

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С БИУСТОЙЧИВОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

We study bounded solutions of differential equations with bistable nonlinearity by numerical and analytic methods. A simple mechanical model of circular pendulum with magnetic suspension in the upper equilibrium state is regarded as a bistable dynamical system simulating a supersensitive seismograph. We study autonomous differential equations of the second and fourth orders with piecewise discontinuous and cubic nonlinearities. Bounded solutions with finitely many zeros: solitonlike solutions with two zeros and kinklike solutions with several zeros are investigated in detail. It is shown that, to within the sign and translation, the bounded solutions of the analyzed equations are uniquely determined by the integers $n = \left[\frac{d}{l} \right]$, where d is the distance between the roots of these solutions and l is a constant characterizing the intensity of nonlinearity. The existence of bounded chaotic solutions is established and the exact value of space entropy is found for periodic solutions.

У роботі чисельно-аналітичними методами досліджуються обмежені розв'язки диференціальних рівнянь з бістійкою нелінійністю. Розглянуто найпростішу механічну модель кругового маятника з магнітною підвіскою у верхньому положенні рівноваги як бістійку динамічну систему, що моделює надчутливий сейсмограф. Розглянуто автономні диференціальні рівняння другого та четвертого порядку з розривною кусково-лінійною та кубічною нелінійністю. Детально досліджено обмежені розв'язки зі скінченним числом нулів: солітоноподібні з двома нулями та кінкоподібні з декількома нулями. Показано, що з точністю до знака і зсуву обмежені розв'язки розглядуваних рівнянь однозначно визначаються цілими числами $n = \left[\frac{d}{l} \right]$, що характеризують відстані між сусідніми нулями d , а константа l характеризує інтенсивність нелінійності. Показано наявність обмежених хаотичних розв'язків, знайдено значення просторової ентропії для періодичних розв'язків.

1. Введение. Нелинейные параболические уравнения играют важную роль в различных разделах физики, химии, биологии [1–9]. В частности, к ним принадлежат расширенное уравнение Фишера – Колмогорова [2, 3]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\gamma \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(u),$$

которое при $\gamma = 0$ превращается в классическое уравнение Колмогорова – Петровского – Пискунова – Фишера [5], и уравнение Свифта – Гогенберга [8]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 u - f(u),$$

впервые полученное при изучении конвекции Рэлея – Бенара. При этом в первую очередь рассматриваются биустойчивые нелинейности, когда уравнение $\frac{du}{dt} = -f(u)$ имеет два устойчивых стационарных решения. При исследовании таких уравнений в частных производных важную роль играют ограниченные стационарные решения (в том числе и периодические [10–14]) – решения обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с кубической биустойчивой нелинейностью $f(y) = ky(y^2 - 1)$ [15–20] и с ее кусочно-линейной аппроксимацией [22–24]. Для таких уравнений [15–20], а также их дискретных аналогов [25–27] достаточно детально исследованы периодические решения и кинки.

Следует отметить, что исследование периодических решений для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений является актуальной тематикой, которой посвящено огромное количество работ (см., например, [10–14]).

Наряду с этим особое внимание уделяется изучению уравнений с разрывными правыми частями в силу их важности в прикладных задачах (см. [28–33] и приведенную там библиографию).

В пункте 2 исследуются периодические решения однородных дифференциальных уравнений второго порядка с разрывной нелинейностью. Изучаются уравнения, которые имеют хаотические решения, и для них находится значение пространственной энтропии относительно периодических решений.

Рассмотрена простейшая механическая модель кругового маятника с магнитной подвеской в верхнем положении равновесия как биустойчивая динамическая система, которая моделирует сверхчувствительный сейсмограф.

В пункте 3 исследуются ограниченные решения на всей оси $-\infty < x < +\infty$ для модельного дифференциального уравнения четвертого порядка с разрывной нелинейностью

$$y^{(4)}(x) + 4y(x) = 4 \operatorname{sign} y(x).$$

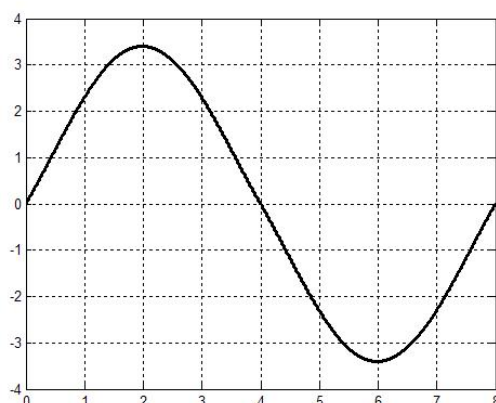
Подробно изучается конструктивный метод построения решений через их нули. Показано, что расстояние между нулями таких решений можно характеризовать нечетными числами. При этом для произвольной последовательности нечетных чисел существует и единственно с точностью до знака и сдвига ограниченное решение. Явно описаны периодические решения. Показано существование пространственного хаоса. Найдено точное значение пространственной энтропии относительно периодических решений.

В четвертом пункте для уравнения $y^{(4)} + 2y(y^2 - 1) = 0$ предложено аналитическое построение кинкообразных решений (ограниченных на всей оси решений с конечным числом нулей) в виде быстросходящихся рядов по произведениям экспоненциальных и тригонометрических функций. Показано, что с точностью до знака и сдвига кинкообразные решения однозначно характеризуются набором целых чисел n_1, \dots, n_k — целых частей от деленных на π расстояний между последовательными нулями этих решений. Положительность пространственной энтропии указывает на наличие у рассматриваемого уравнения хаотических решений [21].

2. Ограниченные решения уравнения второго порядка с биустойчивой нелинейностью. *2.1. Периодические решения уравнения второго порядка с биустойчивой кусочно-линейной нелинейностью.* Будем исследовать периодические решения уравнения с разрывной нелинейностью вида [30]

$$y'' + y = \operatorname{sign} y. \quad (2.1)$$

Начнем с уточнения понятия решения. Наиболее общее определение решений дифференциальных уравнений с разрывной нелинейностью связано с интерпретацией такого рода уравнений, как дифференциальные включения [28]. Отметим, что уравнению (2.1) соответствует дифференциальное включение, если в правой части уравнения (2.1) полагать $\operatorname{sign} 0 = [-1, 1]$. Однако, поскольку рассматриваемое уравнение (2.1) однородное (функция, тождественно равная нулю, является его решением), то в данном случае можно привести эквивалентное, более простое определение решения, аналогичное введенному в [24, 30].

Рис. 2.1. Решение (2.4) уравнения (2.1) на периоде $L = 8$.

Определение 2.1. Под решением уравнения (2.1) будем понимать непрерывно дифференцируемую функцию $y(x)$, если вне своих нулей $y(x)$ — классическое решение уравнения (2.1).

Отметим, что если функция $y(x)$ — решение уравнения (2.1), то и функция вида $\pm y(x + a)$, где a — константа, является решением уравнения (2.1) в силу автономности уравнения. Решения, отличающиеся сдвигом или знаком, будем называть эквивалентными.

Уравнение (2.1) имеет тривиальные решения $0, \pm 1$. При этом считаем, что $\text{sign } 0 = 0$. Уравнение (2.1) имеет финитные решения, отличные от нуля на интервале длины 2π :

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 - \cos x, & x \in (0, 2\pi), \\ y(x) &\equiv 0, & x \notin (0, 2\pi). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Решения, принимающие на всей оси положительные значения, имеют вид $y(x) = 1 + C \cos(x - \theta)$, где C, θ — константы, $0 \leq C < 1$. Решения, принимающие на всей оси отрицательные значения, соответственно имеют вид $y(x) = -1 + C \cos(x - \theta)$. Решения вида

$$y(x) = \pm 1 + C \cos(x - \theta), \quad 0 < C < 1, \quad (2.3)$$

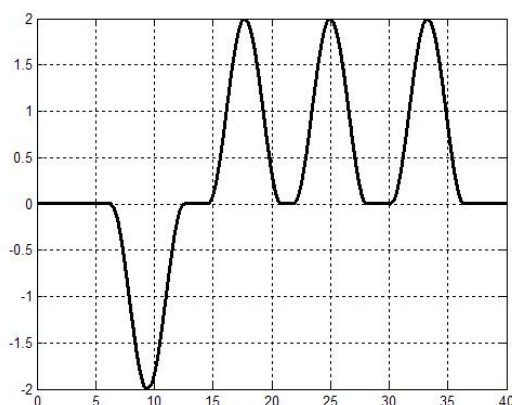
являются 2π -периодическими.

Нетривиальные L -периодические решения уравнения (2.1) с простыми нулями существуют при $L = 2l$, где произвольное число $l \in (\pi, 2\pi)$, и имеют вид (рис. 2.1)

$$y(x) = 1 - \frac{\cos(x - l/2)}{\cos(l/2)}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.4)$$

$$y(x) = -y(x + l), \quad l \leq x \leq 2l = L.$$

Уравнение (2.1) имеет периодические решения с изолированными нулями двух видов: с простыми нулями вида (2.4) и с двукратными нулями на периоде $L = 2N\pi$, где N — целое число, и имеют вид $\pm(1 - \cos x)$ на интервалах $(2(k-1)\pi, 2k\pi)$, $k = 1, 2, \dots, N$, с произвольным выбором знаков решения на каждом интервале.

Рис. 2.2. Решение уравнения (2.1) на периоде $L = 40$.

Нетривиальные периодические решения с неизолрованными или двукратными нулями существуют для любых значений $L > 2\pi$ и имеют следующую структуру: на интервале длины L каждый набор непересекающихся подынтервалов I_k длины 2π , на каждом из которых решение с точностью до знака и сдвига по x имеет вид $1 - \cos x$ и равно нулю вне всех I_k , порождает L -периодическое решение уравнения (2.1) (рис. 2.2).

Поскольку на интервале периодичности длины $L > 4\pi$ всегда можно указать континуумом способов непересекающиеся интервалы длины 2π , из этого следует, что уравнение (2.1) имеет несчетное число различных неэквивалентных периодических с периодом $L > 4\pi$ решений с неизолрованными нулями.

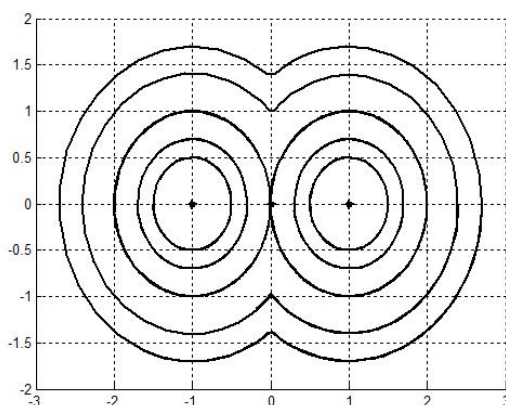
Рассмотренные выше решения уравнения (2.1) описывают все решения этого уравнения.

Теорема 2.1. Пусть $y(x)$ — решение уравнения (2.1) на интервале (α, β) . Тогда это решение может быть продолжено на всю ось как решение $\tilde{y}(x)$ уравнения (2.1). При этом если функция $\tilde{y}(x)$ не имеет нулей или имеет хотя бы один простой нуль, то продолжение $\tilde{y}(x)$ единственно. В остальных случаях продолжение неединственно.

Доказательство. Пусть $y(x)$ — решение уравнения (2.1) на интервале (α, β) . Если $y(x) \equiv 0$, то продолжение его нулем дает решение на всей оси. Пусть в некоторой точке $x_0 \in (\alpha, \beta)$ решение $y(x_0) \neq 0$. Пусть $y'(x_0)$ — значение производной в точке x_0 . Тогда в окрестности этой точки решение $y(x)$ удовлетворяет уравнению $y'' + y = \text{sign } y(x_0)$, которое имеет вид

$$y(x) = \text{sign } y(x_0) + [y(x_0) - \text{sign } y(x_0)] \cos(x - x_0) + y'(x_0) \sin(x - x_0). \quad (2.5)$$

Если решение (2.5) не меняет знак, то оно будет решением уравнения (2.1) для всех x , искомым 2π -периодическим продолжением решения на всю ось. Пусть решение (2.5) меняет знак и $x_1 > x_0$ — ближайший к точке x_0 нуль решения. Предположим, что $y'(x_1) \neq 0$, т. е. нуль — простой. Тогда при $x \geq x_1$ решение уравнения (2.1) будет нечетным продолжением решения (2.5) относительно точки x_1 , что приводит к L -периодическому решению вида (2.4). Такое продолжение единственно. Если же точка x_1 — кратный нуль, т. е. $y'(x_1) = 0$, то существует интервал I_1 длины 2π , одним из концов которого является точка x_1 и на котором решение (2.5) эквивалентно функции $1 - \cos x$. На интервале I_1 продолженное из окрестности точки x_0 решение единственно. Если вне интервала I_1 исходное решение определено и отлично от нуля, то, повторяя приведенные рассуждения, получаем интервал I_2 длины 2π , на котором продол-

Рис. 2.3. Фазовый портрет динамической системы $y'' + y = \text{sign } y$.

жение решения эквивалентно функции $1 - \cos x$. Поскольку интервал (α, β) конечен, то за конечное число шагов построенные интервалы I_1, I_2, \dots, I_k покроют подмножество интервала (α, β) , на котором решение $y(x)$ отлично от нуля. Теперь продолжение можно осуществить тождественным нулем вне интервалов I_1, I_2, \dots, I_k . Отметим, что на продолжении нулем можно располагать непересекающиеся вставки длиной 2π , на которых решение эквивалентно $1 - \cos x$. Таким образом, продолжение неединственно.

Теорема 2.1 доказана.

Следствие 2.1. Решения $y(x)$ на всей оси уравнения (2.1), отличные от тривиальных решений $y(x) \equiv 0, \pm 1$, являются 2π -периодическими, если они не имеют нулей и представимы в виде (2.3). Если решение имеет хотя бы один изолированный простой нуль, то решение является периодическим с периодом $L = 2l$, где $l \in (0, \pi)$ и эквивалентно функции вида (2.4). Если решение $y(x)$ имеет хотя бы один двукратный нуль, то оно отлично от тождественного нуля на системе непересекающихся интервалов I_k длины 2π и имеет вид $y(x) = \pm(1 - \cos(x - \alpha_k))$, где α_k — координаты левого конца интервала I_k .

На рис. 2.3 изображен фазовый портрет уравнения (2.1), где на оси абсцисс находятся значения y , а на оси ординат — значения y' . Точкам $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$ на графике соответствуют тривиальные решения $y \equiv -1, 0, 1$. Окружностям с центром в точках $(-1, 0)$, $(1, 0)$ радиуса $C < 1$ соответствуют 2π -периодические решения без нулей вида (2.3). Замкнутым линиям вне окружностей соответствуют L -периодические решения вида (2.4), двум окружностям с центром в точках $(-1, 0)$, $(1, 0)$ радиуса 1 — все решения с двукратными нулями, например решение, изображенное на рис. 2.2.

2.2. Хаотические решения. Энтропия. Приведем следующее определение энтропии для уравнения (2.1) по аналогии с соответствующим определением, данным в работах [23, 24].

Определение 2.2. Пусть $S(L)$ — число всех неэквивалентных периодических решений уравнения (2.1) с изолированными нулями с наименьшим периодом L . Число

$$\eta = \overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln S(L) \quad (2.6)$$

будем называть пространственной энтропией уравнения (2.1) относительно периодических решений с изолированными нулями.

Теорема 2.2. *Пространственная энтропия уравнения (2.1) относительно периодических решений с изолированными нулями определяется числом*

$$\eta = \frac{\ln 2}{2\pi}. \quad (2.7)$$

Доказательство. Пусть $y(x)$ — L -периодическое решение с изолированными нулями. Если нули решения простые, то существует одно неэквивалентное решение, задаваемое формулой (2.4). Это решение при вычислении энтропии можно не учитывать. Если же изолированные нули кратные, то период решения $L = 2N\pi$, где N — целое число, а решение $y(x)$ имеет вид $\pm(1 - \cos x)$ на каждом из интервалов $(2k\pi, 2(k+1)\pi)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Поэтому число $S(L)$ всех неэквивалентных решений в определении 2.2 имеет оценку

$$S(L) \leq 2^N.$$

С другой стороны, изменение знака и сдвиги на 2π приводят к эквивалентным решениям. Поэтому

$$S(L) \geq \frac{1}{2N} 2^N.$$

Следовательно, энтропия, с одной стороны, имеет оценку

$$\eta \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^N}{2N\pi} = \frac{\ln 2}{2\pi},$$

а с другой —

$$\eta \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{1}{2N} 2^N \right)}{2N\pi} = \frac{\ln 2}{2\pi}.$$

Теорема 2.2 доказана.

Положительность пространственной энтропии показывает, что уравнение (2.1) имеет „хаотические” решения [23, 24].

По аналогии с определением, данным в работах [23, 24], приведем следующее строгое определение хаотического решения.

Определение 2.3. *Будем говорить, что дифференциальное уравнение имеет хаотические решения, если существуют число $d > 0$ и множество I , содержащее не менее двух точек, такие, что для произвольной последовательности аргументов x_k , $x_{k+1} - x_k \geq d$ и произвольной последовательности значений $y_k \in I$ существует решение дифференциального уравнения такое, что*

$$y(x_k) = y_k. \quad (2.8)$$

Другими словами, существует решение дифференциального уравнения, график которого проходит через наперед заданную последовательность точек $A_k(x_k, y_k)$, абсциссы которых x_k отличаются не менее, чем на d , а ординаты y_k принадлежат множеству I .

Теорема 2.3. *Для дифференциального уравнения (2.1) существуют хаотические решения в смысле определения 2.3.*

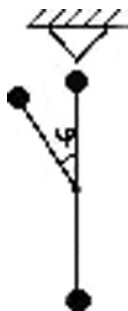


Рис. 2.4. Маятник с магнитной подвеской.

Доказательство. Положим в определении 2.3 $d = 4\pi$, а множество I — отрезок $[-2, 2]$. Пусть заданы точки $A_k(x_k, y_k)$, где $x_{k+1} - x_k \geq 4\pi$, а $y_k \in [-2, 2]$. Построим решения $y_k(x)$ уравнения (2.1) $y'' + y = \text{sign } y$, которые удовлетворяют начальным условиям $y_k(x_k) = y_k$, $y'(x_k) = \sqrt{1 - (|y_k| - 1)^2}$. Решения $y_k(x)$ имеют вид $y_k(x) = \text{sign } y_k [1 - \cos(x - a_k)]$, где числа a_k определяются из равенства $\cos(x_k - a_k) = 1 - |y_k|$. Решения $y_k(x)$ однозначно определены на отрезках I_k длины 2π , которые содержат точки x_k , и превращаются в нуль вместе с производной на концах отрезков I_k . Отрезки I_k не пересекаются, поскольку согласно условию $x_{k+1} - x_k \geq d = 4\pi$. Решение $y(x)$ уравнения (2.1), которое совпадает с $y_k(x)$ на отрезках I_k и равно тождественно нулю вне всех I_k , будет удовлетворять определению 2.3.

Теорема 2.3 доказана.

2.3. Круговой маятник с магнитной подвеской в верхнем неустойчивом положении равновесия. Пусть угол $\varphi(t)$, который определяет положение маятника (см. рис. 2.4), отсчитывается против часовой стрелки от верхнего положения в момент времени t . Тогда дифференциальное уравнение движения маятника в безразмерных величинах будет иметь вид

$$\ddot{\varphi} = \sin \varphi - a \sin \varphi e^{-k \tan^2 \frac{\varphi}{2}}. \quad (2.9)$$

Здесь константа $a > 1$ характеризует силу магнитного притяжения, а k — ее локализацию в окрестности верхнего положения. Это притяжение линейно при малых φ и быстро убывает при удалении от верхнего положения. Равенство нулю правой части (2.9) определяет четыре положения равновесия:

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi, \quad \varphi_{3,4} = \pm 2 \arctan \sqrt{\frac{\ln a}{k}}.$$

Положения φ_1 и φ_2 устойчивы, а $\varphi_{3,4}$ неустойчивы. При малых значениях $\varphi - (2k + 1)\pi$ для верхнего положения равновесия (перевернутый маятник) уравнение имеет вид $\ddot{\varphi} = (1 - a)\varphi$. При малых значениях $\psi = \varphi - 2k\pi$ для нижнего положения равновесия уравнение маятника имеет вид $\ddot{\psi} + \psi = 0$.

Если на маятник действует внешняя сила $f(t)$, то функцию $f(t)$ надо добавить в правую часть уравнения (2.9).

Для учета трения необходимо в правую часть уравнения (2.9) добавить член $-b\dot{\varphi}$, где величина b характеризует силу трения, пропорциональную скорости $\dot{\varphi}$ изменения угла $\varphi(t)$ при движении маятника. Величина b может зависеть от положения маятника. В частности, важен случай $b(\varphi) = \gamma\theta(|\varphi(t) - \varphi(t - \tau)| - \pi)e^{-\beta \tan^2 \frac{\varphi}{2}}$, где θ — единичная функция Хевисайда, когда трение сосредоточено в окрестности верхнего положения равновесия и за время от $t - \tau$ до t маятник пересекает нижнее положение равновесия. В противном случае трение отключается.

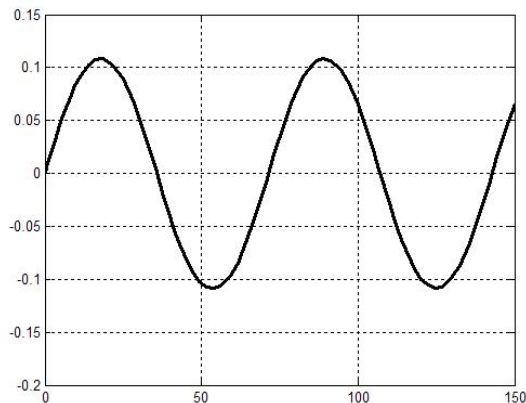


Рис. 2.5. Колебательные движения маятника в окрестности верхнего положения равновесия, $a = 1,01$, $k = 1$, $\dot{\varphi}(0) = 0,01$.

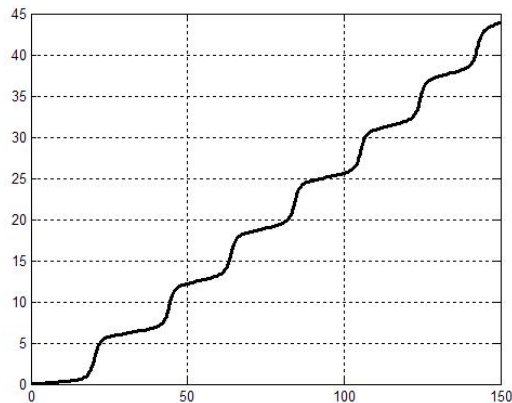


Рис. 2.6. Круговые движения маятника, $a = 1,01$, $k = 1$, $\dot{\varphi}(0) = 0,03$.

Если в начальный момент $t = 0$ маятник занимает верхнее положение равновесия $\varphi(0) = 0$ и имеет начальную скорость $\dot{\varphi}(0)$, то при малых $\dot{\varphi}(0)$ движение согласно уравнению (2.9) является колебательным и описывается функцией

$$\varphi(t) = \frac{\dot{\varphi}(0)}{\sqrt{a-1}} \sin(\sqrt{a-1}t).$$

Приближенно можно считать, что так будет, если $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\sqrt{a-1}} \ll |\varphi_{3,4}|$. Учитывая, что $|\varphi_{3,4}| = 2\sqrt{\frac{\ln a}{k}}$ при малых значениях $a - 1$, получаем критическое значение начальной скорости $\dot{\varphi}_c = \frac{2(a-1)}{\sqrt{k}}$. Если $\dot{\varphi}(0) \ll \dot{\varphi}_c$, то маятник колеблется относительно верхнего положения равновесия. Если же $\dot{\varphi}(0) \gg \dot{\varphi}_c$, то маятник осуществляет круговые движения.

На рис. 2.5, 2.6 приведены численные расчеты движения маятника согласно уравнению (2.9) с $a = 1,01$, $k = 1$ при начальных скоростях $\dot{\varphi}(0) = 0,01$ (колебательные движения, рис. 2.5), $\dot{\varphi}(0) = 0,03$ (круговые движения, рис. 2.6). Отметим, что в этом случае $\dot{\varphi}_c = 0,02$.

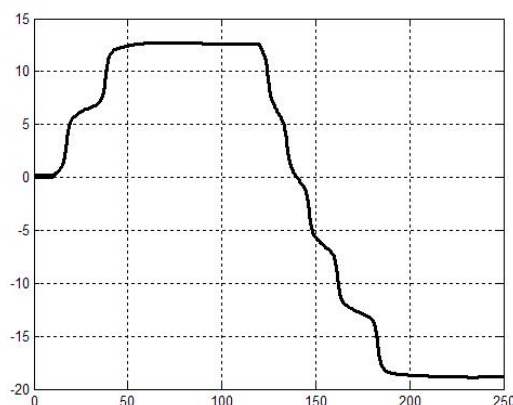


Рис. 2.7. Движение маятника: при $t = 10$ импульс $f_1 = 0,2$; при $t = 110$ импульс $f_2 = -0,4$, коэффициенты трения $\gamma = 0,1$, $\beta = 15$.

При наличии трения колебательные и круговые движения маятника будут затухающими. Приведенное выше выражение для трения, сосредоточенного в окрестности верхнего положения равновесия, приводит круговые движения к затухающим в верхнем положении с последующим отключением трения. При этом количество полных оборотов маятника характеризует величину $\dot{\varphi}(0)$.

Важным случаем внешней силы для сейсмических наблюдений является случай, когда внешняя сила имеет вид редких толчков. Математически это соответствует функции $f(t)$, имеющей вид суммы δ -функций Дирака, сосредоточенных в моменты толчков t_k с интенсивностью f_k :

$$f(t) = \sum_k f_k \delta(t - t_k).$$

В этом случае уравнение движения маятника имеет вид

$$\ddot{\varphi} = \sin \varphi - a \sin \varphi e^{-k \tan^2 \frac{\varphi}{2}} - b(\varphi) \dot{\varphi} + f(t).$$

Само движение представляет круговые движения после моментов t_k (их количество характеризуют величины интенсивностей f_k) и затухающие колебания в окрестности верхнего положения равновесия между круговыми движениями.

Приведем численные примеры движения маятника с магнитной подвеской в верхнем неустойчивом положении с $a = 1,01$, $k = 1$ (рис. 2.7). В момент времени $t = 10$, получая импульс $f_1 = 0,2$, маятник делает два круговых оборота и стабилизируется. Далее, в момент времени $t = 110$ с импульсом $f_2 = -0,4$ маятник делает 5 оборотов в другую сторону и стабилизируется.

На основании изложенного можно сделать вывод, что рассмотренная математическая модель кругового маятника с магнитной подвеской в верхнем неустойчивом положении равновесия может служить моделью для сверхчувствительного сейсмографа для фиксации моментов и интенсивностей редких малых внешних воздействий.

3. Ограниченные решения уравнения четвертого порядка с модельной биустойчивой нелинейностью. **3.1. Линейное уравнение.** Рассмотрим линейное уравнение

$$y^{(4)}(x) + 4y(x) = h(x) \quad (3.1)$$

с известной правой частью $h(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^1)$, где $h(x)$ — измеримая существенно ограниченная функция. Если $h(x)$ — непрерывная функция, то *классическим решением уравнения* (3.1) называется четырежды непрерывно дифференцируемая функция, которая удовлетворяет уравнению (3.1) для всех x .

В случае произвольных функций $h \in L_\infty$ под *решением уравнения* (3.1) будем понимать трижды непрерывно дифференцируемую функцию $y(x)$, у которой $y'''(x)$ является абсолютно непрерывной функцией. Таким образом, почти всюду по x существует $y^{(4)}(x)$, и функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению (3.1) почти всюду по x .

Легко видеть, что однородное уравнение

$$y^{(4)}(x) + 4y(x) = 0 \quad (3.2)$$

имеет фундаментальную систему решений

$$e^{-x} \cos x, \quad e^{-x} \sin x, \quad e^x \cos x, \quad e^x \sin x. \quad (3.3)$$

Лемма 3.1. *Однородное уравнение (3.2) не имеет нетривиальных решений, ограниченных на всей оси.*

Доказательство. Пусть $y(x)$ — ограниченное решение уравнения (3.2). Тогда существуют постоянные C_k , $k = 1, \dots, 4$, такие, что

$$y(x) = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x + C_3 e^x \cos x + C_4 e^x \sin x.$$

Выражения $C_1 \cos x + C_2 \sin x$ и $C_3 \cos x + C_4 \sin x$ можно представить в виде $A \cos(x - \alpha)$ и $B \cos(x - \beta)$, где $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $B = \sqrt{C_3^2 + C_4^2}$. Поэтому $y(x) = A e^{-x} \cos(x - \alpha) + B e^x \cos(x - \beta)$. Выберем последовательность аргументов $x_k = 2k\pi + \beta \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда $y(x_k) = A e^{-x_k} \cos(x_k - \alpha) + B e^{x_k}$.

Числа $y(x_k)$ будут ограниченными лишь при условии $B = 0$. Выбирая $\tilde{x}_k = -2k\pi + \alpha \rightarrow -\infty$, приходим к заключению, что $A = 0$. Таким образом, ограниченное решение уравнения (3.2) $y(x) \equiv 0$.

Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. *Для уравнения (3.1) существует и единственна ограниченная на всей оси функция Грина $\mathcal{G}(x)$, которая имеет вид*

$$\mathcal{G}(x) = \frac{1}{8} e^{-|x|} (\cos x + \sin |x|). \quad (3.4)$$

Доказательство. Функция $\mathcal{G}(x)$ вида (3.4) при $x > 0$ и $x < 0$ является ограниченным решением однородного уравнения (3.2). Непосредственно видно, что

$$\mathcal{G}(+0) = \mathcal{G}(-0) = \frac{1}{8}, \quad \mathcal{G}'(+0) = \mathcal{G}'(-0) = 0,$$

$$\mathcal{G}''(+0) = \mathcal{G}''(-0) = -\frac{1}{4}, \quad \mathcal{G}'''(+0) = \frac{1}{2}, \quad \mathcal{G}'''(-0) = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\mathcal{G}(x)$ — функция Грина. Если бы для уравнения (3.1) существовала другая ограниченная функция Грина $\mathcal{G}_1(x)$, то их разность была бы ограниченным решением на всей оси однородного уравнения (3.2), и $\mathcal{G}(x) - \mathcal{G}_1(x) \equiv 0$ в силу леммы 3.1.

Лемма 3.2 доказана.

Лемма 3.3. Пусть в уравнении (3.1) функция $h(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^1)$. Тогда для этого уравнения существует и единственно ограниченное на всей оси решение, представимое в виде

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x-s)h(s) ds. \quad (3.5)$$

Доказательство. Покажем, что правая часть в равенстве (3.5) существует. Действительно, в силу формулы (3.4) и условия $h \in L_\infty(\mathbb{R}^1)$ интеграл существует и допускает оценку

$$|y(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}(s)| ds \|h\|_{L_\infty} = K_0 \|h\|_{L_\infty}.$$

В силу явного вида функции Грина (3.4) интеграл в (3.5) допускает дифференцирование по x под знаком интеграла до третьего порядка, и имеют место оценки $|y^{(i)}(x)| \leq K_i \|h\|_{L_\infty}$, где $K_i = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}^{(i)}(s)| ds$, $i = 0, 1, 2, 3$. Приведем явные значения констант K_i :

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{-s} |\cos s + \sin s| ds = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{1 - e^{-\pi}} \approx 0,2852, \\ K_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-s} |\sin s| ds = \frac{1 + e^{-\pi}}{4(1 - e^{-\pi})} \approx 0,273, \\ K_2 &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-s} |\cos s - \sin s| ds = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}}{2(1 - e^{-\pi})} \approx 0,337, \\ K_3 &= \int_0^{\infty} e^{-s} |\cos s| ds = \frac{1}{2} + \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{1 - e^{-\pi}} \approx 0,717. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Легко видеть, что

$$y'''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_x'''(x-s)h(s) ds = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^{s-x} \cos(x-s)h(s) ds - \frac{1}{2} \int_x^{\infty} e^{x-s} \cos(x-s)h(s) ds$$

является абсолютно непрерывной функцией, а $y^{(4)}(x)$ существует почти всюду по x и $y^{(4)}(x) = h(x) - 4y(x)$.

Таким образом, функция $y(x)$, задаваемая формулой (3.5), является ограниченным решением уравнения (3.2) с $h \in L_\infty(\mathbb{R}^1)$. Единственность ограниченного решения следует из леммы 3.1.

Лемма 3.3 доказана.

3.2. Решения нелинейного уравнения. Рассмотрим теперь уравнение

$$y^{(4)}(x) + 4y(x) = 4 \operatorname{sign} y(x). \quad (3.7)$$

Если $y(x)$ — непрерывная функция, множество нулей которой имеет лебегову меру нуль, то функция $\operatorname{sign} y(x)$ определена почти всюду и принадлежит пространству $L_\infty(\mathbb{R}^1)$. Поэтому можно в этом случае определить решения (3.7) как решения (3.1) с $h(x) = 4 \operatorname{sign} y(x)$.

В дальнейшем будем пользоваться таким определением решения уравнения (3.7).

Определение 3.1. Трехжды непрерывно дифференцируемая функция $y(x)$ называется решением уравнения (3.7), если вне своих нулей $y(x)$ — классическое решение уравнения (3.7).

Заметим, что для решения $y(x)$ с изолированным множеством нулей определение 3.1 совпадает с определением решения уравнения (3.7) через решение уравнения (3.1) с $h(x) = 4 \operatorname{sign} y(x)$.

Уравнение (3.7) имеет тривиальные решения $y = \pm 1, 0$. При этом мы считаем, что $\operatorname{sign} 0 = 0$. Заметим, что если $y(x)$ — решение уравнения (3.7), то и $\pm y(x + a)$, где a — постоянная, является решением уравнения (3.7). Такие решения будем называть эквивалентными. Относительно уравнения (3.7) справедливо такое простое утверждение.

Если на интервале $a < x < b$ решение уравнения (3.7) принимает положительное значение, т. е. $\operatorname{sign} y(x) = 1$, то

$$y^+(x) = 1 + C_1^+ e^{-x} \cos x + C_2^+ e^{-x} \sin x + C_3^+ e^x \cos x + C_4^+ e^x \sin x, \quad (3.8)$$

где $C_k^+ = \text{const}$, $k = 1, \dots, 4$.

И наоборот, если функция вида (3.8) принимает на некотором интервале положительное значение, то (3.8) является решением уравнения (3.7). Если на некотором интервале $a < x < b$ решение уравнения (3.7) принимает отрицательное значение, т. е. $\operatorname{sign} y(x) = -1$, то

$$y^-(x) = -1 + C_1^- e^{-x} \cos x + C_2^- e^{-x} \sin x + C_3^- e^x \cos x + C_4^- e^x \sin x. \quad (3.9)$$

Доказательство очевидно, поскольку функции (3.3) являются фундаментальной системой решений однородного уравнения, а $y = \pm 1$ является частным решением уравнения (3.7).

Пример 3.1. Найдем ограниченное на всей оси решение уравнения (3.7), которое на положительной полуоси принимает положительное значение, а на отрицательной — отрицательное значение. Согласно равенствам (3.8) и (3.9) получаем

$$y(x) = \begin{cases} 1 + C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x, & x > 0, \\ -1 + C_3 e^x \cos x + C_4 e^x \sin x, & x < 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

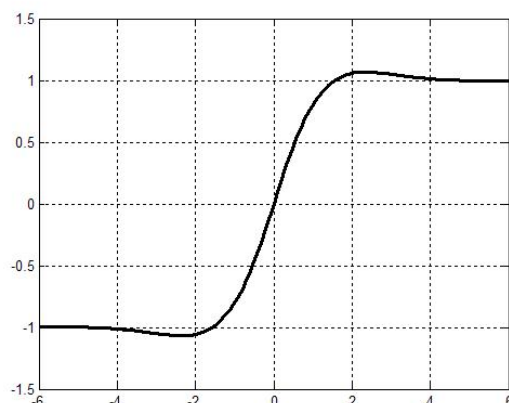
Условие непрерывности функции $y(x)$ и ее производных до третьего порядка в точке $x = 0$ дает явные значения констант C_k и явный вид решения

$$y(x) = \operatorname{sign} x - \Phi(x), \quad (3.11)$$

где

$$\Phi(x) = \operatorname{sign} x \cdot e^{-|x|} \cos x. \quad (3.12)$$

Функция $\Phi(x)$ необходима нам в дальнейшем.

Рис. 3.1. Кинк $y(x) = \text{sign } x(1 - e^{-|x|} \cos x)$.

Отметим, что решение (3.11) является ограниченным решением уравнения (3.7), принимающим значение нуль в точке $x = 0$. Такое решение называется *кинком*. На рис. 3.1 изображен график кинка.

3.3. Простейшие симметрические периодические решения. Построим в явном виде периодическое симметрическое решение уравнения (3.7). Пусть $L = 2\ell > 0$ — период решения.

Пусть на интервале $0 < x < \ell$ решение положительно, а на интервале $\ell < x < 2\ell = L$ — отрицательно. Тогда, согласно формуле (3.8), получаем

$$y(x) = 1 + C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x + C_3 e^x \cos x + C_4 e^x \sin x, \quad 0 < x < \ell. \quad (3.13)$$

На интервале $\ell < x < 2\ell$ будем считать, что

$$y(x) = -y(x - \ell). \quad (3.14)$$

Условия, что решение $y(x)$ и его производные до третьего порядка непрерывны в точке $x = \ell$, дают следующие граничные условия:

$$y^{(i)}(\ell) = -y^{(i)}(0), \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (3.15)$$

Используя граничные условия (3.15) для решения (3.13), находим явный вид констант C_k . Тогда решение имеет вид

$$y(x) = 1 - \frac{\cosh(\ell - x) \cos x + \cosh x \cos(\ell - x)}{\cosh \ell + \cos \ell}, \quad 0 < x < \ell. \quad (3.16)$$

На интервале $\ell < x < 2\ell$ справедливо соотношение (3.14), и решение получаем путем сдвига и отзеркаливания.

Непосредственно можно проверить, что функция (3.16) определенная на интервале $(0, \ell)$ и периодически продленная на всю ось с условием (3.14), является 2ℓ -периодическим решением уравнения (3.7). Такая функция имеет нули в точках $x = k\ell$, где $k \in \mathbb{Z}$. Вне этих нулей функция $y(x)$ выражается через функцию (3.16) с помощью сдвигов или сдвигов и отзеркаливаний. Поэтому на этих интервалах она является классическим решением уравнения (3.7).

Такие периодические решения будем называть *простейшими периодическими решениями уравнения (3.7)*.

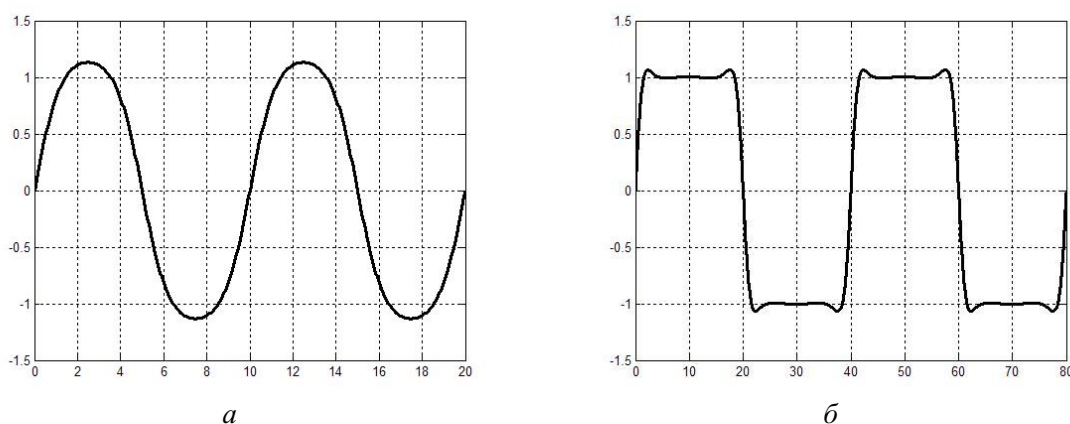


Рис. 3.2. Простейшее периодическое решение с $\ell = 5$ (а) и $\ell = 20$ (б).

На рис. 3.2, а, б представлены периодические решения для периодов $2\ell = 10$, $2\ell = 40$ соответственно.

3.4. Интегральное уравнение для ограниченных решений. Пусть $y(x)$ — ограниченное на всей оси решение уравнения (3.7) с изолированным множеством нулей. Тогда $y(x)$ удовлетворяет уравнению (3.1) с $h(x) = 4 \operatorname{sign} y(x)$ и согласно лемме 3.3 уравнению

$$y(x) = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x-s) \operatorname{sign} y(s) ds. \quad (3.17)$$

Наоборот, если $y(x)$ — непрерывное ограниченное на всей оси решение уравнения (3.17), а множество его нулей изолировано, то $y(x)$ — решение уравнения (3.7).

Лемма 3.4. *Ограниченное решение уравнения (3.7) согласно определению 3.1 является ограниченным непрерывным решением уравнения (3.17), в котором предполагается, что $\operatorname{sign} 0 = 0$. Наоборот, ограниченное непрерывное решение интегрального уравнения (3.17), в котором $\operatorname{sign} 0 = 0$, является ограниченным решением уравнения (3.7) согласно определению 3.1.*

Доказательство. Пусть $y(x)$ — ограниченное решение уравнения (3.7) согласно определению 3.1. Поскольку функция $y(x)$ непрерывна, то X_0 — множество нулей этой функции — является замкнутым. Пусть X_1 — множество точек скопления множества X_0 . Множество X_1 также замкнуто, его дополнение $X = \mathbb{R} \setminus X_1$ является открытым множеством и, следовательно, может быть представлено как объединение открытых множеств $X = \bigcup_k O_k$. Рассмотрим функции $y_k(x)$, которые совпадают с решением $y(x)$ на O_k и равны тождественно нулю вне O_k . Покажем, что функции $y_k(x)$ также являются решениями уравнения (3.7) согласно определению 3.1. Для этого отметим, что поскольку $y(x)$ трижды непрерывно дифференцируемая функция, то на X_1 функция $y(x)$ и ее производные до третьего порядка включительно превращаются в нуль. Поэтому функции $y_k(x)$ трижды непрерывно дифференцируемы на всей оси, а вне своих нулей они совпадают с $y(x)$ и являются классическими решениями уравнения (3.7). Покажем, что функция $y_k(x)$ является решением уравнения (3.17), в котором положим $\operatorname{sign} 0 = 0$. Действительно, $y_k(x)$ является решением уравнения (3.1) с правой частью $h(x) = 4 \operatorname{sign} y_k(x)$ при $x \in O_k$ и $h(x) \equiv 0$ при $x \notin O_k$, т. е. $h(x) = 4 \operatorname{sign} y_k(x)$ для всех x , если полагать $\operatorname{sign} 0 = 0$. Поэтому в силу леммы 3.3 $y_k(x)$ является решением уравнения (3.17).

Покажем теперь, что если $y(x)$ — решение уравнения (3.17), в котором $\text{sign } 0 = 0$, то $y(x)$ является решением уравнения (3.7) согласно определению 3.1. Действительно, согласно лемме 3.3 $y(x)$ является решением уравнения (3.1) с $h(x) = 4 \text{sign } y(x)$. Тогда вне нулей функция $y(x)$ является классическим решением уравнения (3.1), а следовательно, и уравнения (3.7).

Лемма 3.4 доказана.

Обозначая правую часть уравнения (3.17) как действие оператора \mathcal{A} на функцию y , можем сформулировать такое следствие.

Следствие 3.1. *Ограниченные на всей оси решения уравнения (3.7) являются неподвижными точками оператора \mathcal{A} , и наоборот, каждая неподвижная точка оператора \mathcal{A} , рассматриваемого в пространстве $C(\mathbb{R})$ (непрерывных ограниченных на всей оси функций), является ограниченным решением уравнения (3.7).*

Следствие 3.2. *Каждое ограниченное на всей оси решение уравнения (3.7) допускает оценку*

$$|y(x)| \leq 1,14. \quad (3.18)$$

Доказательство. Из интегрального уравнения (3.17), явного вида функции Грина (3.4), а также оценок (3.6) получаем

$$|y(x)| \leq 8 \int_0^{\infty} |\mathcal{G}(t)| dt = 4K_0 \approx 1,14.$$

Лемма 3.5. *Пусть ограниченное на всей оси решение $y(x)$ уравнения (3.7) сохраняет знак на интервале $(x_0 - l, x_0 + l)$, $l > 0$. Тогда*

$$|y(x_0) - \text{sign } y(x_0)| \leq \frac{2\sqrt{2}}{l}. \quad (3.19)$$

Доказательство. Поскольку $y(x)$ удовлетворяет уравнению (3.17), а $4 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(x-s) ds = 1$, то

$$\begin{aligned} |y(x_0) - \text{sign } y(x_0)| &= 4 \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(x_0 - s) [\text{sign } y(s) - \text{sign } y(x_0)] ds \right| \leq \\ &\leq 8 \int_{|s-x_0|>l} |\mathcal{G}(x_0 - s)| ds \leq \frac{2\sqrt{2}}{l}, \end{aligned}$$

где использована оценка $|\mathcal{G}(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{8} e^{-|x|}$, которая следует из (3.4).

Лемма 3.5 доказана.

3.5. Представление ограниченного решения через его нули. Для представления ограниченных на всей оси решений уравнения (3.7) через его нули важно показать, что все изолированные нули простые. Для этого необходима следующая лемма.

Лемма 3.6. *Пусть x_0 — изолированный нуль решения $y(x)$ уравнения (3.7) и $y'(x_0) = 0$. Тогда существует точка x_1 , в которой $|y(x_1)| \geq 1 + \cosh \pi > 12$.*

Доказательство. Пусть точка $x_0 = 0$ — изолированный нуль решения $y(x)$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что на интервалах $I_1 = (0, \varepsilon)$ и $I_2 = (-\varepsilon, 0)$ у решения $y(x)$ нет нулей, и поэтому на каждом из этих интервалов решение принимает значения одного знака. Возможны два случая:

- 1) решение на интервалах I_1 и I_2 принимает значения одного знака;
- 2) решение на интервалах I_1 и I_2 принимает значения разных знаков.

В первом случае будем считать, что $y(x) > 0$ при $x \in I_1$ и $x \in I_2$. Если $y(x) < 0$, то рассматриваем решение $-y(x)$.

Поскольку $y(0) = 0$ и $y'(0) = 0$, то в этом случае решение $y(x)$ имеет вид

$$y(x) = 1 - \cosh x \cos x + A(\cosh x \sin x - \sinh x \cos x) + B \sinh x \sin x, \quad (3.20)$$

где A и B — постоянные. При $x \rightarrow 0$ из представления (3.20) получаем

$$y(x) = \frac{x^4}{6} + \frac{2}{3}Ax^3 + Bx^2 + O(x^4),$$

а в первом случае имеем $y(x) \geq 0$, поэтому постоянная $B \geq 0$. Функция $\varphi_1(x) = 1 - \cosh x \cos x$ четная и возрастающая при $0 \leq x \leq \pi$. Действительно, $\varphi_1'(x) = -\sinh x \cos x + \cosh x \sin x$, $\varphi_1''(x) = 2 \sinh x \sin x \geq 0$ при $0 \leq x \leq \pi$. Поскольку $\varphi_1'(0) = 0$, то $\varphi_1'(x)$ принимает неотрицательные значения. Функция $\varphi_1(0) = 0$, поэтому $\varphi_1(x)$ возрастающая от $\varphi_1(0)$ до $\varphi_1(\pi) = 1 + \cosh \pi$.

Функция $\varphi_2 = \cosh x \sin x - \sinh x \cos x$ нечетная и возрастающая на интервале $(-\pi, \pi)$. Действительно, $\varphi_2' = 2 \sinh x \sin x \geq 0$. В представлении (3.20) постоянная $B \geq 0$. Если постоянная $A \geq 0$, то решение $y(x) \geq 1 - \cosh x \cos x > 0$ при $0 < x \leq \pi$. Поэтому $y(\pi) \geq 1 + \cosh \pi$. Если $A \leq 0$, то решение (3.20) на интервале $(-\pi, 0)$ имеет оценку $y(x) \geq 1 - \cosh x \cos x > 0$ и $y(-\pi) \geq 1 + \cosh \pi$.

Таким образом, в первом случае показано, что решение $y(x)$ имеет представление (3.20) на интервалах $(-\varepsilon, \pi)$ при $A \geq 0$ или $(-\pi, \varepsilon)$ при $A < 0$, и в некоторой точке $x_1 = \pi$ при $A \geq 0$ или $x_1 = -\pi$ при $A < 0$ принимает значение $y(x_1) \geq 1 + \cosh \pi$. Таким образом, для первого случая лемма доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда решение на интервалах I_1 и I_2 принимает значения разных знаков. Будем полагать $y(x) > 0$, $x \in I_1$ и $y(x) < 0$, $x \in I_2$. В противном случае достаточно рассмотреть функцию $-y(x)$.

В этом случае решение с условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ имеет вид

$$y(x) = \begin{cases} 1 - \cosh x \cos x + A(\cosh x \sin x - \sinh x \cos x), & x \in I_1, \\ -1 + \cosh x \cos x + A(\cosh x \sin x - \sinh x \cos x), & x \in I_2, \end{cases} \quad (3.21)$$

где постоянная $A \geq 0$. Условия непрерывности второй и третьей производных $y(x)$ в точке $x = 0$ приводят к отсутствию функции $\sinh x \sin x$ в представлении (3.21) и дают одинаковую постоянную A на интервалах I_1 , I_2 . Поскольку из (3.21) следует $y(x) \geq 1 - \cosh x > 0$ при $0 < x \leq \pi$, представление (3.21) справедливо на интервале $(-\varepsilon, \pi)$. Однако $y(\pi) \geq 1 + \cosh \pi$ при $x = \pi$. Тем самым лемма доказана и для второго случая.

Теорема 3.1. Пусть $y(x)$ — нетривиальное ограниченное на всей оси решение уравнения (3.7), все нули которого образуют изолированное множество $\{x_k\}$, $k \in K$ (K — множество индексов, причем $K = \{0, 1, \dots, m\}$, если количество нулей $m + 1$; $K = \{0, 1, 2, \dots\}$, если нулей бесконечное количество, ограниченное слева; $K = \{\dots, -2, -1, 0\}$, если нулей бесконечное количество, ограниченное справа, и соответственно $K = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, если нулей бесконечное количество, неограниченное с двух сторон). Тогда все нули этого решения являются простыми (т. е. $y'(x_k) \neq 0$, если $y(x_k) = 0$, $k \in K$). Решение $y(x)$ с точностью до знака определяется своими нулями. При этом если $y > 0$ при $x_{2k} \leq x \leq x_{2k+1}$, то

$$y(x) = \text{sign } y(x) + \sum_{k \in K} (-1)^{k+1} \Phi(x - x_k), \quad (3.22)$$

где $\Phi(x) = \text{sign } x e^{-|x|} \cos x$.

Доказательство. Пусть $x_0 = 0$ — изолированный нуль ограниченного на всей оси решения $y(x)$. Если бы $y'(0) = 0$, то согласно лемме 3.5 в окрестности этой точки функция принимала бы значения по модулю больше 12, однако это противоречит следствию 3.2, согласно которому $|y(x)| \leq 1,14$. Следовательно, все нули решения $y(x)$ являются простыми, а значит, решение при переходе через каждый нуль меняет знак. Таким образом, $\text{sign } y(x)$ однозначно (с точностью до знака) определяется нулями решения y :

$$\text{sign } y(x) = \sum_{k \in K, |k| \leq 2j} (-1)^k \text{sign}(x - x_k), \quad x_{-2j} < x < x_{2j}, \quad (3.23)$$

если $y > 0$ при $x_{2k} \leq x \leq x_{2k+1}$. Легко видеть, что $4 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x-s) \text{sign}(s-a) ds = \text{sign}(x-a) - \Phi(x-a)$, т. е. является кинком в точке $x = a$. Подставляя (3.23) в правую часть интегрального уравнения (3.17), получаем (3.22).

Теорема 3.1 доказана.

Теорема 3.2. Пусть $y(x; \{x_k\})$ — ограниченное решение уравнения (3.7) с конечным числом нулей $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ с расстояниями $a_k = x_k - x_{k-1}$ между соседними нулями и $y > 0$ при $x_0 \leq x \leq x_1$. Тогда

$$y(x; \{x_k\}) = \text{sign } y(x; \{x_k\}) + \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \Phi(x - x_k), \quad (3.24)$$

где $\Phi(x) = \text{sign } x e^{-|x|} \cos x$.

Для того чтобы функция вида (3.24) была ограниченным решением уравнения (3.7), необходимо и достаточно, чтобы числа $a_k > 0$ удовлетворяли системе трансцендентных уравнений

$$\Phi(a_k) = \sum_{\substack{0 \leq i < j \\ i \leq k \leq j \leq n}} (-1)^{i+j+1} \Phi(a_i + \dots + a_j), \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.25)$$

Доказательство. Ограниченное решение с нулями $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ имеет вид (3.22). Условие $y(x_k) = 0$ дает систему уравнений (3.25) для расстояний $a_k = x_k - x_{k-1}$ между соседними нулями. Пусть $\{a_k\}$ — решение системы (3.25). Тогда, полагая $x_0 = 0$, $x_k = a_1 + \dots + a_k$, $k = 1, \dots, n$, получаем, что функция (3.24) с такими $\{x_k\}$ будет иметь представление $y(x) = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x-s) h(s) ds$, где

$$h(x) = \begin{cases} -1, & x < x_0, \\ (-1)^k, & x \in [x_k, x_{k+1}], \\ (-1)^n, & x > x_n. \end{cases}$$

Поскольку $\{a_k\}$ — решение системы (3.25), функция $y(x)$ имеет нули в точках $\{x_k\}$. Других нулей функция $y(x)$ не имеет, поэтому $h(x) = \text{sign } y(x)$. Таким образом, $y(x)$ является решением уравнения (3.17), а следовательно, ограниченным решением уравнения (3.7) с нулями в точках $\{x_k\}$.

Теорема 3.2 доказана.

3.6. Солитоны. Солитоном называется ограниченное решение уравнения (3.7), имеющее два нуля. Поскольку решение уравнения (3.7) допускает сдвиги по x , достаточно найти солитонные решения $y_s(x)$, у которых нули находятся в точках $x_0 = -a/2$ и $x_1 = a/2 > 0$. Функцию $\text{sign } y_s(x)$ назовем *скелетом решения*. В этом случае скелет решения имеет вид

$$\text{sign } y_s(x) = \begin{cases} -1, & x < -a/2, \\ 1, & -a/2 < x < a/2, \\ -1, & a/2 < x. \end{cases} \quad (3.26)$$

Из выражения (3.22) имеем

$$y_s(x) = \text{sign } y_s(x) - \Phi(x + a/2) + \Phi(x - a/2), \quad (3.27)$$

где явное значение функции Φ задается выражением (3.12). Условия $y_s(-a/2) = 0$ и $y_s(a/2) = 0$ дают уравнения $\Phi(a) = 0$ или

$$\cos a = 0. \quad (3.28)$$

Таким образом, величина a , которая характеризует ширину солитонов и расстояние между его нулями, может принимать лишь следующие значения:

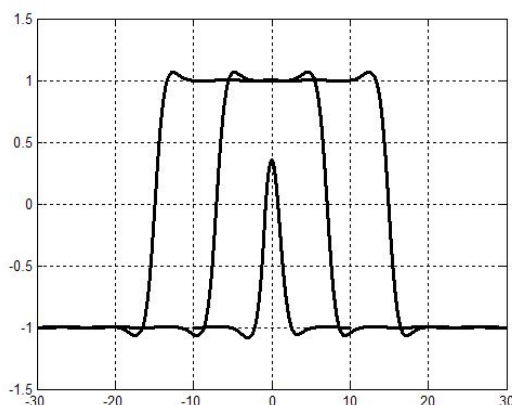
$$a = (2m - 1)\frac{\pi}{2}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3.29)$$

занумерованные нечетными числами $2m - 1$. На рис. 3.3 изображены графики солитонов, соответствующие значениям $m = 1; 5; 10$.

3.7. Решения с тремя нулями. Пусть ограниченное решение $y(x)$ уравнения (3.7) имеет три нуля $x_0 < x_1 < x_2$. Обозначим расстояния между нулями $a_1 = x_1 - x_0$ и $a_2 = x_2 - x_1$. Из формулы (3.22) получаем явный вид решения, если известны его нули. Условия, что функция $y(x)$ из представления (3.22) равна нулю при $x = x_0, x_1, x_2$, дают систему уравнений (3.25) относительно a_1, a_2 :

$$\Phi(a_1) = \Phi(a_2) = \Phi(a_1 + a_2). \quad (3.30)$$

Теорема 3.3. Пусть $y(x)$ — ограниченное решение уравнения (3.7) с тремя нулями $x_0 < x_1 < x_2$. Тогда расстояния между нулями $a_1 = x_1 - x_0$ и $a_2 = x_2 - x_1$ превышают величину 1,56:

Рис. 3.3. Солитоны $y_s(x)$ при $m = 1; 5; 10$.

$$a_k \geq a_{\min} = 1,56, \quad k = 1, 2. \quad (3.31)$$

Справедливы оценки

$$\left| a_k - (2m_k - 1) \frac{\pi}{2} \right| < d = 0,212, \quad (3.32)$$

где нечетные числа $2m_k - 1$ можно выразить через a_k с помощью равенства

$$2m_k - 1 = \left[\frac{2a_k}{\pi} \right], \quad (3.33)$$

$[\alpha]$ — целая часть числа α .

Для любых нечетных чисел $2m_1 - 1$ и $2m_2 - 1$ существует и единственно с точностью до эквивалентности (т. е. с точностью до знака и сдвига по x) ограниченное решение уравнения (3.7) с тремя нулями, расстояния между которыми удовлетворяют неравенству (3.32).

Доказательство. Функция $y(x)$, которая имеет вид (3.22), тогда и только тогда будет ограниченным решением с тремя нулями $x_0 < x_1 < x_2$, когда расстояния $a_1 = x_1 - x_0$ и $a_2 = x_2 - x_1$ удовлетворяют системе уравнений (3.30). В силу их симметрии относительно a_1 и a_2 можно считать, что $a_1 \leq a_2$. Если в (3.30) все значения функции отрицательны, то $a_k \geq \frac{\pi}{2}$ и неравенство (3.31) выполняется. Если в (3.30) все значения положительны, то минимальное значение a_1 достигается лишь в случае, изображенном на рис. 3. 4, где абсциссы точек пересечения прямой линии с графиком функции Φ соответствуют значениям $a_1, a_2, a_1 + a_2$. В этом случае $a_1 = \frac{\pi}{2} - x, a_2 = \frac{3\pi}{2} + y$, причем x и y удовлетворяют системе уравнений, которую можно получить из (3.30):

$$\sin x = e^{-(\frac{3\pi}{2}+y)} \cos(y-x), \quad \sin y = e^{-(\frac{\pi}{2}-x)} \cos(y-x), \quad (3.34)$$

где $0 < y < \frac{\pi}{4}, 0 < x < y$. Численное решение системы (3.34) приводит к значениям $x = 0,0072, y = 0,2067$. Таким образом, $a_{\min} = \frac{\pi}{2} - x = 1,56$.

Получим теперь оценки (3.32). Для этого удобно представить систему (3.30) в явном виде

$$\cos a_1 = e^{-a_2} \cos(a_1 + a_2), \quad \cos a_2 = e^{-a_1} \cos(a_1 + a_2). \quad (3.35)$$

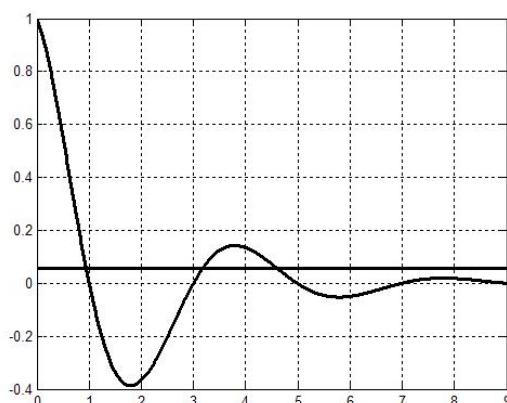


Рис. 3.4. График функции $\Phi(x) = e^{-x} \cos x$, на оси абсцисс — значения, кратные $\frac{\pi}{2}$.

В силу оценки (3.31) из (3.35) имеем

$$|\cos a_k| \leq e^{-a_{\min}} = 0,2094. \quad (3.36)$$

Поэтому справедливы оценки (3.32), (3.33).

Покажем теперь, что для любых нечетных чисел $2m_1 - 1$ и $2m_2 - 1$ существует и единственно решение системы (3.35), которое удовлетворяет оценке (3.32). Действительно, полагая

$$a_k = (2m_k - 1) \frac{\pi}{2} + \varepsilon_k, \quad (3.37)$$

систему (3.35) можно представить в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \arcsin [(-1)^{m_2-1} e^{\frac{\pi}{2} - m_2\pi - \varepsilon_2} \cos(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)], \\ \varepsilon_2 &= \arcsin [(-1)^{m_1-1} e^{\frac{\pi}{2} - m_1\pi - \varepsilon_1} \cos(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

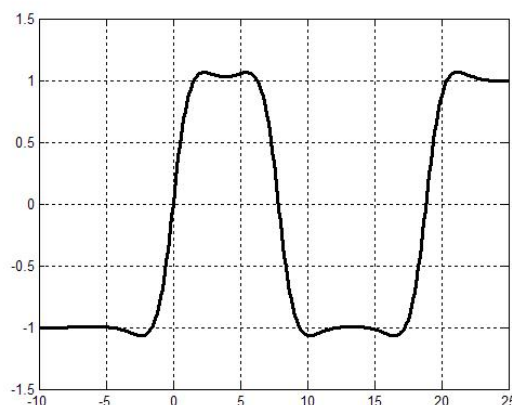
Систему (3.38) можно представить в операторном виде $\varepsilon = A(\varepsilon)$ в пространстве двумерных векторов с нормой $\|\varepsilon\| = \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\}$. Оператор A переводит замкнутое множество $B = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : -0,01 \leq \varepsilon_k \leq 0,212, k = 1, 2\}$ в себя и является оператором сжатия на B :

$$\|A(\eta) - A(\varsigma)\| \leq q \|\eta - \varsigma\|, \quad q < 0,5. \quad (3.39)$$

Поэтому существует и единственно решение уравнения $\varepsilon = A(\varepsilon)$ в B , которое можно получить с помощью метода последовательных приближений, начиная со значения $\varepsilon = 0$. Для расстояний $a_k = (2m_k - 1) \frac{\pi}{2} + \varepsilon_k$ справедлива оценка (3.32).

Теорема 3.3 доказана.

На рис. 3.5 изображен график ограниченного решения с тремя нулями, расстояния между которыми характеризуются с помощью нечетных чисел $(2m_1 - 1, 2m_2 - 1) = (5, 7)$.

Рис. 3.5. График решения с тремя нулями, $2m_1 - 1 = 5$, $2m_2 - 1 = 7$.

3.8. Решение с конечным числом нулей.

Теорема 3.4. Пусть $y(x; \{x_k\})$ — ограниченное решение уравнения (3.7) с конечным числом нулей $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, а расстояния $a_k = x_k - x_{k-1}$ между соседними нулями удовлетворяют условию $a_k \geq \pi$. Тогда решение $y(x)$ однозначно (с точностью до знака и сдвига по x) определяется множеством нечетных чисел $2m_k - 1 = \left[\frac{2a_k}{\pi} \right]$, $k = 1, \dots, n$. Произвольная конечная последовательность нечетных чисел $2m_k - 1 \geq 3$, $k = 1, \dots, n$, однозначно (с точностью до эквивалентности) определяет ограниченное решение уравнения (3.7), расстояния между нулями которого удовлетворяют соотношению (3.37) с $|\varepsilon_k| < 0,1$.

Доказательство. Ограниченное решение с нулями $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ имеет вид (3.22). Условие $y(x_k) = 0$ дает систему уравнений (3.25) для расстояний $a_k = x_k - x_{k-1}$ между соседними нулями. Используя формулу (3.12), которая дает явный вид функции Φ , и оценку $a_n \geq \pi$, которая выполняется по условию теоремы, из системы (3.25) получаем

$$|\cos a_k| \leq \sum_{0 \leq i < j, i \leq k \leq j \leq n} e^{\pi(i-j)} < \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)p^n = p(2-p)(1-p)^{-2},$$

где $p = e^{-\pi}$. Из этого следует представление (3.37) для решения системы (3.25) с нечетными числами $2m_k - 1 \geq 3$ и $|\varepsilon_k| < 0,1$, $k = 1, \dots, n$.

Покажем, что для произвольных нечетных чисел $2m_k - 1 \geq 3$ система (3.25) имеет решение, которое допускает представление (3.37) при $|\varepsilon_k| < 0,1$ и это решение единственно. Используя (3.37) и (3.22), систему (3.25) можно трансформировать, аналогично (3.38), в эквивалентную $\varepsilon = A(\varepsilon)$ для вектора $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Уравнение имеет единственное решение, поскольку оператор A непрерывный, отображает n -мерный куб $\{\varepsilon : |\varepsilon_k| \leq 0,1\}$ в себя, а также является отображением сжатия. Неравенство

$$\|A(\varepsilon^{(2)}) - A(\varepsilon^{(1)})\| \leq q \|\varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)}\|$$

выполняется при $\|\varepsilon\| = \max_{1 \leq k \leq n} |\varepsilon_k|$ для значений констант q , которые являются произведением константы Липшица функции $\arcsin x$, $|x| \leq 0,1$, и суммы модулей частных производных правых частей системы (3.25) относительно переменных $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$. Таким образом, имеем оценку

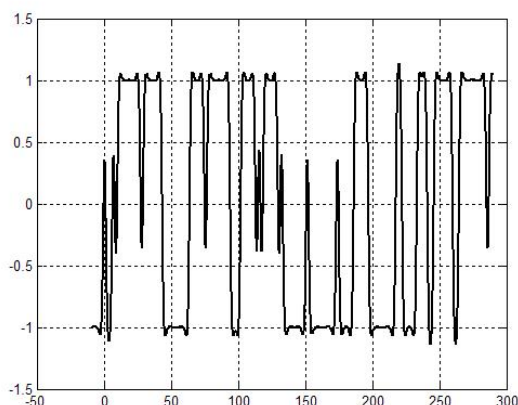


Рис. 3.6. Хаотическое решение.

$$q \leq 1,01 \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(n+1)p^n = 1,01p(6-3p+p^2)(1-p)^{-3} \approx 0,2926 < 1,$$

поскольку $p = e^{-\pi}$.

Теорема 3.4 доказана.

3.9. Хаотические решения. Нечетные числа $\{2m_1 - 1, \dots, 2m_n - 1\}$, характеризующие расстояния между нулями ограниченных решений уравнения (3.7), могут принимать любые значения, в том числе могут быть набором случайных нечетных чисел. Это приводит к решениям с „хаотическим” поведением. На рис. 3.6 представлено ограниченное решение уравнения (3.7), расстояния между нулями у которого характеризует следующая случайная выборка нечетных чисел

$$(1, 3, 1, 1, 11, 1, 9, 13, 7, 1, 11, 5, 7, 1, 1, 1, 7, 1, 1, 11, 13,$$

$$1, 7, 7, 13, 3, 7, 5, 3, 9, 3, 13, 1, 11, 9, 3, 11, 3, 5, 9, 1).$$

Определение 3.2. Будем говорить, что уравнение $y^{(4)} + f(y) = 0$ с биустойчивой нелинейностью $f(\pm 1) = 0$, $f'(\pm 1) > 0$ допускает хаотические решения, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $d(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой последовательности точек $\{A_k(x_k, \sigma_k)\}_{k=1}^n$ с $x_{k+1} - x_k > d(\varepsilon)$ и значением σ_k , которое принимает одно из двух устойчивых значений для любого k ($\sigma_k = \pm 1$), существует ограниченное решение y , график которого проходит через ε -окрестность всех точек A_k , т. е.

$$|y(x_k) - \sigma_k| < \varepsilon, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.40)$$

Теорема 3.5. Уравнение (3.7) допускает хаотические решения в смысле определения 3.2.

Доказательство. Пусть выбрано достаточно малое $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1/2$). Положим $d(\varepsilon) = \frac{8}{\varepsilon} + 2\pi$. Пусть $\{A_k(x_k, \sigma_k)\}_{k=1}^n$ — последовательность из определения 3.2. Рассмотрим середины $y_k = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$ всех интервалов (x_k, x_{k+1}) таких, что $\sigma_k \neq \sigma_{k+1}$. Рассмотрим на оси Ox новые интервалы I_j длиной 2π , середины которых лежат в точках y_j , а следовательно, отдаленных от точек A_k на расстояние не меньше, чем $\frac{4}{\varepsilon}$. Согласно теореме 3.4, существует

ограниченное решение с конечным числом нулей, и только один из нулей лежит в каждом I_j . Такое решение удовлетворяет условию (3.40). Действительно, в силу того, что решение y не меняет знак между двумя нулями, а абсциссы точек A_k отдалены от нулей больше, чем на $\frac{4}{\varepsilon}$, согласно лемме 3.5 выполняется неравенство (3.40).

Теорема 3.5 доказана.

3.10. Представление периодических решений через их нули.

Теорема 3.6. Пусть $y(x)$ — L -периодическое решение уравнения (3.7), нулями которого являются $x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} = x_0 + L$ (не нарушая общности, положим $x_0 = 0$), числа $a_k = x_k - x_{k-1}$ — расстояния между соседними нулями. Тогда при $0 < x < a_1$ решение имеет вид

$$y(x) = 1 - \frac{1}{M} [e^{-x} \cos(x + \theta) - e^{-(L-x)} \cos(L - x + \theta)] + \frac{e^\theta}{M} \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k [\Phi(x_k - x + \theta) - \Phi(L - x_{2n-k} + x + \theta)], \quad (3.41)$$

где $\tan \theta = \frac{e^{-L} \sin L}{1 - e^{-L} \cos L}$, $M = (1 - 2e^{-L} \cos L + e^{-2L})^{1/2}$.

Для того чтобы функция вида (3.41) была периодическим решением уравнения (3.7), необходимо и достаточно, чтобы числа a_k удовлетворяли трансцендентному уравнению

$$\begin{aligned} & \Phi(a_1 + \theta) - \Phi(a_1 + a_2 + \theta) + \dots + \Phi(a_1 + \dots + a_{2n-1} + \theta) = \\ & = \Phi(a_{2n} + \theta) - \Phi(a_{2n} + a_{2n-1} + \theta) + \dots + \Phi(a_{2n} + \dots + a_2 + \theta) \end{aligned} \quad (3.42)$$

и всем уравнениям, которые получаются из (3.42) путем циклической перестановки чисел a_1, a_2, \dots, a_{2n} .

Фактически теорема 3.6 дает явный вид всех периодических решений уравнения (3.7), если известны расстояния между нулями этих решений, а для расстояний приводится система трансцендентных уравнений. Будем называть эту систему уравнений характеристической системой для расстояний между нулями.

Таким образом, нелинейная проблема описания всех периодических решений уравнения (3.7) эквивалентна проблеме описания всех решений характеристической системы для расстояний. Тем самым бесконечномерная нелинейная проблема описания всех периодических решений уравнения (3.7) с конечным числом нулей сводится к конечномерной нелинейной проблеме — характеристической системе для расстояний. Как будет показано далее, все решения характеристической системы можно полностью описать.

Доказательство. Пусть $y(x)$ — L -периодическое решение уравнения (3.7), нулями которого являются $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} = L$, лежащие на промежутке $[0, L]$. Все другие нули получаются из указанных путем последовательного прибавления или вычитания величин, кратных L . Таким образом, все нули на положительной оси имеют вид

$$x_{2jn+k} = x_k + jL, \quad k = 1, \dots, 2n, \quad j = 0, 1, \dots$$

Нули на отрицательной оси имеют вид

$$x_{-2jn+k} = x_{2n-k} - jL.$$

Подставляя эти значения нулей в формулу (3.22) и учитывая, что

$$\begin{aligned} \Phi(a) + \Phi(a+L) + \dots + \Phi(a+jL) + \dots &= \operatorname{Re} \left[e^{(i-1)a} + e^{(i-1)(a+L)} + \dots \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[e^{(i-1)a} \frac{1}{1 - e^{(i-1)L}} \right] = \frac{e^{-a}}{M} \cos(a + \theta), \end{aligned}$$

где $\cos \theta = \frac{1 - e^{-L} \cos L}{M}$, $\sin \theta = \frac{e^{-L} \sin L}{M}$, $M = [1 - 2e^{-L} \cos L + e^{-2L}]^{1/2} = |1 - e^{(i-1)L}|$, из (3.22) получаем (3.41).

Условие $y(0) = 0$ дает равенство (3.42). Функция $y(x - x_k)$ также является периодическим решением уравнения (3.7). Этой функции соответствуют расстояния между нулями $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{2n}, a_1, \dots, a_k$, которые являются циклической перестановкой исходных расстояний a_1, \dots, a_{2n} . Поэтому равенство (3.42) выполняется и при циклической перестановке a_1, \dots, a_{2n} .

Разрешимость характеристической системы (3.42) является необходимым и достаточным условием того, чтобы точки $x_0 = 0, x_1 = a_1, \dots, x_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k, \dots$ были нулями периодического решения (3.41) уравнения (3.7).

Теорема 3.6 доказана.

3.11. Периодические решения с двумя нулями на периоде. В этом случае есть только расстояния a_1, a_2 , а характеристическая система для расстояний сводится к уравнению

$$e^{-a_1} \cos(a_1 + \theta) = e^{-a_2} \cos(a_2 + \theta), \quad (3.43)$$

$$\text{где } \tan \theta = \frac{e^{-L} \sin L}{1 - e^{-L} \cos L}.$$

Уравнение (3.43) выполняется всегда, если $a_1 = a_2$. Этот случай приводит к рассматриваемым ранее простейшим периодическим решениям.

Пусть $L = N\pi$, где N — натуральное число. Тогда при $a_1 \neq a_2$ уравнение (3.43) выполняется лишь в случае $\cos a_1 = \cos a_2 = 0$, т. е. в случае, когда

$$a_1 = m_1 \frac{\pi}{2}, \quad a_2 = m_2 \frac{\pi}{2}, \quad m_1 + m_2 = 2N,$$

где числа m_1 и m_2 нечетные и в сумме дают $2N$. В этом случае получим новую серию точных периодических решений уравнения (3.7), занумерованных нечетными числами m_1, m_2 :

$$\begin{aligned} y(x; m_1, m_2) &= 1 - \frac{1}{M} \left[(e^{-x} + (-1)^{N+1} e^{-(L-x)}) \cos x + \right. \\ &\quad \left. + (e^{-(a_1-x)} + (-1)^{N+1} e^{-(a_2+x)}) (-1)^{\frac{(m_1-1)}{2}} \sin x \right], \end{aligned} \quad (3.44)$$

где $N = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)$, $L = N\pi$, $M = 1 + (-1)^{N+1} e^{-L}$.

На рис. 3.7 представлено решение (3.44) с периодом $L = 8\pi$.

Характеристическое уравнение (3.43) также можно записать в виде

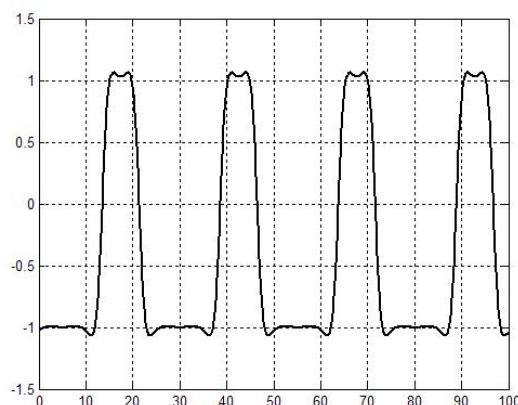


Рис. 3.7. Периодическое решение $y(x; m_1, m_2)$ с двумя нулями на периоде $L = 8\pi$ с $m_1 = 5, m_2 = 11$.

$$\Phi(a_1 + \theta) = \Phi(a_2 + \theta).$$

Из вида функции Φ (рис. 3.4) следует, что решения $a_1 \neq a_2$ существуют лишь при $a_k \geq 1,56$ и $L \geq L_{\min} = 4,73$.

Таким образом, при $L < L_{\min}$ существуют лишь простейшие периодические решения. При увеличении L количество неэквивалентных решений увеличивается, что видно из представления серии точных решений (3.44).

Полагая $a_1 = m_1 \frac{\pi}{2} + \varepsilon_1$, где m_1 — нечетное целое число, характеристическое уравнение (3.43) можно привести к уравнению

$$\varepsilon_1 = -\theta + \arcsin \left[(-1)^{\frac{m_1+1}{2}} e^{-(L-m_1\pi-2\varepsilon_1)} \cos \left(L - m_1 \frac{\pi}{2} + \theta - \varepsilon_1 \right) \right].$$

Методом сжатых отображений можно доказать существование и единственность решения ε_1 этого уравнения и получить его оценку $|\varepsilon_1| < \frac{\pi}{4}$.

3.12. Периодические решения с периодом $N\pi$.

Теорема 3.7. Пусть $L = N\pi$, где N — натуральное число. Тогда все решения характеристической системы для расстояний между нулями L -периодических решений имеют вид $a_k = m_k \frac{\pi}{2} + \varepsilon_k$, где числа m_k нечетные, $|\varepsilon_k| < \frac{\pi}{4}$ и $m_1 + m_2 + \dots + m_{2n} = 2N$.

Доказательство. Детальное доказательство для случая двух нулей на периоде приведено выше. Общий случай доказывается применением принципа сжатых отображений для уравнения относительно $\{\varepsilon_k\}$ вида $\varepsilon = A(\varepsilon)$, который получается из характеристической системы (3.42) для расстояний между нулями периодических решений a_k вида (3.37).

Теорема 3.7 доказана.

На рис. 3.8, а, б представлены периодические решения как иллюстрация теоремы 3.7.

3.13. Пространственная энтропия. Пусть $S(L)$ — число всех неэквивалентных периодических решений уравнения (3.7) с наименьшим периодом L . Число $S(L)$ всегда конечно.

Определение 3.3. Число

$$\eta = \overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln S(L) \quad (3.45)$$

будем называть пространственной энтропией уравнения (3.7) относительно периодических решений.

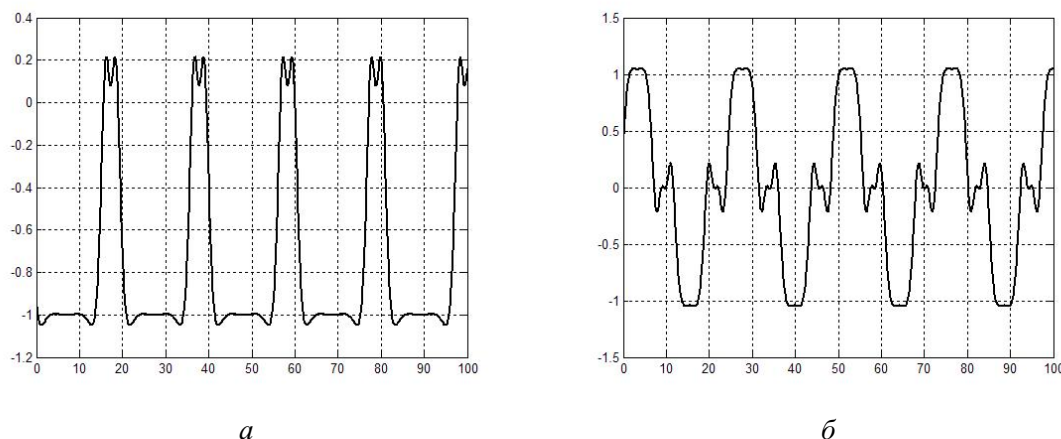


Рис. 3.8. Периодическое решение с $m_k = \{1, 1, 1, 9\}$ и периодом $L = 6\pi$ (а) и $m_k = \{1, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 5\}$ и периодом $L = 9\pi$ (б).

Теорема 3.8. *Пространственная энтропия уравнения (3.7) относительно периодических решений определяется числом*

$$\eta = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (3.46)$$

Доказательство. Пусть $L = N\pi$, где N — целое число. Обозначим через $F(N)$ количество разных разбиений числа N на нечетные части. В силу теоремы 3.7 получаем неравенство

$$S(N\pi) \leq F(2N). \quad (3.47)$$

С другой стороны, циклические перестановки a_1, \dots, a_{2n} приводят к эквивалентному периодическому решению. Поэтому

$$S(N\pi) \geq \frac{1}{2N} F(2N). \quad (3.48)$$

Легко видеть, что $F(N)$ является N -числом Фибоначчи. Эти числа определяются так: $F(1) = 1$, $F(2) = 1$, $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$. Известно, что

$$F(N) = \frac{1}{\sqrt{5}}(p^N - (-p)^{-N}),$$

где

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Поэтому, из (3.47), (3.48) получаем (3.46).

Теорема 3.8 доказана.

4. Кинкообразные решения дифференциальных уравнений четвертого порядка с кубической биустойчивой нелинейностью. **4.1. Общая схема аналитического построения кинкообразных решений.** В данном пункте на примере уравнения

$$y^{(4)} + 2y(y^2 - 1) = 0 \quad (4.1)$$

рассматривается численно-аналитический метод построения ограниченных решений в виде быстроходящихся рядов по гармоникам вида $\exp(-nx + imx)$, где $n \geq 0$, $|m| \leq n$ — целые числа, изложенный в работе [21].

Уравнение (4.1) имеет тривиальные решения $y \equiv -1$, $y \equiv 0$, $y \equiv 1$.

Нетривиальные ограниченные на всей оси решения уравнения (4.1) с конечным числом нулей будем называть *кинкообразными решениями*. При этом в случае одного нуля в точке $x = x_0$ ограниченное решение $y(x)$ уравнения (4.1) будем называть *кинком*, сосредоточенным в точке x_0 , а ограниченное решение с двумя нулями — *солитоном* уравнения (4.1).

Пусть $y(x)$ — ограниченное решение на всей оси уравнения (4.1). Поскольку уравнение (4.1) содержит специального вида нелинейность и лишь производную 4-го порядка, но не содержит явно независимой переменной (уравнение автономно), то и функции $y_1(x) = -y(x)$, $y_2(x) = y(-x)$, $y_3(x) = y(x+a)$ при любом вещественном a являются решениями уравнения (4.1). Решения $y(x)$ и $\pm y(x+a)$ будем называть *эквивалентными*.

Для уравнения (4.1) будет явно построено двухпараметрическое семейство решений $y_+(x; a, b)$, стремящихся к 1 при $x \rightarrow +\infty$, в виде быстросходящихся на положительной полуоси рядов по гармоникам вида $\exp(-nx + imx)$, где $n \geq 0$, $|m| \leq n$ — целые числа. Ограниченные решения $y(x)$ уравнения (4.1) на всей оси будем строить через „сшивание” решений, выражающихся через функцию $y_+(x; a, b)$ на положительной и отрицательной полуосях. Так, если $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 1$, а $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -1$, то $y(x) = y_+(x; a, b)$ при $x \geq 0$ и $y(x) = -y_+(-x; c, d)$ при $x \leq 0$. Такая функция $y(x)$ будет решением уравнения (4.1), если она непрерывна в точке $x = 0$ вместе со всеми своими производными до третьего порядка. Эти условия приводят к системе четырех трансцендентных уравнений относительно четырех действительных параметров a, b, c, d . Таким образом, построение кинкообразных решений на всей оси сводится к аналитическому построению двухпараметрического семейства решений $y_+(x; a, b)$ и к решению трансцендентной системы уравнений. При этом можно получить как теоремы существования кинкообразных решений, так и простые явные аналитические решения уравнения (4.1).

Если ограничиться изучением только нечетных (или четных) по x решений уравнения (4.1), то можно явно построить решения лишь на положительной полуоси $y(x) = y_+(x; a, b)$, а для нахождения двух параметров a и b использовать систему уравнений $y_+(x; a, b) = y_+''(x; a, b) = 0$ для нахождения нечетных решений или $y_+'(x; a, b) = y_+'''(x; a, b) = 0$ для нахождения четных решений.

4.2. Двухпараметрическое семейство решений. Для уравнения (4.1) на положительной полуоси построим решение, стремящееся к 1 при $x \rightarrow \infty$, в виде

$$y = 1 + \sum_{n \geq 1, |m| \leq n} \omega_{n,m} a^{\frac{n+m}{2}} b^{\frac{n-m}{2}} \exp(-nx + imx), \quad (4.2)$$

где n и m — целые числа, $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, а отличные от нуля комплексные числа a и b (параметры) заданы.

Подставляя функции $y(x)$ вида (4.2) в уравнение (4.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках $\exp(-nx + imx)$, получаем следующие рекуррентные соотношения для $\omega_{n,m}$ при $n \geq 2$ и $|m| \leq n$:

$$\omega_{n,m} [(-n + im)^4 + 4] = - \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ m_1+m_2=m}} 6 \omega_{n_1,m_1} \omega_{n_2,m_2} - \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ m_1+m_2+m_3=m}} 2 \omega_{n_1,m_1} \omega_{n_2,m_2} \omega_{n_3,m_3} \quad (4.3)$$

с начальными условиями

$$\omega_{1,1} = \omega_{1,-1} = 1, \quad \omega_{1,0} = 0. \quad (4.4)$$

Лемма 4.1. Для чисел $\omega_{n,m}$, удовлетворяющих рекуррентным соотношениям (4.3) с начальными условиями (4.4), справедливы следующие утверждения:

- 1) $\omega_{n,m} = 0$, если целые числа n и m имеют различную четность;
- 2) $\omega_{n,m} = \bar{\omega}_{n,-m}$;
- 3) имеют место равенства

$$\begin{aligned} \omega_{1,1} = 1, \quad \omega_{2,2} = 0,1, \quad \omega_{2,0} = -0,6, \quad \omega_{3,3} = 0,01, \quad \omega_{3,1} = 0, \\ \omega_{4,4} = \frac{13}{17000}, \quad \omega_{4,2} = \frac{-9 + 32i}{4420}, \quad \omega_{4,0} = \frac{93}{6500}; \end{aligned} \quad (4.5)$$

- 4) для чисел $\sigma_n = \sum_{|m| \leq n} |\omega_{n,m}|$ справедливы оценки

$$\sigma_1 = 2, \quad \sigma_2 = 0,8, \quad \sigma_3 = 0,02, \quad \sigma_n \leq \frac{8}{4^n}, \quad n \geq 4. \quad (4.6)$$

Доказательство. Докажем утверждение 1 индукцией по n . Пусть утверждение 1 выполняется для всех $n \leq N$. Покажем, что тогда оно выполняется и для $n = N + 1$. При $n = N + 1$ в правой части соотношения (4.3) произведения $\omega_{n_1, m_1} \omega_{n_2, m_2}$, $n_1 + n_2 = N + 1$, $m_1 + m_2 = m$, а также $\omega_{n_1, m_1} \omega_{n_2, m_2} \omega_{n_3, m_3}$ с условием $n_1 + n_2 + n_3 = N + 1$, $m_1 + m_2 + m_3 = m$ равны нулю, если четность чисел $N + 1$ и m различная. Поскольку по крайней мере у одного из множителей ω_{n_k, m_k} четность n_k и m_k будет различная, то $\omega_{n_k, m_k} = 0$ по условию индукции. Аналогично по индукции доказывается и утверждение 2.

Из рекуррентных соотношений (4.3), (4.4) при $n = 2$ находим значения $\omega_{2,0}$ и $\omega_{2,2}$. Из этих же соотношений при $n = 3$ получаем $\omega_{3,3}$ и $\omega_{3,1} = 0$. Аналогично при $n = 4$ имеем явные значения $\omega_{4,m}$:

$$\begin{aligned} \omega_{4,4} &= \frac{1}{(-4 + i4)^4 + 4} [-6(\omega_{3,3}\omega_{1,1} + \omega_{2,2}\omega_{2,2} + \omega_{1,1}\omega_{3,3}) - 6\omega_{2,2}\omega_{1,1}\omega_{1,1}] = \frac{13}{17000}, \\ \omega_{4,2} &= \frac{1}{(-4 + i2)^4 + 4} [-12(\omega_{3,3}\omega_{1,-1} + \omega_{2,2}\omega_{2,0}) - \\ &\quad - 12\omega_{2,2}\omega_{1,1}\omega_{1,-1} - 6\omega_{2,0}\omega_{1,1}\omega_{1,1}] = \frac{-9 + 32i}{4420}, \\ \omega_{4,0} &= \frac{1}{4^4 + 4} [-6(2\omega_{2,2}\omega_{2,-2} + \omega_{2,0}\omega_{2,0}) - \\ &\quad - 6(\omega_{2,2}\omega_{1,-1}\omega_{1,-1} + 2\omega_{2,0}\omega_{1,1}\omega_{1,-1} + \omega_{2,-2}\omega_{1,1}\omega_{1,1})] = \frac{93}{6500}. \end{aligned}$$

При этом легко получить оценки для $\omega_{5,m}$ и $\omega_{6,m}$:

$$\begin{aligned} \omega_{5,1} &= \frac{1}{(-5 + i)^4 + 4} [-12(\omega_{4,0}\omega_{1,1} + \omega_{4,2}\omega_{1,-1} + \omega_{3,3}\omega_{2,-2}) - \\ &\quad - 2(3\omega_{3,3}\omega_{1,-1}\omega_{1,-1} + 6\omega_{2,2}\omega_{2,0}\omega_{1,-1} + 6\omega_{2,2}\omega_{2,-2}\omega_{1,1} + 3\omega_{2,0}\omega_{2,0}\omega_{1,1})] = -0,0018 - 0,0019i, \\ |\omega_{5,1}| &\leq 0,0026, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{5,3} &= \frac{1}{(-5 + i3)^4 + 4} [-12(\omega_{4,4}\omega_{1,-1} + \omega_{4,2}\omega_{1,1} + \omega_{3,3}\omega_{2,0}) - \\ &\quad - 2(\omega_{3,3}\omega_{1,1}\omega_{1,-1} + 6\omega_{2,2}\omega_{2,0}\omega_{1,1} + 3\omega_{2,2}\omega_{2,2}\omega_{1,-1})] = \\ &= -2,3892 \cdot 10^{-4} + 4,942 \cdot 10^{-4}i, \quad |\omega_{5,3}| \leq 5,4892 \cdot 10^{-4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{5,5} &= \frac{1}{(-5 + i5)^4 + 4} [-12(\omega_{4,4}\omega_{1,1} + \omega_{3,3}\omega_{2,2}) - \\ &\quad - 6(\omega_{3,3}\omega_{1,1}\omega_{1,1} + \omega_{2,2}\omega_{2,2}\omega_{1,1})] = 5,6561 \cdot 10^{-5},\end{aligned}$$

$$|\omega_{5,1}| \leq 0,0026, \quad |\omega_{5,3}| \leq 5,4892 \cdot 10^{-4}, \quad |\omega_{5,5}| \leq 5,6561 \cdot 10^{-5},$$

$$\begin{aligned}\omega_{6,0} &= \frac{1}{6^4 + 4} [-12(\omega_{5,1}\omega_{1,-1} + \omega_{5,-1}\omega_{1,1} + \omega_{4,2}\omega_{2,-2} + \omega_{4,-2}\omega_{2,2} + \omega_{4,0}\omega_{2,0} + \omega_{3,3}\omega_{3,-3}) - \\ &\quad - 2(3\omega_{4,2}\omega_{1,-1}\omega_{1,-1} + 3\omega_{4,-2}\omega_{1,1}\omega_{1,1} + 6\omega_{4,0}\omega_{1,1}\omega_{1,-1} + 6\omega_{3,3}\omega_{2,-2}\omega_{1,-1} + 6\omega_{3,-3}\omega_{2,2}\omega_{1,1} + \\ &\quad + 6\omega_{2,2}\omega_{2,-2}\omega_{2,0} + \omega_{2,0}\omega_{2,0}\omega_{2,0})] = 3,71 \cdot 10^{-4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{6,2} &= \frac{1}{(-6 + i2)^4 + 4} [-12(\omega_{5,3}\omega_{1,-1} + \omega_{5,1}\omega_{1,1} + \omega_{4,4}\omega_{2,-2} + \omega_{4,2}\omega_{2,0} + \omega_{4,0}\omega_{2,2}) - \\ &\quad - 2(3\omega_{4,4}\omega_{1,-1}\omega_{1,-1} + 6\omega_{4,2}\omega_{1,1}\omega_{1,-1} + 3\omega_{4,0}\omega_{1,1}\omega_{1,1} + 3\omega_{3,3}\omega_{1,1}\omega_{1,1} + 3\omega_{2,2}\omega_{2,2}\omega_{1,1})] = \\ &= -3,06 \cdot 10^{-5} - 1,436 \cdot 10^{-4}i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{6,4} &= \frac{1}{(-6 + i4)^4 + 4} [-12(\omega_{5,5}\omega_{1,-1} + \omega_{5,3}\omega_{1,1} + \omega_{4,4}\omega_{2,0} + \omega_{4,2}\omega_{2,2}) - \\ &\quad - 2(6\omega_{4,4}\omega_{1,1}\omega_{1,-1} + 3\omega_{4,2}\omega_{1,1}\omega_{1,1} + 6\omega_{3,3}\omega_{2,0}\omega_{1,1} + 6\omega_{3,3}\omega_{2,2}\omega_{1,-1} + 3\omega_{2,2}\omega_{2,2}\omega_{2,0})] = \\ &= -1,32 \cdot 10^{-5} + 4,38 \cdot 10^{-5}i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{6,6} &= \frac{1}{(-6 + i6)^4 + 4} [-6(2\omega_{5,5}\omega_{1,1} + 2\omega_{4,4}\omega_{2,2} + \omega_{3,3}\omega_{3,3}) - \\ &\quad - 2(3\omega_{4,4}\omega_{1,1}\omega_{1,1} + 6\omega_{3,3}\omega_{2,2}\omega_{1,1} + \omega_{2,2}\omega_{2,2}\omega_{2,2})] = 4,13 \cdot 10^{-6},\end{aligned}$$

$$|\omega_{6,0}| \leq 3,71 \cdot 10^{-4}, \quad |\omega_{6,2}| \leq 1,4682 \cdot 10^{-4}, \quad |\omega_{6,4}| \leq 4,5746 \cdot 10^{-5}, \quad |\omega_{6,6}| \leq 4,13 \cdot 10^{-6}.$$

Из определения σ_n и явных значений $\omega_{n,m}$ следует, что

$$\sigma_1 = 2, \quad \sigma_2 = 0,8, \quad \sigma_3 = 0,02, \quad \sigma_4 \leq 0,031, \quad \sigma_5 \leq 0,0065, \quad \sigma_6 \leq 7,67 \cdot 10^{-4}. \quad (4.7)$$

Поскольку $|(-n + im)^4 + 4| \geq n^4 + 4$ при $n \geq 2$, из рекуррентных соотношений (4.3) имеем

$$\sigma_n \leq \frac{1}{n^4 + 4} \left[6 \sum_{n_1+n_2=n} \sigma_{n_1} \sigma_{n_2} + 2 \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \sigma_{n_1} \sigma_{n_2} \sigma_{n_3} \right], \quad n \geq 2. \quad (4.8)$$

Полагая в (4.8) последовательно $n = 8, 9, 10$ и используя оценки σ_k из (4.7), получаем оценки

$$\sigma_8 \leq 7,35 \cdot 10^{-5}, \quad \sigma_9 \leq 1,18 \cdot 10^{-5}, \quad \sigma_{10} \leq 2,47 \cdot 10^{-6}. \quad (4.9)$$

Докажем теперь методом индукции по n оценку $\sigma_n \leq 8/4^n$ при всех $n \geq 4$. Из приведенных выше оценок σ_n справедливость неравенства $\sigma_n \leq 8/4^n$ при $n \neq 2, n \leq 10$ очевидна. Пусть неравенство $\sigma_n \leq 8/4^n$ доказано для всех $n, 10 \leq n \leq N$. Докажем, что тогда $\sigma_{N+1} \leq 8/4^{N+1}$. Действительно, из неравенства (4.8) при $n = N + 1$ с учетом условий индукции и $\sigma_2 < 1$ следует, что

$$\begin{aligned} \sigma_{N+1} &\leq \frac{1}{(N+1)^4 + 4} \left[6 \sum_{n_1+n_2=N+1} \sigma_{n_1} \sigma_{n_2} + 2 \sum_{n_1+n_2+n_3=N+1} \sigma_{n_1} \sigma_{n_2} \sigma_{n_3} \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{(N+1)^4 + 4} \left[6 \frac{8^2}{4^{N+1}} (N+2) + 2 \frac{8^3}{4^{N+1}} \frac{(N+6)(N-1)}{2} \right] = \\ &= \frac{6 \cdot 8(N+2) + 8^2(N+6)(N-1)}{(N+1)^4 + 4} \frac{8}{4^{N+1}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Поскольку при $N \geq 10$ выполняется неравенство $6 \cdot 8N + 8^2N(N-1) < (N+1)^4 + 4$, то из (4.10) получаем, что $\sigma_{N+1} \leq 8/4^{N+1}$.

Лемма 4.1 доказана.

Полагая $a = r \exp(i\varphi)$, $b = r \exp(-i\varphi)$, $r > 0$, из представления (4.2) имеем

$$y(x; r, \varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \exp(-nx) T_n(x + \varphi), \quad (4.11)$$

где

$$T_n(x) = \sum_{|m| \leq n} \omega_{n,m} \exp(imx),$$

а в силу $\omega_{n,m} = \bar{\omega}_{n,-m}$ являются вещественнозначными тригонометрическими полиномами.

Учитывая явные значения $\omega_{n,m}$, из (4.5) имеем

$$\begin{aligned} T_1(x) &= \omega_{1,1} e^{ix} + \omega_{1,-1} e^{-ix} = 2 \cos x, \\ T_2(x) &= \omega_{2,2} e^{i2x} + \omega_{2,-2} e^{-i2x} + \omega_{2,0} = 0,2 \cos 2x - 0,6, \\ T_3(x) &= \omega_{3,3} e^{i3x} + \omega_{3,-3} e^{-i3x} = 0,02 \cos 3x, \\ T_4(x) &= \omega_{4,4} e^{i4x} + \omega_{4,-4} e^{-i4x} + \omega_{4,2} e^{i2x} + \omega_{4,-2} e^{-i2x} + \omega_{4,0} = \\ &= 6500^{-1} (93 + 13 \cos 4x) - 2210^{-1} (9 \cos 2x + 32 \sin 2x), \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$T_5(x) = \omega_{5,5} e^{i5x} + \omega_{5,-5} e^{-i5x} + \omega_{5,3} e^{i3x} + \omega_{5,-3} e^{-i3x} + \omega_{5,1} e^{ix} + \omega_{5,-1} e^{-ix} =$$

$$\begin{aligned}
&= 11,32 \cdot 10^{-5} \cos 5x - 4,78 \cdot 10^{-4} \cos 3x - \\
&- 9,884 \cdot 10^{-4} \sin 3x - 0,0036 \cos x + 0,0038 \sin x, \\
T_6(x) &= \omega_{6,6} e^{i6x} + \omega_{6,-6} e^{-i6x} + \omega_{6,4} e^{i4x} + \omega_{6,-4} e^{-i4x} + \omega_{6,2} e^{i2x} + \omega_{6,-2} e^{-i2x} + \omega_{6,0} = \\
&= 8 \cdot 10^{-6} \cos 6x - 2,64 \cdot 10^{-5} \cos 4x - 8,76 \cdot 10^{-5} \sin 4x - \\
&- 6,12 \cdot 10^{-5} \cos 2x + 2,87 \cdot 10^{-4} \sin 2x + 3,71 \cdot 10^{-4}.
\end{aligned}$$

Теорема 4.1. *Функция $y(x; r, \varphi)$ вида (4.11) при вещественных значениях параметров φ и $r > 0$ является вещественным решением уравнения (4.1) на полуоси $x \geq x_0 > \ln(r/4)$, а $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x; r, \varphi) = 1$.*

Доказательство. Согласно оценкам (4.6) и $|T_n(x)| \leq \sigma_n$, ряд (4.11) равномерно сходится при $x \geq x_0 > \ln(r/4)$ и допускает почленное дифференцирование по x произвольное число раз без нарушения сходимости ряда. Поскольку числа $\omega_{n,m}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям (4.3), функция $y(x; r, \varphi)$ вида (4.11) является решением уравнения (4.1). При этом $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x; r, \varphi) = 1$.

Теорема 4.1 доказана.

4.3. Теорема существования. Для доказательства существования кинков (нечетных ограниченных решений) достаточно установить существование решений $y(x)$ уравнения (4.1) на полуоси $x \geq 0$ с условиями

$$\begin{aligned}
y(0) &= y''(0) = 0, \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) &= 1.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

В качестве такого решения можно взять решение $y(x; r, \varphi)$ из теоремы 4.1, подобрав параметры r и φ так, чтобы выполнялись граничные условия (4.13) при $x = 0$. Другими словами, параметры r и φ должны быть решениями системы трансцендентных уравнений

$$y(0; r, \varphi) = 0, \quad y''(0; r, \varphi) = 0. \tag{4.14}$$

Учитывая явный вид (4.11) двупараметрического семейства решений $y(x; r, \varphi)$ уравнения (4.1), систему (4.14) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
1 + 2r \cos \varphi + r^2(-0,6 + 0,2 \cos 2\varphi) + h_1(r, \varphi) &= 0, \\
\sin \varphi + r(-0,6 + 0,4 \sin 2\varphi) + h_2(r, \varphi) &= 0,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

где

$$h_1(r, \varphi) = \sum_{n \geq 3} r^n T_n(\varphi), \quad h_2(r, \varphi) = \frac{1}{4} \sum_{n \geq 3} r^{n-1} [n^2 T_n(\varphi) - 2n T_n'(\varphi) + T_n''(\varphi)].$$

Разрешимость системы уравнений (4.15) относительно параметров r и φ в области $r \leq 0,55$ будет означать, согласно теореме 4.1, существование кинка уравнения (4.1).

Теорема 4.2. В области $\Omega = \{(r, \varphi) : 0,45 \leq r \leq 0,55; \pi - 0,7 \leq \varphi \leq \pi - 0,2\}$ существует и единственно решение r_0, φ_0 системы (4.15). Функция

$$y_k(x) = \begin{cases} y(x; r_0, \varphi_0), & x \geq 0, \\ -y(-x; r_0, \varphi_0), & x \leq 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

является кинком уравнения (4.1). Функция

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k(x) = & 1 + 2r_0 \exp(-x) \cos(x + \varphi_0) + r_0^2 \exp(-2x)(-0,6 + 0,2 \cos 2(x + \varphi_0)) + \\ & + 0,02r_0^3 \exp(-3x) \cos 3(x + \varphi_0) + 0,0013 \exp(-4x) \end{aligned} \quad (4.17)$$

при $r_0 = 0,48577, \varphi_0 = 2,73208$ является приближением кинка $y_k(x)$ при $x \geq 0$ и справедлива оценка $|y_k(x) - \tilde{y}_k(x)| \leq 10^{-4} \exp(-|x|)$.

Доказательство. Сначала оценим равномерно по φ функции $h_1(r, \varphi)$ и $h_2(r, \varphi)$, входящие в систему (4.15), при $r \leq 0,55$, используя явный вид (4.12) тригонометрических функций $T_n(\varphi)$, оценки $|T_n(\varphi)| \leq \sigma_n, |T'_n(\varphi)| \leq n\sigma_n, |T''_n(\varphi)| \leq n^2\sigma_n$ и явные значения и оценки для σ_n из леммы 4.1:

$$|h_1(r, \varphi)| \leq \sum_{n \geq 3} r^n \sigma_n \leq \frac{1}{50} r^3 + \sum_{n \geq 4} r^n \frac{8}{4^n} \leq 0,007,$$

$$|h_2(r, \varphi)| \leq 0,09r^2 + 0,15r^3 + \sum_{n \geq 5} r^{n-1} n^2 \sigma_n \leq 0,075.$$

Переходя в системе (4.15) к новым параметрам $r, \psi = \pi - \varphi$ и решая квадратное уравнение относительно r , преобразуем систему (4.15) к виду

$$r = \frac{1 + h_1}{\cos \psi + \sqrt{(1 + h_1)(0,6 - 0,2 \cos 2\psi) + \cos^2 \psi}}, \quad (4.18)$$

$$\psi = \psi - \sin \psi + r(0,6 + 0,4 \sin 2\psi) - h_2.$$

Систему (4.18) можно рассматривать как операторное уравнение вида $p = A(p)$, где $p = (r, \psi)$, а оператор A явно выражается правыми частями равенств (4.18). Можно показать, что оператор A непрерывен и переводит область $\tilde{\Omega} = \{(r, \psi) : 0,45 \leq r \leq 0,55; 0,2 \leq \psi \leq 0,7\}$ двумерного евклидова пространства E^2 в себя. Тогда в силу теоремы Брауэра–Шаудера о существовании неподвижной точки можно утверждать, что система (4.18) имеет решение $p_0 \in \tilde{\Omega}$. Более детальный анализ показывает, что в области $\tilde{\Omega}$ оператор A сжимающий. Поэтому в области $\tilde{\Omega}$ решение системы (4.18) единственно. Тогда и для системы (4.15) существует и единственно в Ω решение r_0, φ_0 . В силу теоремы 4.1 решение (4.16) является кинком уравнения (4.1).

Теорема 4.2 доказана.

Численное решение системы (4.15) дает приведенные значения r_0, φ_0 . Если при этих значениях r_0 и φ_0 в представлении (4.11) опустить все слагаемые, по модулю меньшие 10^{-4} , то получим приближенное выражение (4.17) для кинка и эффективную оценку точности. Отметим, что

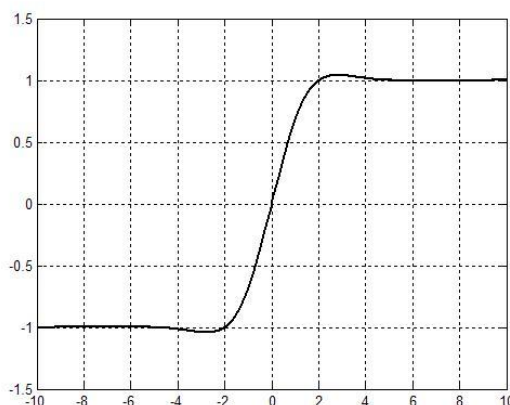


Рис. 4.1. График кинка.

более простое, чем (4.17), выражение $\hat{y}_k(x) = 1 - (0,9 \cos x + 0,4 \sin x) \exp(-x) - 0,1 \exp(-2x)$ приближает кинк $y_k(x)$ с точностью до 0,011.

На рис. 4.1 представлен график кинка уравнения (4.1).

4.4. Численные методы построения кинкообразных решений. Уравнение (4.1) имеет первый интеграл $y'''y' - \frac{1}{2}(y'')^2 + \frac{1}{2}y^4 - y^2 = \text{const}$, который для кинкообразных решений $y(x) \rightarrow \pm 1$ при $x \rightarrow \infty$ приводит к соотношению

$$y'''y' - \frac{1}{2}(y'')^2 = -\frac{1}{2}(1 - y^2)^2. \quad (4.19)$$

Тождество (4.19) полезно при численных построениях кинкообразных решений.

Если $y(x)$ — кинкообразное решение уравнения (4.1) и функция $y(x)$ нечетная, то $y(0) = 0$, $y''(0) = 0$. Обозначая $y'(0) = \alpha$, из (4.19) получаем $y'''(0) = -(2\alpha)^{-1}$. Таким образом, нечетные кинкообразные решения $y(x)$ уравнения (4.1) удовлетворяют начальным условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = \alpha, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = -\frac{1}{2\alpha}. \quad (4.20)$$

Наличие начальных условий (4.20) для уравнения (4.1) позволяет использовать стандартные численные методы построения решения задачи Коши. При этом параметр α подбираем так, чтобы решение $y(x)$ было ограниченным на промежутке $[0, l]$, полагая $y(l) = 1$ и последовательно увеличивая l . При $\alpha = 0,781293$ получаем кинк, изображенный на рис. 4.1.

На рис. 4.2 при $\alpha = -0,790918785$ представлено кинкообразное решение с тремя нулями: $x_1 = -5,5146$, $x_2 = 0$, $x_3 = -x_1 = 5,5146$. При этом чем на большем интервале мы строим решение, тем с большей точностью следует определять начальные данные.

Для численного построения солитонов уравнения (4.1) рассмотрим случай, когда два нуля решения симметричны относительно $x = 0$. Тогда солитон $y(x)$ задается четной функцией $y(-x) = y(x)$ и поэтому $y'(0) = y'''(0) = 0$. Учитывая соотношение (4.19) и обозначая $y(0) = \beta$ для солитонов, получаем начальные условия

$$y(0) = \beta, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = \pm(1 - \beta^2), \quad y'''(0) = 0. \quad (4.21)$$

Это позволяет для численного построения солитонов воспользоваться стандартными программами численного решения задачи Коши (4.1), (4.21). Параметр β подбираем так, чтобы решение

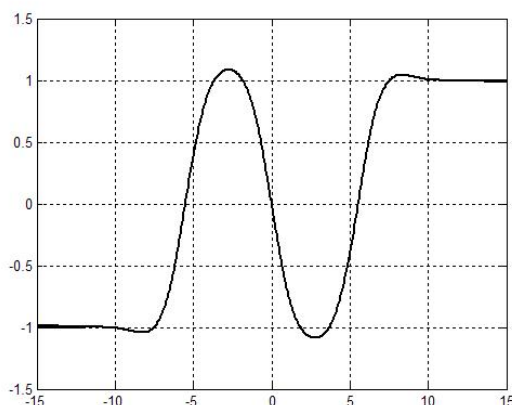


Рис. 4.2. График кинкообразного решения с тремя нулями.

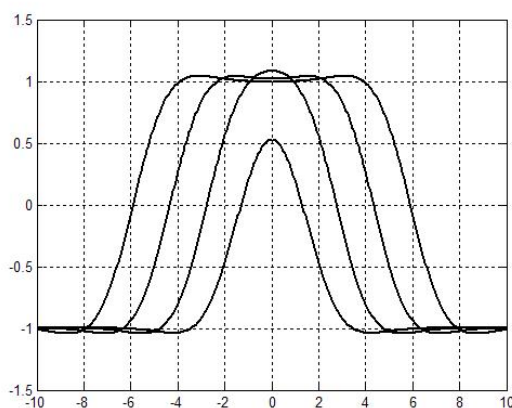


Рис. 4.3. Графики солитонов.

$y(x)$ было ограниченным на промежутке $[0, l]$, полагая $y(l) = -1$, с последовательным увеличением l .

На рис. 4.3 изображены графики численно построенных солитонов при $\beta = 0,5257958, 1,0845885, 1,017875, 0,996259264$ с расстояниями между нулями $d = 2,605, 5,5212, 8,6736, 11,0292$ соответственно.

4.5. Приближенные аналитические методы построения кинкообразных решений. Двухпараметрическое семейство решений $y(x; r, \varphi)$ уравнения (4.1) из теоремы 3.1 также можно использовать для построения солитонов. Для этого параметры r, φ необходимо находить из системы уравнений $y'(0; r, \varphi) = 0, y'''(0; r, \varphi) = 0$.

Используя выражения (4.11), (4.12) и взяв $r = 1,872, \varphi = 1,294$, можно получить приближение для солитона:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_s(x) = & -1 - 2r \exp(-x) \cos(x + \varphi) - r^2 \exp(-2x)(-0,6 + 0,2 \cos 2(x + \varphi)) - \\ & - 0,02r^3 \exp(-3x) \cos 3(x + \varphi) - 0,635 \exp(-4x) + 0,389 \exp(-5x). \end{aligned}$$

Это аналитическое выражение отличается не более, чем на $2 \cdot 10^{-3}$, от численно полученного солитона с расстоянием между нулями $d = 2,605$, который изображен на рис. 4.3. Отметим,

что более простое выражение

$$\tilde{y}_s(x) = -1 + (-1,1 \cos x + 3,18 \sin x) \exp(-x) + 3,6 \exp(-2x) - 0,97 \exp(-3x)$$

приближает численный солитон с точностью до 0,012.

Анализ численно построенных солитонов уравнения (4.1) показывает, что при больших расстояниях между нулями солитон приближенно состоит из сопряжения кинка, сосредоточенного в левом нуле, с антикинком, сосредоточенным в правом нуле солитона. (Напомним, что антикинк — ограниченное решение уравнения (4.1) с одним нулем, для которого $\lim_{x \rightarrow \mp \infty} y(x) = \pm 1$.) Если нулями солитона $y_s(x)$ являются точки $x = -x_0$ и $x = x_0$, то функция

$$\tilde{y}_s(x) = \begin{cases} y_k(x + x_0), & x \leq 0, \\ -y_k(x - x_0), & x \geq 0, \end{cases} \quad (4.22)$$

где y_k — кинк уравнения (4.1), приближенно аппроксимирует солитон $y_s(x)$. При $x \neq 0$ функция $\tilde{y}_s(x)$ (4.22) удовлетворяет уравнению (4.1), а в точке $x = 0$ непрерывна вместе с \tilde{y}_s'' . Однако \tilde{y}_s''' в точке $x = 0$ претерпевает скачок $2y_k'''(x_0)$, а \tilde{y}_s' — скачок $2y_k'(x_0)$, и эти скачки не равны нулю одновременно. Таким образом, функция $\tilde{y}_s(x)$ является решением уравнения

$$\tilde{y}_s^{(4)} + 2(\tilde{y}_s^3 - \tilde{y}_s) = 2y_k'''(x_0)\delta(x) + 2y_k'(x_0)\delta''(x),$$

где δ — дельта-функция Дирака. Представляя $y_s = \tilde{y}_s + z$ из (4.1), для z получаем уравнение

$$z^{(4)} + 4z = -2y_k'''(x_0)\delta(x) - 2y_k'(x_0)\delta''(x) + 6(1 - \tilde{y}_s^2)z - 6\tilde{y}_s z^2 - 2z^3. \quad (4.23)$$

Уравнение (4.23) можно свести к интегральному уравнению, если воспользоваться фундаментальным решением $E(x) = 1/8(\cos x + \sin |x|) \exp(-|x|)$ уравнения $E^{(4)}(x) + 4E(x) = \delta(x)$:

$$z(x) = -2y_k'''(x_0)E(x) - 2y_k'(x_0)E''(x) + \int E(x-s)[6(1 - \tilde{y}_s^2)z(s) - 6\tilde{y}_s z^2(s) - 2z^3(s)] ds.$$

Это нелинейное интегральное уравнение можно использовать для доказательства существования солитонных решений и для нахождения их приближенных выражений. В частности, если x_0 большое, то $z(x) \approx -2y_k'''(x_0)E(x) - 2y_k'(x_0)E''(x)$, и это приводит к приближенному аналитическому выражению для солитонов:

$$y_s(x; x_0) = \tilde{y}_s(x; x_0) - 2y_k'''(x_0)E(x) - 2y_k'(x_0)E''(x). \quad (4.24)$$

Условие $y_s(-x_0) = y_s(x_0) = 0$ приводит к уравнению

$$y_k'(x_0)E''(x_0) + y_k'''(x_0)E(x_0) = 0, \quad (4.25)$$

являющемуся характеристическим для определения расстояния $2x_0$ между нулями солитонов. В случае больших x_0 , когда для кинков можно ограничиться выражением $y_k(x) = 1 + 2r \exp(-x) \cos(x + \varphi)$, уравнение (4.25) сводится к $\cos(2x_0 + \varphi) = 0$, что дает дискретную серию для расстояний между нулями солитонов $2x_0 = d_n = \pi/2 - \varphi + n\pi$, $n \in N$, хорошо согласующуюся с приведенными выше численными расчетами.

Данный подход можно распространить и на построение кинкообразных решений с конечным числом нулей. Пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_{m+1}$ — все нули кинкообразного решения $y(x)$, а $d_{n_k} = x_{k+1} - x_k$ — расстояния между его последовательными нулями, принимающие значения

$$d_{n_k} = \pi/2 - \varphi + n_k\pi, \quad (4.26)$$

где n_k — натуральные числа. Тогда такое кинкообразное решение в окрестности каждого нуля x_k представимо в виде кинка $(-1)^{k+1}y_k(x - x_k)$. Эта последовательность кинков хорошо сопрягается в серединах между нулями кинкообразных решений с помощью фундаментального решения $E(x)$ и его второй производной, аналогично формуле (4.24). Само кинкообразное решение $y(x)$ с точностью до эквивалентности однозначно характеризуется целочисленным вектором (n_1, \dots, n_m) , задающим расстояния между последовательными нулями (4.26).

4.6. Энтропия. Пусть $S(L)$ — число всех неэквивалентных кинкообразных решений уравнения (4.1), нули которых лежат на промежутке длины L . Для характеристики числа $S(L)$ полезно следующее понятие энтропии.

Определение 4.1. Число

$$\eta = \overline{\lim}_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln S(L)$$

называется *пространственной энтропией уравнения (4.1) относительно кинкообразных решений*.

Теорема 4.3. Для уравнения (4.1) величина пространственной энтропии $\eta \geq \ln 2/\pi$.

Доказательство. Поскольку расстояние между двумя последовательными нулями у кинкообразных решений лежит в промежутке $[(n-1)\pi, n\pi]$ с натуральными n и каждый такой промежуток реализуется, число $S(L)$ оценивается снизу числом F_N всех различных целочисленных векторов (n_1, \dots, n_m) таких, что $\sum_{j=1}^m n_j \leq N = [L/\pi]$. Так как $F_N = 2^N - 1$, это приводит к необходимой оценке η .

Положительность пространственной энтропии для уравнения (4.1) означает, что уравнение (4.1) имеет хаотические решения. Примером таковых могут служить кинкообразные решения, у которых расстояния между последовательными нулями характеризуются целочисленным вектором (n_1, \dots, n_m) со случайной целочисленной выборкой n_j , $j = 1, \dots, m$. Отметим, что в работе [24] дано точное значение энтропии для уравнения $y^{(4)}(x) + 4(y(x) - \text{sign } y(x)) = 0$ относительно периодических решений, приведенное в пункте 3, формула (3.46).

4.7. Выводы. Аналитическое построение двухпараметрического семейства ограниченных решений уравнения (4.1) на полуоси в виде быстросходящихся рядов вида (4.11) не только позволяет доказывать теоремы существования нетривиальных решений различных краевых задач, но и дает простые приближенные аналитические решения таких задач. Этот метод можно применить также для уравнений вида

$$y^{(4)} + qy'' + f(y) = 0 \quad (4.27)$$

с полиномиальной нелинейностью $f(y)$. Если $f(1) = 0$, а корни характеристического уравнения $k^4 + qk^2 + f'(1) = 0$ имеют вид $k = \pm\lambda \pm i\mu$, где $\lambda > 0$, $\mu > 0$, то двухпараметрическое семейство ограниченных на полуоси $x > 0$ решений уравнения (4.27) можно представить в виде, аналогичном (4.2),

$$y(x; a, b) = 1 + \sum_{n \geq 1, |m| \leq n} \tilde{\omega}_{n,m} a^{\frac{n+m}{2}} b^{\frac{n-m}{2}} \exp(-\lambda nx + i\mu tx), \quad (4.28)$$

где числовые коэффициенты $\tilde{\omega}_{n,m}$ не зависят от a и b и удовлетворяют рекуррентным соотношениям, которые получаются подстановкой функции (4.28) в уравнение (4.27) и являются аналогами соотношений (4.3).

1. Aronson D. G., Weinberger H. Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics // *Adv. Math.* – 1978. – **30**. – P. 33–76.
2. Couillet P., Elphick C., Repaux D. Nature of spatial chaos // *Phys. Rev. Lett.* – 1987. – **58**. – P. 431–434.
3. Dee G. T., van Saarloos W. Bistable systems with propagating fronts leading to pattern formation // *Phys. Rev. Lett.* – 1988. – **60**. – P. 2641–2644.
4. Fife P. C. Mathematical aspects of reacting and diffusing systems // *Lect. Notes Biomath.* – New York: Springer-Verlag, 1979. – **28**. – 185 p.
5. Колмогоров А., Петровский И., Пискунов Н. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // *Бюлл. МГУ. Сер. А. Математика и механика.* – 1937. – 1. № 6. – С. 1–16. (transl.: *Kolmogorov A., Petrovskii I., Piskunov N. Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique* // *Bull. Univ. Moscou. Ser. Int. Sect. A.* – 1937. – **1**. – P. 1–25).
6. Pomeau Y., Manneville P. Wavelength selection in cellular flows // *Phys. Lett. A.* – 1980. – **75**. – P. 296–298.
7. Powell J. A., Newell A., Jones C. K. R. T. Competition between generic and nongeneric fronts in envelope equations // *Phys. Rev. A.* – 1991. – **44**. – P. 3636–3652.
8. Swift J., Hohenberg P. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability // *Phys. Rev. A.* – 1977. – **15**. – P. 319–328.
9. Zimmermann W. Propagating fronts near a Lifschitz point // *Phys. Rev. Lett.* – 1991. – **66**. – P. 1546.
10. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 301 с. (transl.: *Samoilenko A. M. Elements of the mathematical theory of multi-frequency oscillations // Math. and its Appl.* – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991. – Vol. 7. – 313 p.).
11. Самойленко А. М., Ронто Н. Й. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: Вища шк., 1976. – 178 с. (transl.: *Samoilenko A. M., Ronto N. I. Numerical analytic methods of investigating periodic solutions.* – Moscow: Mir, 1979. – 183 p.).
12. *Samoilenko A. M., Petryshyn R. Multifrequency oscillations of nonlinear systems.* – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 2004. – 317 p.
13. *Самойленко А. М., Петришин П. І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань.* – Київ: Наук. думка, 2004. – 474 с.
14. *Samoilenko A. M., Teplinskii Yu. V. Elements of mathematical theory of evolutionary equations in Banach spaces // World Sci. Ser. Nonlinear Ser. A.* – 2013. – **86**. – 408 p.
15. Пелетье Л. А., Трой В. К., Ван дер Ворст Р. К. А. М. Стационарные решения нелинейного уравнения диффузии четвертого порядка // *Дифференц. уравнения.* – 1995. – **31**, № 2. – С. 327–337 (перевод: *Peletier L. A., Troy W. C., van der Vorst R. C. A. M. Stationary solutions of a fourth-order nonlinear diffusion equation // Different. Equat.* – 1995. – **31**, № 2. – P. 301–314).
16. *van den Berg G. J. B., Peletier L. A., Troy W. C. Global branches of multi bump periodic solutions of the Swift–Hohenberg equation // Arch. Ration. Mech. and Anal.* – 2001. – **158**. – P. 91–153.
17. *van den Berg J. B., Lessard J.-P. Chaotic braided solutions via rigorous numerics: chaos in the Swift–Hohenberg equation // SIAM J. Appl. Dynam. Syst.* – 2008. – **7**. – P. 988–1031.
18. *Kalies W. D., Vander Vorst R. Multitransition homoclinic and heteroclinic solutions of extended Fisher–Kolmogorov equation // J. Different. Equat.* – 1996. – **131**. – P. 209–228.
19. *Peletier L. A., Troy W. C. A topological shooting method and the existence of kinks of the extended Fisher–Kolmogorov equation // Top. Meth. Nonlinear Anal.* – 1995. – **6**, № 2. – P. 331–355.
20. *Peletier L. A., Troy W. C. Spatial patterns: higher order model equations in physics and mechanics.* – Boston: Birkhäuser, 2001. – 343 p.
21. *Самойленко А. М., Нижник И. І. Кинкообразные решения дифференциальных уравнений четвертого порядка с кубической биустойчивой нелинейностью // Дифференц. уравнения.* – 2014. – **50**, № 2. – С. 201–209.
22. *Peletier L. A., Rodríguez J. A. Homoclinic orbits to a saddle-center in a fourth-order differential equation // J. Different. Equat.* – 2004. – **203**. – P. 185–215.

23. *Albeverio S., Nizhnik I.* Spatial chaos in a fourth-order nonlinear parabolic equation // *Phys. Lett. A.* – 2001. – **288.** – P. 299–304.
24. *Самойленко А. М., Нижник И.* Обмежені розв'язки рівняння четвертого порядку з модельною бістійкою нелінійністю // *Укр. мат. вісн.* – 2009. – **6,** № 3. – С. 400–424 (перевод: *Samoilenko A. M., Nizhnik I.* Bounded solutions of a fourth-order equation with a model bistable nonlinearity // *Ukr. Math. Bull.* – 2009. – **6,** № 3. – P. 397–420).
25. *Peletier L. A., Rodríguez J. A.* The discrete Swift–Hohenberg equation // *Rept Math. Inst. Leiden Univ.* – 2004. – 34 p.
26. *Nizhnik L., Hasler M., Nizhnik I.* Stable stationary solutions in reaction-diffusion systems consisting of a 1-d array of bistable cells // *Int. J. Bifur. Chaos.* – 2002. – **2.** – P. 261–279.
27. *Nizhnik I.* Stable stationary solutions for a reaction-diffusion equation with a multi-stable nonlinearity // *Phys. Lett. A.* – 2006. – **357.** – P. 319–322.
28. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
29. *Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 427 с. (transl.: *Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik, N. V.* Differential equations with impulse effects. Multivalued right-hand sides with discontinuities // *de Gruyter Stud. Math.* – 2011. – **40.** – 307 p.).
30. *Нижник И. Л., Краснеева А. О.* Періодичні розв'язки рівнянь другого порядку з розривною нелінійністю // *Нелінійні коливання.* – 2012. – **15,** № 3. – С. 381–389.
31. *Павленко В. Н., Федяшев М. С.* Периодические решения параболического уравнения с однородным граничным условием Дирихле и разрывной нелинейностью линейного роста // *Укр. мат. журн.* – 2012. – **64,** № 8. – С. 1080–1088.
32. *Потапов Д. К.* Бифуркационные задачи с разрывными нелинейностями. – СПб.: Изд-во ИБП, 2012. – 119 с.
33. *Kamachkin A., Potapov D., Yevstafyeva V.* Solutions to second order differential equations with discontinuous right-hand side // *Electron. J. Different. Equat.* – 2014. – № 221. – P. 1–6.

Получено 08.10.14