

Н. Л. Пачулиа (Абхаз. гос. ун-т, Сухум)

ОБ ОЦЕНКАХ СИЛЬНЫХ СРЕДНИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

We consider the problem of (λ, φ) -strong summation of number series by a regular method λ with power summation of the function φ . The accumulated results are extended to the Fourier expansions in trigonometric functions $f \in L_p$, $p > 1$, where C is the set of 2π -periodic continuous functions. Some results are also obtained for the estimation of strong means of the method λ and L_p , $p > 1$, the Lebesgue point x of the function f under certain additional conditions in the case where the function φ tends to infinity AS $u \rightarrow \infty$ faster than the exponential function $\exp(\beta u) - 1$, $\beta > 0$.

Розглядається (λ, φ) -сильне підсумовування числових рядів регулярним методом λ зі степенем підсумовування функції φ . Отримані результати поширено на розклад Фур'є по тригонометричній системі функцій $f \in L_p$, $p > 1$, і $f \in C$, де C — множина 2π -періодичних неперервних функцій. Встановлено результати по оцінках сильних середніх методу λ в L_p , $p > 1$, точці Лебега x функції f при деяких додаткових умовах у випадку прямування функції φ до нескінченності при $u \rightarrow \infty$ швидше за показникову функцію $\exp(\beta u) - 1$, $\beta > 0$.

В настоящей работе получены оценки сильных средних методов суммирования числовых рядов, которые использованы при исследовании аналогичных задач теории рядов Фурье по тригонометрической системе функций.

Пусть даны числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad (1)$$

с частными суммами $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$, Φ — множество возрастающих, непрерывных на $[0, \infty)$ функций φ таких, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(u) > 0$ при $u > 0$, а Φ_1 — подмножество функций из Φ , удовлетворяющих условиям

$$\varphi(2u) \leq a\varphi(u) \quad \forall u \in [0, \sigma], \quad (2)$$

$$\ln \varphi(u) = o(u), \quad u \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Далее, пусть матрица $(\lambda_k^n) = \lambda$ определяет регулярный метод суммирования рядов, причем при любом фиксированном $n \in N_0 = \{0, 1, \dots\}$ последовательность чисел (λ_k^n) не возрастает по индексу k и неотрицательная. Множество таких матриц обозначим через Λ , а $S \in R = (-\infty, \infty)$.

Пусть $\varphi \in \Phi$ и $\lambda \in \Lambda$. Введем величины

$$H_n^\varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n \varphi(|S_k - S|), \quad (4)$$

которые называют φ -сильными средними метода λ ряда (1) или (λ, φ) -сильными средними ряда (1).

Впервые величины вида (4) для тригонометрических рядов Фурье для средних арифметических, называемых (H, q) -сильными средними, ввели и изучали Харди и Литтлвуд [1, 2]. В этих работах заложены основы современной теории сильного суммирования рядов Фурье. Позднее такие объекты рассматривали многие другие авторы (см., например, монографии [3, 4]).

Для формулировки основного утверждения работы введем следующие обозначения. Пусть (μ_n) , (ν_n) — две возрастающие последовательности натуральных чисел такие, что $1 \leq \frac{\nu_n}{\mu_n} \leq \sigma$. В дальнейшем B_n — произвольное непустое подмножество натуральных чисел из сегмента $[\mu_n, \nu_n]$, $r_n = |B_n|$ — мощность множества B_n , $\gamma \in \Phi$ и

$$h_{n,r_n}^{(\gamma)} = \frac{1}{r_n} \sum_{k \in B_n} \gamma(|S_k - S|). \quad (5)$$

Теорема 1. Пусть последовательность чисел $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, убывая, стремится к нулю и $\gamma \in \Phi$. Если для любых $B_n \subset [\mu_n, \nu_n]$

$$h_{n,r_n}^{(\gamma)} \leq A_0 \gamma(F_{\mu_n}) \ln \frac{(\nu_n - \mu_n + 1)e}{r}, \quad (6)$$

то для любого $\gamma \in \Phi_1$

$$\tau_n^{\varphi(\gamma)} = \frac{1}{\nu_n - \mu_n + 1} \sum_{k=\mu_n}^{\nu_n} \varphi(\gamma(|S_k - S|)) \leq A \varphi(\gamma(F_{\mu_n})). \quad (7)$$

Здесь и в дальнейшем через A будем обозначать постоянное число, возможно не одно и то же в различных местах текста.

Доказательство. Если $F_{\mu_n} = 0$, то в силу неравенства (6) следует $\gamma(|S_k - S|) = 0$ $\forall k \in [\mu_n, \nu_n]$, поэтому соотношение (7) имеет место. Пусть $F_{\mu_n} > 0$,

$$B_{n,\nu} = \left\{ k \in [\mu_n, \nu_n] : (\nu - 1) \gamma(F_{\mu_n}) \leq \gamma(|S_k - S|) < \nu(F_{\mu_n}) \right\},$$

$$\delta_{n,\nu} = 1 \quad \text{при} \quad B_{n,\nu} \neq \emptyset, \quad \delta_{n,\nu} = 0 \quad \text{при} \quad B_{n,\nu} = \emptyset.$$

В силу условия (6), считая при этом $B_n = B_{n,\nu}$ и $r_{n,\nu} = |B_{n,\nu}|$, получаем

$$(\nu - 1) \gamma(F_{\mu_n}) \leq \frac{1}{r_{n,\nu}} \sum_{k \in B_{n,\nu}} \gamma(|S_k - S|) \leq A_0 \gamma(F_{\mu_n}) \ln \frac{\nu_n - \mu_n + 1}{r_{n,\nu}} e.$$

Отсюда следует, что

$$r_{n,\nu} \leq e(\nu_n - \mu_n + 1) \exp(-\alpha\nu), \quad \alpha = (2A_0)^{-1}, \quad \nu > 1. \tag{8}$$

Группируя слагаемые по всевозможным множествам $B_{n,\nu}$, с учетом возрастания функции φ и неравенства (8) имеем

$$\begin{aligned} \tau_n^{\varphi(\gamma)} &= \frac{1}{\nu_n - \mu_n + 1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_{n,\nu} \sum_{k \in B_{n,\nu}} \varphi(\gamma(|S_k - S|)) \leq \\ &\leq e \sum_{\nu=2}^{\infty} \varphi(\nu\gamma(F_{\mu_n})) \exp(-\alpha\nu) + \varphi(\gamma(F_{\mu_n})). \end{aligned}$$

Поскольку функция φ принадлежит Φ_1 , то [3] существует положительное число $\sigma = \sigma_\varphi$ такое, что для любого $u \in [0, \sigma]$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(\nu u) \exp(-\alpha\nu) \leq A\varphi(u). \tag{9}$$

На основании равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(F_{\mu_n}) = 0$ найдется число n_0 при $n \geq n_0$ такое, что выполняется неравенство $\gamma(F_{\mu_n}) \leq \sigma$. Тогда, считая $u = \gamma(F_{\mu_n})$, из (9) получаем

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \varphi(\nu\gamma(F_{\mu_n})) \exp(-\alpha\nu) \leq A\varphi(\gamma(F_{\mu_n})),$$

что доказывает соотношение (7) при $n \geq n_0$. Если $n < n_0$, то неравенство (7) выполняется за счет коэффициента A .

Теорема 1 доказана.

Полагая в теореме 1 $\mu_n = n$, $\nu_n = 2n$, получаем такое следствие.

Следствие 1. Пусть последовательность чисел (F_n) , убывая, стремится к нулю, а $\gamma \in \Phi$. Тогда если для любого $B_n \subset [n, 2n]$

$$\frac{1}{r_n} \sum_{k \in B_n} \gamma(|S_k - S|) \leq A\gamma(F_n) \ln \frac{ne}{r_{n,\nu}}, \tag{10}$$

то для любого $\varphi \in \Phi_1$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \varphi(\gamma(|S_k - S|)) \leq A\varphi(\gamma(F_n)). \tag{11}$$

Теорема 2. Пусть последовательность чисел (F_n) убывает и стремится к нулю, функция γ принадлежит Φ и для любого $B_n \subset [n, 2n]$ выполнены условия (10). Тогда если последовательность (λ_n) убывает и неотрицательная, а $\varphi \in \Phi_1$, то

$$H^{\Phi(\gamma)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \Phi(\gamma(|S_k - S|)) \leq A \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \Phi(\gamma(F_k)). \quad (12)$$

Если $\lambda \in \Lambda$, то

$$H_n^{\Phi(\gamma)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n \Phi(\gamma(|S_k - S|)) \leq A \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n \Phi(\gamma(F_k)). \quad (13)$$

Доказательство. Соотношения (12), (13) доказываются аналогично, поэтому достаточно доказать неравенство (12). Если $\lambda_0 = 0$ или $F_0 = 0$, то справедливо (12). Пусть $\lambda_0 > 0$ и $F_0 > 0$. На основании следствия 1 получаем

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \lambda_k \Phi(\gamma(|S_k - S|)) \leq A \lambda_{2^n} \Phi(\gamma(F_{2^n})) 2^n \leq 2A \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \lambda_k \Phi(\gamma(F_k)).$$

Тогда, представляя сумму в пакки по $k \in [2^n, 2^{n+1} - 1]$, имеем

$$\begin{aligned} H^{\Phi(\gamma)} &= \sum_{k=0}^1 \lambda_k \Phi(\gamma(|S_k - S|)) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \lambda_k \Phi(\gamma(|S_k - S|)) \leq \\ &\leq A \left\{ \sum_{k=1}^1 \lambda_k + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \lambda_k \Phi(\gamma(F_k)) \right\} \leq A_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \Phi(\gamma(F_k)). \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 следует такое утверждение.

Следствие 2. Пусть последовательность (F_n) , убывая, стремится к нулю, а γ принадлежит Φ и выполнено условие (10). Тогда для любого $\Phi \in \Phi_1$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \Phi(\gamma(|S_k - S|)) \leq \frac{A}{n+1} \sum_{k=0}^n \Phi(\gamma(F_k)). \quad (14)$$

Говорят, что ряд (1) сильно суммируем методом $\lambda \in \Lambda$ к числу S , если $\Phi \in \Phi$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n^{\Phi}(S, \lambda) = 0. \quad (15)$$

Теорема 3. Пусть $\Phi, \gamma \in \Phi$ и

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\gamma(u)}{\Phi(u)} < \infty. \quad (16)$$

Если выполнено равенство (15), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n^\gamma(S, \lambda) = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Заметим, что теорема 3 доказана в [6, с. 106], когда λ является методом средних арифметических. Для общих регулярных неотрицательных методов суммирования доказательство теоремы 3 проводится аналогично, однако, для полноты рассуждения, приведем его. Поскольку λ — регулярный положительный метод суммирования рядов, существует положительное число τ такое, что для любого n

$$\sum_{k \in N_0} \lambda_k^n \leq \tau.$$

В силу условия (16) существуют числа $\mu, M > 0$ такие, что для $u > M$

$$\gamma(u) \leq \mu\phi(u).$$

Поскольку $\lim_{u \rightarrow 0} \gamma(u) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $u \in [0, \delta]$ выполняется неравенство $\gamma(u) < \frac{\varepsilon}{\tau}$.

Введем обозначения

$$E_1 = \{k \in N_0 : |S_k - S| > M\}, \quad E_2 = \{k \in N_0 : \delta \leq |S_k - S| \leq M\},$$

$$E_3 = \{k \in N_0 : |S_k - S| < \delta\}.$$

Очевидно,

$$H_n^\gamma(S, \lambda) = \sum_1^3 \sum_{k \in E_j} \lambda_k^n \gamma(|S_k - S|) = \sum_1^3 I_j(n).$$

Ясно, что

$$I_1(n) \leq \mu \sum_{k \in E_1} \lambda_k^n \phi(|S_k - S|) \leq \mu H_n^\phi(S, \lambda).$$

Легко заметить, что

$$I_3(n) \leq \gamma(\delta) \sum_{k \in E_3} \lambda_k^n \leq \tau\gamma(\delta) < \varepsilon.$$

Далее, с одной стороны,

$$H_n^\phi(S, \lambda) \geq \sum_{k \in E_2} \lambda_k^n \phi(|S_k - S|) \geq \phi(\delta) \sum_{k \in E_2} \lambda_k^n,$$

а с другой —

$$I_2(n) \leq \gamma(M) \sum_{k \in E_2} \lambda_k^n.$$

Таким образом,

$$H_n^\gamma(S, \lambda) \leq \varepsilon + \left(\frac{\gamma(M)}{\varphi(\delta)} + \mu \right) H_n^\varphi(S, \lambda),$$

что и завершает доказательство теоремы 3.

Итак, при выполнении условий $\lambda \in \Lambda$, $\varphi, \gamma \in \Phi$ и соотношения (16) следует, что метод сильного суммирования (λ, φ) ряда (1) к S сильнее метода (λ, γ) .

Применим теорему 1 к сильному суммированию ортогональных разложений функции.

Пусть $L_p = \left\{ f : \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$, $f \in L_p$, $p \geq 1$, и ее ряд Фурье по тригонометрической системе функций имеет вид

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f, x), \quad (18)$$

где $A_k(f, x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx$ при $k > 0$, $A_0(f, x) = \frac{a_0}{2}$, а a_k, b_k — коэффициенты Фурье. Далее, пусть

$$S_n(f, x) = \sum_{k=0}^n A_k(f, x)$$

— частные суммы порядка n ряда (18), а $\rho_n(f, x) = f(x) - S_n(f, x)$ — соответствующее отклонение.

Рассмотрим (λ, φ) -сильные средние ряда (18) метода $\lambda \in \Lambda$ для $\varphi \in \Phi$:

$$h_n^\varphi(f, x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n \varphi(|\rho_k(f, x)|).$$

В работе [7] доказано следующее утверждение. Пусть $f \in L_p$, $p > 1$, и равномерно относительно $x \in E \subset [-\pi, \pi]$ выполнено соотношение

$$\phi_{p,x}(h) = \int_0^h |f(x+t) - f(x)|^p dt = o(h). \quad (19)$$

Тогда для любого $B \subset [n, 2n]$ равенство

$$\left\{ \frac{1}{r_n} \sum_{k \in B} |\rho_k(f, x)|^q \right\}^{\frac{1}{q}} = o\left(\ln \frac{ne}{r_n} \right) \quad (20)$$

выполняется равномерно по x при $n \rightarrow \infty$ на множестве E . Следовательно, величина

$$\varepsilon_m^{(q)}(f, E) = \sup_{n \geq m} \frac{1}{r_n} \sum_{k \in B} |\rho_k(f, x)|^q \left(\ln \frac{ne}{r_n} \right)^{-1}, \quad q \in (0, 1], \quad (21)$$

убывая, стремится к нулю. Кроме того, в [5] доказано, что если $f \in C$, $\gamma(u) = u^q$, $q \in (0, 1]$, то для любого $B \subset [n, 2n]$

$$\frac{1}{r_n} \sum_{k \in B} \gamma(|\rho_k(f, x)|) \leq A \gamma(E_n(f)) \ln \frac{ne}{r_n}, \quad (22)$$

где C — пространство 2π -периодических непрерывных функций, а $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше n .

Используя следствие 1 и полагая при этом $S_k = S_k(f, x)$ и $S = f(x)$, в силу соотношений (21), (22) убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 4. Пусть функция $\gamma(u) = u^q$, $q \in (0, 1]$, $\varphi \in \Phi_1$ и $\lambda \in \Lambda$. Тогда если $f \in L_p$, $p > 1$, и равенство (19) выполнено равномерно относительно x на множестве E , то

$$h_n^{\varphi(\gamma)}(f, x, \lambda) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n \varphi\left(\gamma\left(\varepsilon_k^{(q)}(f, E)\right)\right). \quad (23)$$

Если же $f \in C$, то

$$h_n^{\varphi(\gamma)}(f, x, \lambda) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n \varphi(\gamma(E_k(f))). \quad (24)$$

Из теоремы 4 следует такое утверждение.

Следствие 3. Пусть $\gamma(u) = u^q$, $q \in (0, 1]$, $\varphi(u) = \exp(u) - 1$. Тогда если $f \in L_p$, $p > 1$, и равенство (19) выполняется равномерно на множестве E , то

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \varphi(\gamma(|\rho_k(f, x)|)) \leq \frac{A}{n+1} \sum_{k=0}^n \varphi\left(\gamma\left(\varepsilon_k^{(1)}(f, E)\right)\right). \quad (25)$$

Если же $f \in C$, то

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \varphi(\gamma(|\rho_k(f, x)|)) \leq \frac{A}{n+1} \sum_{k=0}^n \varphi(\gamma(E_n(f))). \quad (26)$$

Следствие 4. Пусть функции $\gamma(u) = u^q$, $q \in (0, 1]$, $\varphi \in \Phi_1$ и $\lambda \in \Lambda$. Тогда если $f \in L_p$, $p > 1$, и равенство (19) выполнено равномерно на множестве E , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n^{\varphi(\gamma)}(f, x, \lambda) = 0 \quad (27)$$

выполняется равномерно по x на множестве E .

Если $\gamma(u) = u^q$, $q > 1$, то можно подобрать функцию $\varphi \in \Phi_1$ (например, $\varphi(u) = \exp(\beta u) - 1$, $\beta > 0$) такую, что условие (3) для сложной функции $\varphi(\gamma)$ не выполняется. Тогда гарантировать равенство (27) в условиях (19) нельзя. Однако при дополнительных условиях на функцию f можно получить из (19) соотношение (27).

Сначала убедимся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 5. Пусть функция $\gamma(u) = u^q$ при $q > 1$. Тогда существует функция $f_0 \in C$, удовлетворяющая в точке x_0 соотношению

$$Q^\gamma = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_{n, r_n}^\gamma(f_0, x_0) \left(\gamma(\varepsilon_n^{(1)}(f_0, x_0)) \ln \frac{ne}{r_n} \right)^{-1} = +\infty, \quad (28)$$

где

$$P_{n, r_n}^\gamma(f_0, x_0) = \frac{1}{r_n} \sum_{k \in B} \gamma(|\rho_k(f_0, x_0)|), \quad (29)$$

$$n \in N, \quad B \subset [n, 2n], \quad r = |B|.$$

Доказательство. Пусть функция $\varphi(u) = \exp(u) - 1$. Поскольку

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u^{-1} \ln \varphi(\gamma(u)) = \infty, \quad (30)$$

то на основании результатов работы [6, с. 109] существует функция $f_0 \in C$, для которой в некоторой точке x_0

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_{n, n+1}^{\varphi(\gamma)}(f_0, x_0) = \infty, \quad (31)$$

где

$$P_{n, n+1}^{\varphi(\gamma)}(f_0, x_0) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \varphi(\gamma(|\rho_k(f_0, x_0)|)).$$

Если $Q^\gamma < \infty$, то для любого $B \subset [n, 2n]$

$$P_{n, r_n}^\gamma(f_0, x_0) \left(\gamma(\varepsilon_n^{(1)}(f_0, x_0)) \ln \frac{ne}{r_n} \right)^{-1} < \infty.$$

Тогда на основании следствия 1 получаем

$$P_{n,n+1}^{\varphi(\gamma)}(f_0, x_0) \leq A\varphi\left(\gamma\left(\varepsilon_k^{(1)}(f_0, x_0)\right)\right).$$

Функция f_0 принадлежит C , тогда на основании равенств (20) и $\lim_{u \rightarrow 0} \varphi(\gamma(u)) = 0$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,n+1}^{\varphi(\gamma)}(f_0, x_0) = 0. \tag{32}$$

Соотношения (31), (32) выполняются одновременно, что невозможно.

Теорема 5 доказана.

Таким образом, условие непрерывности функции не обеспечивает выполнения неравенств (25), (26) при условии $\gamma(u) = u^q, q > 1, \varphi(u) = \exp(u) - 1$.

Пусть

$$\Phi_2 = \{ \varphi \in \Phi_1 : \varphi(u) \leq Au, u \in [0, \mu] \},$$

$$\Phi_3 = \left\{ \varphi \in \Phi_2 : \frac{\varphi(u)}{u} \geq \beta > 0 \right\}, \quad C_\mu = \{ f \in C : |\rho_k(f, x)| \leq \mu \}.$$

Ясно, что функции $\varphi(u) = u^q, q > 1$, и $\varphi(u) = \exp(qu) - 1, q > 0$, принадлежат множеству Φ_2 .

Теорема 6. Пусть функция $f \in L_p, p > 1, |\rho_k(f, x)| \leq \tau \quad \forall k \in N$ на множестве E и равномерно относительно $x \in E$ выполнено равенство (19). Тогда если $\gamma \in \Phi_2$, то для любого $B \subset [n, 2n]$

$$P_{n,r_n}^\gamma(f, x) \leq A\varepsilon_n^{(1)}(f, E) \ln \frac{ne}{r_n}. \tag{33}$$

Если же $f \in C_\tau, \gamma \in \Phi_3$, то для любого $B \subset [n, 2n]$

$$P_{n,r_n}^\gamma(f, x) \leq k2 A\gamma\left(\varepsilon_n^{(1)}(f, E)\right) \ln \frac{ne}{r_n}. \tag{34}$$

Из теоремы 6 следует такое утверждение.

Следствие 5. Пусть $f \in L_p, p > 1$, на множестве E равномерно относительно x выполняется (19) и $|\rho_k(f, x)| \leq \tau \quad \forall k \in N_0$. Тогда если $\gamma \in \Phi_3, \varphi \in \Phi_1$, то

$$P_{n,n+1}^{\varphi(\gamma)}(f, x) \leq A\varphi\left(\gamma\left(\varepsilon_n^{(1)}(f, E)\right)\right).$$

Теорема 7. Пусть функция $f \in C_\mu$. Тогда если $\gamma \in \Phi_2$, то для любого $B \subset [n, 2n]$

$$P_{n,r_n}^\gamma(f,x) \leq AE_n(f) \ln \frac{ne}{r_n}. \quad (35)$$

Если же $\gamma \in \Phi_3$, то для любого $B \subset [n, 2n]$

$$P_{n,r_n}^\gamma(f,x) \leq A\gamma(E_n(f)) \ln \frac{ne}{r_n}. \quad (36)$$

Докажем неравенство (34) (неравенства (33), (35) и (36) доказываются аналогично). Поскольку функция γ принадлежит Φ_2 , то, используя соотношение (21) при $q=1$, получаем

$$P_{n,r_n}^\gamma(f,x) \leq \frac{A}{r_n} \sum_{k \in B} |\rho_k(f,x)| \leq A\varepsilon_n^{(1)}(f,E) \ln \frac{ne}{r_n}.$$

С другой стороны, $\gamma \in \Phi_3$, поэтому $u \leq \beta\gamma(u)$. Тогда в силу предыдущего неравенства получаем соотношение (34).

Из теоремы 7 следует такое утверждение.

Следствие 6. Пусть $f \in C_\mu$, $\gamma \in \Phi_3$, $\varphi \in \Phi_1$, тогда

$$P_{n,n+1}^{\varphi(\gamma)}(f,x) \leq A\varphi(\gamma(E_n)).$$

Опираясь на заключения теорем 6 и 7, как при доказательстве теоремы 2, убеждаемся в справедливости следующих утверждений.

Теорема 8. Пусть $f \in L_p$, $p > 1$, на множестве E равенство (19) выполняется равномерно относительно x и $|\rho_k(f,x)| \leq \mu \quad \forall k \in N_0$. Если $\gamma \in \Phi_3$, $\varphi \in \Phi_1$, $\lambda \in \Lambda$, то имеет место неравенство (23).

Теорема 9. Пусть $f \in C_\mu$, $\gamma \in \Phi_3$, $\varphi \in \Phi_1$, $\lambda \in \Lambda$. Тогда имеет место неравенство (24).

Из теоремы 8 следует такое утверждение.

Следствие 7. Пусть $\varphi(u) = \exp((\exp(u)-1)-1)$, $f \in L_p$, $p > 1$, на множестве E равномерно относительно x выполняется соотношение (19) и $|\rho_k(f,x)| \leq \mu \quad \forall k \in N_0$. Если $\lambda \in \Lambda$, то равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n \varphi(|\rho_k(f,x)|) = o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (37)$$

выполняется равномерно на множестве E .

На основании теоремы 3, так как

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\exp(u^q) - 1}{\exp(\exp(u) - 1) - 1} = 0, \quad q > 0,$$

в силу следствия 7 получим такое утверждение.

Следствие 8. Пусть $\gamma(u) = \exp(u^q) - 1$, $q > 1$, $f \in L_p$, $p > 1$, на множестве E соотношение (19) выполняется равномерно и $|\rho_k(f, x)| \leq \mu \quad \forall k \in N_0$. Если $\lambda \in \Lambda$, то равномерно на E

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n \gamma(|\rho_k(f, x)|) = o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Отметим, что если в соотношении (19) множество E состоит из одной L_p -точки Лебега x функции f , в которой $|\rho_k(f, x)| \leq \mu \quad \forall k \in N_0$, то оценка (38) выполняется равномерно на множестве E при $\gamma(u) = \exp(u^q) - 1$, $q > 1$, хотя $\gamma \notin \Phi_1$.

Использованные в данной работе методы исследования и полученные результаты можно применить в других случаях. Например, для получения оценок (λ, φ) -сильных средних разложения функции по системам алгебраических полиномов, по системам функции полиномиального вида [8, с. 183] и др.

1. Hardy G. H., Littlewood J. E. Sur la serie de Fourier d'une fonction a carre summable // Comput. Revs. – 1913. – **156**. – P. 1307 – 1309.
2. Hardy G. H., Littlewood J. E. On the strong summability of Fourier series // Proc. London Math. Soc. – 1926. – **26**. – P. 273 – 286.
3. Leindler L. Strong approximation by Fourier series. – Budapest, 1985. – 210 p.
4. Ласурия Р. А. Сильная суммируемость рядов Фурье и аппроксимация функций. – Сухум: Абхаз. гос. ун-т, 2010. – 258 с.
5. Totik V. On the strong approximation of Fourier series // Acta Math. Acad. Sci. Hung. – 1980. – **35**. – P. 83 – 130.
6. Гоголадзе Л. Д. О суммировании кратных тригонометрических рядов и сопряженных функциях: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Тбилиси, 1984. – 256 с.
7. Пачулиа Н. Л. О точках сильной суммируемости рядов Фурье // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 12. – С. 1955 – 1964.
8. Алексич Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 359 с.

Получено 28.05.12,
после доработки — 07.12.14