$. Любой регулярный конец K ограниченной области D в $\mathbb{R}^n$ содержит цепь разрезов σ_m, лежащих на сферах S_m с центром в некоторой точке $x_0\in\partial D$ и с евклидовыми радиусами $r_m\to 0$ при $m\to\infty$.*

Доказательство. Мы ограничимся случаем области D в $\overline{\mathbb{R}^n}$ с хордальной метрикой. Второй случай рассматривается аналогично.

Пусть $\{\sigma_m\}$ — последовательность разрезов конца K такая, что $h(\sigma_m)\to 0$ при $m\to\infty$, и x_m — последовательность точек на σ_m. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_m\to\to x_0\in\partial D$ при $m\to\infty$, поскольку $\overline{\mathbb{R}^n}$ является компактным метрическим пространством. Тогда

$$\rho_m^- := h(x_0,\sigma_m) = \inf_{x\in\sigma_m} h(x,x_0) = \inf_{x\in\overline{\sigma_m}} h(x,x_0)\to 0,$$

так как $h(\sigma_m)\to 0$ при $m\to\infty$. Кроме того,

$$\rho_m^+ := H(x_0,\sigma_m) = \sup_{x\in\sigma_m} h(x,x_0) = \sup_{x\in\overline{\sigma_m}} h(x,x_0)$$

является хаусдорфовым расстоянием между компактными множествами $\{x_0\}$ и $\overline{\sigma_m}$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$. По условию (i) в определении конца без ограничения общности можно считать, что $\rho_m^- > 0$ и $\rho_{m+1}^+ < \rho_m^-$ при всех $m=1,2,\ldots$.

Положим

$$\delta_m = \Delta_m\setminus d_{m+1}, \qquad \Delta_m = S_m\cap d_m, \quad m=1,2,\ldots,$$

где

$$S_m = \left\{\, x\in\overline{\mathbb{R}^n} : h(x_0,x) = \frac{1}{2}\left(\rho_m^- + \rho_{m+1}^+\right)\right\}.$$

Очевидно, что Δ_m и δ_m являются относительно замкнутыми подмножествами области d_m.

Заметим, что d_{m+1} содержится в одной из компонент открытого множества $d_m \setminus \delta_m$. Действительно, предположим, что существует пара точек x_1 и $x_2 \in d_{m+1}$ в различных компонентах Ω_1 и Ω_2 в $d_m \setminus \delta_m$. Тогда x_1 и x_2 могут быть соединены непрерывным путем $\gamma\colon [0,1] \to d_{m+1}$. Кроме того, d_{m+1}, а значит и γ, не пересекает δ_m по построению и, следовательно, $[0,1] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \omega_k$, где $\omega_k = \gamma^{-1}(\Omega_k)$, Ω_k — перенумерация компонент $d_m \setminus \delta_m$. При этом ω_k открыты в $[0,1]$, поскольку Ω_k открыты и γ непрерывно. Однако последнее противоречит связности $[0,1]$, так как $\omega_1 \neq \varnothing$ и $\omega_2 \neq \varnothing$ и, кроме того, ω_i и ω_j попарно не пересекаются при $i \neq j$.

Пусть d_m^* — компонента $d_m \setminus \delta_m$, содержащая d_{m+1}. Тогда по построению $d_{m+1} \subseteq d_m^* \subseteq d_m$. Остается показать, что $\partial d_m^* \setminus \partial D \subseteq \delta_m$. Во-первых, очевидно, что $\partial d_m^* \setminus \partial D \subseteq \delta_m \cup \sigma_m$, поскольку каждая точка в $d_m \setminus \delta_m$ принадлежит либо d_m^*, либо другой компоненте $d_m \setminus \delta_m$, и поэтому не принадлежит ∂d_m^* вследствие относительной замкнутости δ_m в d_m. Таким образом, достаточно доказать, что $\sigma_m \cap \partial d_m^* \setminus \partial D = \varnothing$.

Предположим, что существует точка $x_* \in \sigma_m$ в $\partial d_m^* \setminus \partial D$. Тогда найдется точка $y_* \in d_m^*$, которая достаточно близка к σ_m, с

$$h(x_0, y_*) > \frac{1}{2}\left(\rho_m^- + \rho_{m+1}^+\right),$$

так как $h(x_0, y_*) \geqslant \rho_m^-$ и $\rho_{m+1}^+ < \rho_m^-$. С другой стороны, существует точка $z_* \in d_{m+1}$, которая достаточно близка к σ_{m+1}, такая, что

$$h(x_0, z_*) < \frac{1}{2}\left(\rho_m^- + \rho_{m+1}^+\right).$$

Однако точки z_* и y_* могут быть соединены непрерывным путем $\gamma\colon [0,1] \to d_{m+1}^*$. Заметим, что множества $\gamma^{-1}(d_m^* \setminus \overline{d_{m+1}})$ состоят из счетного набора открытых непересекающихся интервалов из $[0,1]$ и интервала $(t_0, 1]$ с $t_0 \in (0,1)$ и $z_0 = \gamma(t_0) \in \sigma_{m+1}$. Таким образом,

$$h(x_0, z_0) < \frac{1}{2}\left(\rho_m^- + \rho_{m+1}^+\right),$$

так как $h(x_0, z_0) \leqslant \rho_{m+1}^+$ и $\rho_{m+1}^+ < \rho_m^-$. Теперь, в силу непрерывности функции $\varphi(t) = h\big(x_0, \gamma(t)\big)$, найдется $\tau_0 \in (t_0, 1)$ такое, что

$$h(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left(\rho_m^- + \rho_{m+1}^+\right),$$

где $y_0 = \gamma(\tau_0) \in d_m^*$ вследствие выбора γ. Полученное противоречие опровергает сделанное выше предположение, что и завершает доказательство леммы.

В дальнейшем говорим, что *последовательность точек* x_k, $k = 1, 2, \ldots$, области D в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, *сходится к концу* K, если для любой его цепи $\{\sigma_m\}$ и любой области d_m все точки x_k, за исключением конечного их числа, принадлежат d_m.

4. Об областях с регулярными границами. Напомним, что область $D \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geqslant 2$, называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0, для которой $V \cap D$ связно (другими словами, для любого шара $B_0 = B(x_0, r_0)$ существует компонента связности $B_0 \cap D$, которая включает в себя $B \cap D$, где $B = B(x_0, r)$, $r \in \big(0, r_0)\big)$. Отметим, что любая жорданова область D в $\mathbb{R}^n$ является локально связной в каждой точке своей границы ∂D (см., например, [25, с. 66]).

Следуя [5, 6] (см. также [11, 16]), говорим, что граница ∂D *слабо плоская в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 и любого числа $N > 0$ найдется окрестность $V \subset U$ точки x_0 такая, что

$$M\big(\Delta(E, F; D)\big) \geqslant N$$

для любых континуумов E и F в D, пересекающих обе границы ∂U и ∂V. Говорим, что ∂D *слабо плоская*, если она слабо плоская в каждой своей точке.

Также говорим, что точка $x_0 \in \partial D$ является *сильно достижимой*, если для каждой окрестности U точки x_0 найдутся компакт E, лежащий в области D, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и некоторое число $\delta > 0$ такие, что

$$M\big(\Delta(E, F; D)\big) \geqslant \delta$$

для всех континуумов F, лежащих в области D и пересекающих ∂U и ∂V. Говорят, что граница области является *сильно достижимой*, если каждая ее точка является сильно достижимой.

***Замечание* 1.** В определении слабо плоских и сильно достижимых границ в качестве окрестностей U и V точки x_0 можно брать шары (замкнутые или открытые) с центром в точке x_0. Заметим также, что если граница области D в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, слабо плоская в точке $x_0 \in \partial D$, то D сильно достижима и локально связна в x_0 (см. [5, 6], а также [11, 16]). Таким образом, любая область D в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, со слабо плоской границей сильно достижима и локально связна в каждой своей граничной точке.

Напомним, что гомеоморфизм f между областями U и U' в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, называется *квазиконформным отображением* (см. 13.1 в [22]), если при некотором $K < \infty$

$$M(\Gamma)/K \geqslant M(f(\Gamma)) \geqslant K\, M(\Gamma)$$

для любого семейства кривых Γ в U. Другими словами, модуль является квазиинвариантом при квазиконформных отображениях.

Границу области D в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, будем называть *локально квазиконформной*, если любая точка $x_0 \in \partial D$ имеет окрестность U, которая с помощью некоторого квазиконформного отображения f переводится в единичный шар $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$, так что $\partial D \cap U$ переходит в пересечение $\mathbb{B}^n$ с гиперплоскостью, проходящей через начало координат, и $f(x_0) = 0$. Как это следует из определений, локально квазиконформная граница является слабо плоской.

В теории отображений и дифференциальных уравнений также часто встречаются так называемые липшицевы границы. Говорят, что область D в $\mathbb{R}^n$ и ее граница являются *липшицевыми*, если любая точка $x_0 \in \partial D$ имеет окрестность U, которая с помощью некоторого билипшицева отображения f переводится в единичный шар $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$, так что $\partial D \cap U$ переходит в пересечение $\mathbb{B}^n$ с гиперплоскостью, проходящей через начало координат, и $f(x_0) = 0$.

В связи с этим напомним, что отображение $f\colon X \to X'$ между метрическими пространствами (X, d) и (X', d') называется *липшицевым*, если $d'\big(f(x_1), f(x_2)\big) \leqslant Cd(x_1, x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in X$, для некоторой конечной постоянной C. Если в дополнение $d(x_1, x_2) \leqslant \leqslant cd'\big(f(x_1), f(x_2)\big)$ для любых $x_1, x_2 \in X$, то отображение f называется *билипшицевым*. Заметим, что билипшицевы отображения f в $\mathbb{R}^n$ являются квазиконформными и, таким образом, липшицевы границы являются локально квазиконформными и, следовательно, слабо плоскими.

Далее говорим, что ограниченная область D в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, *регулярна*, если ее можно квазиконформно отобразить на некоторую липшицеву область D_* с локально квазиконформной границей. Ясно, что любая регулярная область конечносвязна, так как при любом гомеоморфизме областей D и D' в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, граничные компоненты областей D и D' находятся в естественном взаимно однозначном соответствии (см., например, лемму 5.3 в [4] или лемму 6.5 в [11]). Заметим, что на плоскости любая конечносвязная область, ни одна граничная компонента которой не вырождается в точку, отображается конформно на некоторую область, ограниченную конечным числом попарно непересекающихся окружностей, и потому является регулярной (см., например, теорему V.6.2 в [3]).

Как следует из теоремы 5.1 в [12], любой простой конец в регулярной области является регулярным. Комбинируя этот факт с леммой 1, получаем следующее утверждение.

Лемма 2. *Любой простой конец P регулярной области D в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, содержит цепь разрезов σ_m, лежащих на сферах S_m с центром в некоторой точке $x_0 \in \partial D$ и с евклидовыми радиусами $r_m \to 0$ при $m \to \infty$.*

***Замечание* 2.** Как следует из теоремы 4.1 в [12], при квазиконформном отображении g области D_0 с локально квазиконформной границей на область D в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, имеет место взаимно однозначное соответствие между точками границы D_0 и простыми концами области D и при этом предельные множества $C(g, b)$, $b \in \partial D_0$, совпадают с телом $I(P)$ соответствующего простого конца P в D.

Если $\overline{D}_p$ — пополнение регулярной области D ее простыми концами и g_0 — квазиконформное отображение некоторой области D_0 с локально квазиконформной границей на D, то естественно в $\overline{D}_p$ определить метрику $\rho_0(p_1, p_2) = \big|\widetilde{g_0}^{-1}(p_1) - \widetilde{g_0}^{-1}(p_2)\big|$, где $\widetilde{g_0}$ — описанное выше продолжение g_0 на $\overline{D_0}$. Если g_* — другое квазиконформное отображение некоторой области D_* с локально квазиконформной границей на область D, то соответствующая метрика $\rho_*(p_1, p_2) = \big|\widetilde{g_*}^{-1}(p_1) - \widetilde{g_*}^{-1}(p_2)\big|$ порождает ту же самую сходимость и, следовательно, ту же самую топологию в $\overline{D}_p$, что и метрика ρ_0, так как $g_0 \circ g_*^{-1}$ является квазиконформным отображением между областями D_* и D_0, которое по теореме 4.1 из [12] продолжается до гомеоморфизма между $\overline{D_*}$ и $\overline{D_0}$.

В дальнейшем указанную топологию в пространстве $\overline{D}_p$ будем называть *топологией простых концов*.

5. О продолжении прямых отображений.

Лемма 3. *Пусть D и D' — регулярные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $f\colon D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм. Если*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{\|\,Q\|_{\,n-1}(x_0, r)} = \infty \qquad \forall\ x_0 \in \partial D \tag{3}$$

при некотором $\delta(x_0) < d(x_0) = \sup_{x \in D}\ |x - x_0|$, где

$$\| Q\|_{n-1}(x_0, r) = \left(\int\limits_{D\cap S(x_0,r)} Q^{n-1}\, d\mathcal{A} \right)^{1/(n-1)},$$

то f продолжается до непрерывного отображения $\overline{D}_P$ на $\overline{D'}_P$.

Доказательство. В силу замечания 2 без ограничения общности можно считать, что область D' имеет локально квазиконформную границу и $\overline{D'}_P = \overline{D'}$. Снова по замечанию 2, вследствие метризуемости пространств $\overline{D}_P$ и $\overline{D'}_P$, достаточно доказать, что для любого простого конца P области D предельное множество

$$L = C(P, f) := \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y = \lim_{k\to\infty} f(x_k), x_k \to P, x_k \in D \right\}$$

состоит из единственной точки $y_0 \in \partial D'$.

Заметим, что $L \neq \varnothing$ в силу компактности множества $\overline{D'}$ и является подмножеством $\partial D'$ (см., например, предложение 2.5 в [16] или предложение 13.5 в [11]). Допустим, что имеются две точки y_0 и $z_0 \in L$, и пусть $U = B(y_0, r_0)$, где $0 < r_0 < |y_0 - z_0|$.

Пусть $x_0 \in I(P) \subseteq \partial D$ и σ_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — цепь разрезов, лежащих на сферах $S_k = S(x_0, r_k)$, из леммы 2 с ассоциированными областями D_k. Тогда в областях $D'_k = f(D_k)$ найдутся точки y_k и z_k с $|y_0 - y_k| < r_0$ и $|y_0 - z_k| > r_0$, $y_k \to y_0$ и $z_k \to z_0$ при $k \to \infty$. Пусть C_k — непрерывные кривые, соединяющие y_k и z_k в D'_k. Заметим, что по построению $\partial U \cap C_k \neq \varnothing$.

По условию сильной достижимости точки y_0 (см. замечание 1) найдутся континуум $E \subset D'$ и число $\delta > 0$, для которых

$$M\big(\Delta(E, C_k; D')\big) \geqslant \delta$$

при больших k. Без ограничения общности можно считать, что последнее условие выполнено для всех $k = 1, 2, \ldots$. Заметим, что $C = f^{-1}(E)$ является компактом в D, и потому $\varepsilon_0 = \operatorname{dist}(x_0, C) > 0$. Опять же, без ограничения общности, можно считать, что $r_k < \varepsilon_0$ для всех $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть Γ_m — семейство всех непрерывных путей в $D \setminus D_m$, соединяющих сферу $S_0 = S(x_0, \varepsilon_0)$ и $\overline{\sigma_m}$, $m = 1, 2, \ldots$. Заметим, что по построению $C_k \subset D'_k \subset D'_m$ для любых $m \leqslant k$ и, таким образом, по принципу минорирования $M\big(f(\Gamma_m)\big) \geqslant \delta$ при всех $m = 1, 2, \ldots$.

С другой стороны, величина $M\big(f(\Gamma_m)\big)$ равна емкости конденсатора в D' с обкладками $\overline{D'_m}$ и $\overline{f(D \setminus B_0)}$, где $B_0 = B(x_0, \varepsilon_0)$ (см., например, [20]). Таким образом, по принципу минорирования и теореме 3.13 из [26]

$$M\big(f(\Gamma_m)\big) \leqslant \frac{1}{M^{n-1}\big(f(\Sigma_m)\big)},$$

где Σ_m — семейство пересечений с областью D всех сфер $S(x_0, \rho)$, $\rho \in (r_m, \varepsilon_0)$, так как $f(\Sigma_m) \subset \Sigma\big(f(S_m), f(S_0)\big)$. Здесь $\Sigma\big(f(S_m), f(S_0)\big)$ состоит из всех замкнутых множеств в D', отделяющих $f(S_m)$ и $f(S_0)$. Наконец, по условию (3) получаем, что $M\big(f(\Gamma_m)\big) \to 0$ при $m \to \infty$ (см. лемму 9.2 в [6], а также лемму 9.6 в [11]). Полученное противоречие опровергает предположение, что предельное множество $C(P, f)$ состоит более чем из одной точки.

6. О продолжении обратных отображений.

Лемма 4. *Пусть D и D' — регулярные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, P_1 и P_2 — различные простые концы области D, f — нижний Q-гомеоморфизм области D на область D', $z_1 \in I(P_1) \subseteq \partial D$ и σ_m, $m = 1, 2, \ldots,$ — цепь разрезов простого конца P_1 из леммы 2, лежащих на сферах $S(z_1, r_m)$, с ассоциированными областями D_m. Предположим, что функция Q интегрируема в степени $n-1$ по поверхностям*

$$D(r) = \big\{x \in D \colon |\, x - z_1| = r\big\} = D \cap S(z_1, r) \tag{4}$$

для некоторого множества E чисел $r \in (0, d)$ положительной линейной меры, где $d = r_{m_0}$, m_0 — минимальный номер, для которого область D_{m_0} не содержит последовательностей, сходящихся к P_2. Если $\partial D'$ слабо плоская, то

$$C(P_1, f) \cap C(P_2, f) = \varnothing.$$

В силу метризуемости расширения $\overline{D}_P$ области D по простым концам (см. замечание 2) число m_0 в лемме 4 всегда существует.

Доказательство. Выберем $\varepsilon \in (0, d)$ так, что $E_0 := \{r \in E \colon r \in (\varepsilon, d)\}$ имеет положительную линейную меру. Такой выбор возможен в силу счетной полуаддитивности линейной меры и исчерпания $E = \cup E_m$, где $E_m = \{r \in E \colon r \in (1/m, d)\}$, $m = 1, 2, \ldots$. Заметим, что по условию (2)

$$M\big(f(\Sigma_\varepsilon)\big) > 0, \tag{5}$$

где Σ_ε — семейство всех поверхностей $D(r)$, $r \in (\varepsilon, d)$, из (4).

Предположим, что $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$, где $C_i = C(P_i, f)$, $i = 1, 2$. По построению найдется такое $m_1 > m_0$, что σ_{m_1} лежит на сфере $S(z_1, r_{m_1})$ с $r_{m_1} < \varepsilon$. Пусть $D_0 = D_{m_1}$ и $D_* \subseteq D \setminus D_{m_0}$ — некоторая область, определяемая цепью разрезов простого конца P_2. Пусть $y_0 \in C_1 \cap C_2$. Выберем $r_0 > 0$ так, что $S(y_0, r_0) \cap f(D_0) \neq \varnothing$ и $S(y_0, r_0) \cap f(D_*) \neq \varnothing$.

Положим $\Gamma = \Delta(\overline{D_0}, \overline{D_*}; D)$. Согласно (5), по принципу минорирования и теореме 3.13 из [26]

$$M\big(f(\Gamma)\big) \leqslant \frac{1}{M^{n-1}\big(f(\Sigma_\varepsilon)\big)} < \infty.$$

Пусть $M_0 > M\big(f(\Gamma)\big)$ — некоторое конечное число. По условию $\partial D'$ слабо плоская, и потому найдется $r_* \in (0, r_0)$ такое, что

$$M\big(\Delta(E, F; D')\big) \geqslant M_0$$

для всех континуумов E и F в D', пересекающих сферы $S(y_0, r_0)$ и $S(y_0, r_*)$. Однако эти сферы можно соединить кривыми c_1 и c_2 в областях $f(D_0)$ и $f(D_*)$ и, в частности, для этих кривых

$$M_0 \leqslant M\big(\Delta(c_1, c_2; D')\big) \leqslant M\big(f(\Gamma)\big).$$

Полученное противоречие опровергает предположение, что $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$.

Теорема 1. *Пусть D и D' — регулярные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Если f является нижним Q-гомеоморфизмом D на D' с $Q \in L^{n-1}(D)$, то f^{-1} имеет продолжение по простым концам до непрерывного отображения $\overline{D'_p}$ на $\overline{D_p}$.*

Доказательство. По теореме Фубини (см. например, [19]), множество

$$E(x_0) = \left\{ r \in (0, d(x_0)) : Q|_{D(x_0,r)} \in L^{n-1}(D(x_0,r)) \right\} \quad \forall\, x_0 \in \partial D,$$

где $d(x_0) = \sup_{x \in D} |x - x_0|$ и $D(x_0,r) = D \cap S(x_0,r)$, имеет положительную линейную меру, поскольку $Q \in L^{n-1}(D)$. По замечанию 2 без ограничения общности можно считать, что область D' имеет слабо плоскую границу. Таким образом, заключение теоремы получается из леммы 4 рассуждением от противного с использованием метризуемости пространств $\overline{D'_p}$ и $\overline{D_p}$ в соответствии с замечанием 2.

Аналогично, комбинируя лемму 4 с леммой 9.2 из [6] (см. также лемму 9.6 в [11]), непосредственно получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть D и D' — регулярные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Если $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм с условием* (3), *то f^{-1} может быть продолжено по простым концам до непрерывного отображения $\overline{D'_p}$ на $\overline{D_p}$.*

7. О гомеоморфном продолжении на границу. Наконец, комбинируя лемму 3 с теоремой 2, получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть D и D' — регулярные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм с*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{\|\, Q\|_{\,n-1}(x_0,r)} = \infty \quad \forall\, x_0 \in \partial D \tag{6}$$

при некотором $\delta(x_0) \in (0, d(x_0))$, где $d(x_0) = \sup_{x \in D}\, |x - x_0|$ и

$$\|\, Q\|_{\,n-1}(x_0,r) = \left(\int\limits_{D \cap S(x_0,r)} Q^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} \right)^{1/(n-1)}.$$

Тогда f имеет продолжение по простым концам до гомеоморфизма $\overline{D_p}$ на $\overline{D'_p}$.

***Следствие* 1.** *В частности, заключение теоремы* 3 *имеет место, если*

$$q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r} \right]^{n-1} \right) \quad \forall\, x_0 \in \partial D \tag{7}$$

при $r \to 0$, где $q_{x_0}(r)$ — среднее интегральное значение Q^{n-1} над сферой $|x - x_0| = r$.

Используя лемму 2.2 из работы [17], по теореме 3 получаем следующую общую лемму, которая, в свою очередь, позволяет получать новые критерии.

Лемма 5. *Пусть D и D' — регулярные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм. Предположим, что*

$$\int\limits_{D(x_0,\varepsilon)} Q^{n-1}(x) \psi^n\big(|x - x_0|\big)\, dm(x) = o\big(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)\big) \quad \forall x_0 \in \partial D \tag{8}$$

при $\varepsilon \to 0$ *и некотором* $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$, *где* $D(x_0, \varepsilon) = \{x \in D\colon \varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0\}$ *и* $\psi(t)$ — *неотрицательная измеримая функция на* $(0, \infty)$, *такая, что*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Тогда f *имеет продолжение по простым концам до гомеоморфизма* $\overline{D_p}$ *на* $\overline{D'_p}$.

***Замечание* 3.** Отметим, что (8) выполнено, в частности, если

$$\int\limits_{D(x_0, \varepsilon_0)} Q^{n-1}(x) \psi^n\big(|x - x_0|\big)\, dm(x) < \infty \quad \forall x_0 \in \partial D \tag{9}$$

для некоторого $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$ и $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Другими словами, для продолжимости f до гомеоморфизма $\overline{D_p}$ на $\overline{D'_p}$ достаточно, чтобы интегралы в (9) сходились для некоторой неотрицательной функции $\psi(t)$, которая локально интегрируема на $(0, \varepsilon_0]$, но имеет неинтегрируемую особенность в нуле.

Следуя [4], говорим, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$ $\big($пишем $\varphi \in \mathrm{FMO}(x_0)\big)$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}}\ \fint_{B(x_0, \varepsilon)} \big|\varphi(x) - \widetilde{\varphi}_\varepsilon\big|\, dm(x) < \infty,$$

где $\widetilde{\varphi}_\varepsilon$ обозначает среднее интегральное значение функции φ над шаром $B(x_0, \varepsilon)$.

Выбирая в лемме 5 $\psi(t) := \dfrac{1}{t \log 1/t}$ и используя следствие 2.3 о функциях класса FMO из работы [4] (см. также следствие 6.3 в [11]), получаем следующий результат.

Теорема 4. *Пусть* D *и* D' — *регулярные области в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, *и* $f\colon D \to D'$ — *нижний* Q-*гомеоморфизм. Если* $Q^{n-1}(x)$ *имеет конечное среднее колебание в каждой точке* $x_0 \in \partial D$, *то* f *продолжим по простым концам до гомеоморфизма* $\overline{D_p}$ *на* $\overline{D'_p}$.

***Следствие* 2.** *В частности, заключение теоремы* 4 *имеет место, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \fint_{B(x_0, \varepsilon)} Q^{n-1}(x) dm(x) < \infty \quad \forall x_0 \in \partial D.$$

Следующая теорема также вытекает из леммы 5 при выборе $\psi(t) = 1/t$.

Теорема 5. *Пусть* D *и* D' — *регулярные области в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, *и* $f\colon D \to D'$ — *нижний* Q-*гомеоморфизм. Если при* $\varepsilon \to 0$ *и некотором* $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$

$$\int\limits_{\varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0} Q(x)\, \frac{dm(x)}{|x - x_0|^n} = o\left(\left[\log \frac{1}{\varepsilon}\right]^n\right) \quad \forall x_0 \in \partial D, \tag{10}$$

то f *продолжим по простым концам до гомеоморфизма* $\overline{D_p}$ *на* $\overline{D'_p}$.

***Замечание* 4.** Выбирая в лемме 5 функцию $\psi(t) = 1/(t \log 1/t)$ вместо $\psi(t) = 1/t$, условие (10) можно заменить более слабым условием

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)\, dm(x)}{|x-x_0|\, \log \dfrac{1}{|x-x_0|}} = o\left(\left[\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^n\right),$$

а (7) — условием

$$q_{x_0}(r) = o\left(\left[\log\frac{1}{r}\log\,\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right).$$

Можно привести целую шкалу соответствующих условий логарифмического типа, используя соответствующие функции $\psi(t)$.

Теорема 3 имеет много других следствий. Приведем одно из них.

Теорема 6. *Пусть D и D' — регулярные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $f\colon D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм с*

$$\int\limits_D \Phi\left(Q^{n-1}(x)\right) dm(x) < \infty \tag{11}$$

для неубывающей выпуклой функции $\Phi\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$ такой, что при некотором $\delta > \Phi(0)$

$$\int\limits_\delta^\infty \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty. \tag{12}$$

Тогда f имеет продолжение по простым концам до гомеоморфизма $\overline{D_p}$ на $\overline{D'_p}$.

Действительно, условия (11) и (12) влекут условие (6) по теореме 3.1 и следствию 3.2 из работы [18] и, таким образом, теорема 6 является непосредственным следствием теоремы 3. Заметим также, что условие (12) является не только достаточным, но и необходимым для непрерывного продолжения на границу отображений f с интегральными ограничениями вида (11) (см., например, теорему 5.1 и замечание 5.1 в [7]). Ряд условий, эквивалентных условию (12), можно найти в теореме 2.1 из работы [18].

***Следствие* 3.** *В частности, заключение теоремы* 4 *имеет место, если*

$$\int\limits_D e^{\alpha Q^{n-1}(x)}\, dm(x)\ <\ \infty$$

для некоторого $\alpha > 0$.

Развитая в этой статье теория найдет свое применение, в частности, к отображениям классов Соболева и Орлича – Соболева (см., например, [8, 9]).

1. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equations: a geometric approach // Develop. Math. – New York etc.: Springer, 2012. – **26**.
2. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**, № 3. – P. 353 – 393.
3. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966.

4. *Игнатьев А. А., Рязанов В. И.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395 – 417.
5. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И.* К теории границ пространственных областей // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2006. – **13**. – С. 110 – 120.
6. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И.* К теории нижних Q-гомеоморфизмов // Укр. мат. вестн. – 2008. – **5**, № 2. – С. 157 – 181.
7. *Kovtonyuk D., Ryazanov V.* On the boundary behavior of generalized quasi-isometries // J. Anal. Math. – 2011. – **115**. – P. 103 – 119.
8. *Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* К теории классов Орлича – Соболева // Алгебра и анализ. – 2013. – **25**, № 6. – С. 49 – 101.
9. *Ковтонюк Д. А., Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А.* К теории отображений классов Соболева и Орлича – Соболева / Под общей ред. В. И. Рязанова. – Киев: Наук. думка, 2013.
10. *Коллингвуд Э., Ловатер А.* Теория предельных множеств. – М.: Мир, 1971.
11. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory // Springer Monogr. Math. – New York etc.: Springer, 2009.
12. *Näkki R.* Prime ends and quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 1979. – **35**. – P. 13 – 40.
13. *Ohtsuka M.* Extremal length and precise functions. – Tokyo: Gakkotosho Co., 2003.
14. *Rado T., Reichelderfer P. V.* Continuous transformations in analysis. – Berlin etc.: Springer, 1955.
15. *Rickman S.* Quasiregular mappings. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1993.
16. *Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2007. – **4**, № 2. – С. 199 – 234.
17. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн. – 2007. – **48**, № 6. – С. 1361 – 1376.
18. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On integral conditions in the mapping theory // Ukr. Math. Bull. – 2010. – **7**, № 1. – P. 73 – 87.
19. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
20. *Шлык В. А.* О равенстве p-емкости и p-модуля // Сиб. мат. журн. – 1993. – **34**, № 6. – С. 216 – 221.
21. *Vasil'ev A.* Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 2002. – **1788**.
22. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971. – **229**.
23. *Vuorinen M.* Conformal geometry and quasiregular mappings // Lect. Notes Math. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1988. – **1319**.
24. *Whyburn G. Th.* Analytic topology. – Providence: Amer. Math. Soc., 1942.
25. *Wilder R. L.* Topology of manifolds. – New York: Amer. Math. Soc., 1949.
26. *Ziemer W. P.* Extremal length and conformal capacity // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – **126**, № 3. – P. 460 – 473.

Получено 20.12.13