УДК 552.13

В. П. Щедрик (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

КІЛЬЦЯ БЕЗУ СТАБІЛЬНОГО РАНГУ 1,5

A ring R has the stable range 1.5 if, for every triple of left relatively prime nonzero elements a, b, and c in R there exists r such that the elements $a + br$ and c are left relatively prime. Let R be a commutative Bezout domain. We prove that the matrix ring $M_2(R)$ is of the stable range 1.5 if and only if R has the same stable range.

Кольцо R имеет стабильный ранг 1,5, если для каждой тройки ненулевых взаимно простых слева элементов a, b, c этого кольца существует такое r, что элементы $a + br$, c взаимно просты слева. Пусть R — коммутативная область Безу. Доказано, что кольцо $M_2(R)$ имеет стабильный ранг 1,5 тогда и только тогда, когда кольцо R имеет тот же стабильный ранг.

1. Вступ. Поняття стабільного рангу кільця, як інструменту розв'язання деяких задач K-теорії, було введене Х. Бассом у 1964 р. [1]. Нагадаємо, що кільце R має стабільний ранг 2, якщо для довільних взаємно простих зліва елементів a, b, c з R існують такі r_1, r_2 з R, що елементи $a + cr_1$, $b + cr_2$ взаємно прості зліва. Якщо з лівої взаємної простоти елементів a, b випливає існування такого r, що $a + br$ є одиницею кільця R, то кажуть, що R має стабільний ранг 1. Прикладом кільця стабільного рангу 1 є $F[[x]]$ — кільце формальних степеневих рядів над полем F. Кільце цілих чисел, кільця головних ідеалів, комутативні області Безу (комутативні кільця без дільників нуля, в яких кожний скінченнопороджений ідеал є головним) мають стабільний ранг 2.

Методи, що ґрунтуються на понятті стабільного рангу, виявились досить ефективними і в теорії кілець, зокрема при розв'язанні відомої проблеми кілець елементарних дільників [2]. Так, доведено, що кільця елементарних дільників мають стабільний ранг не більше ніж 2 [3]. У роботах [4 – 8] показано, що кільця Безу, скінченний гомоморфний образ яких має стабільний ранг 1, є кільцями елементарних дільників. Окрім цього, через поняття стабільного рангу введено широко досліджувані комутативні чисті кільця [9], кільця з властивістю заміни [5], акуратні кільця [5]. Більш глибокі дослідження цього поняття спонукали до введення ідемпотентного [5, 9], одиничного [10] та акуратного [7] стабільних рангів.

У 1943 р. О. Хелмером було введено поняття адекватного кільця [11]. Під ним розуміється комутативна область Безу R, в якій для кожного ненульового елемента a і кожного елемента c існують такі елементи $r, d \in R$, що $a = rd$, причому r є взаємно простим із c, а кожний необоротний дільник d_i елемента d має необоротний спільний дільник із c. Прикладами адекватних кілець є комутативні області головних ідеалів. З іншого боку, кільце цілих аналітичних функцій є адекватним кільцем, проте не областю головних ідеалів.

Елементи адекватних кілець мають властивість А) *для кожної трійки ненульових взаємно простих елементів* a, b, c *існує таке* r, *що* $(a + br, c) = 1$. Легко переконатись, що шуканим елементом r буде елемент із розкладу $a = rd$, де r є взаємно простим із c, а кожний необоротний дільник d_i елемента d має необоротний спільний дільник із c.

Кільця з властивістю А мають деякі специфічні властивості, які притаманні лише їм. Це видно вже з того, як унімодулярний рядок над такими кільцями доповнюється до оборотної матриці. Так [12], якщо R — комутативна область Безу з властивістю А, то кожний рядок $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$, де $(a, b, c) = 1$, $a \neq 0$, доповнюється до оборотної матриці вигляду

$$\begin{bmatrix} u_1 & 0 & u_2 \\ 0 & 1 & u_3 \\ a & b & c \end{bmatrix}.$$

В свою чергу, комутативна область Безу з властивістю A, очевидно, має стабільний ранг 2, а над такими кільцями такий рядок доповнюється лише до оборотної матриці вигляду

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & v_4 & v_5 \\ a & b & c \end{bmatrix}.$$

Тому для більш глибокого вивчення таких кілець є сенс виділити їх в окремий клас.

Означення. *Будемо говорити, що кільце R має стабільний ранг* 1,5, *якщо для кожної трійки ненульових взаємно простих зліва елементів a, b, c із R існує таке $r \in R$, що елементи $a + br, c$ є взаємно простим зліва.*

Як було вже зазначено, комутативна область Безу з властивістю A має стабільний ранг 2. Обернене твердження є хибним. Так, кільце формальних степеневих рядів над полем раціональних чисел з цілим вільним членом має стабільний ранг 2, проте не є кільцем стабільного рангу 1,5.

Стабільний ранг кільця R $\big($в позначеннях $\mathrm{st.r.}(R)\big)$ тісно пов'язаний зі стабільним рангом кільця $M_n(R)$ $(n \times n)$-матриць над ним. Цей взаємозв'язок був встановлений Л. Васерштейном [13]:

$$\mathrm{st.r.}(M_n(R)) = 1 - \left[-\frac{\mathrm{st.r.}(R) - 1}{n}\right].$$

Тут символ $[*]$ означає цілу частину числа. Згідно з цією формулою, якщо $\mathrm{st.r.}(R)$ дорівнює 1 чи 2, то кільце $M_n(R)$ має аналогічний стабільний ранг.

У пропонованій статті показано, що кільце матриць другого порядку над комутативною областю Безу R стабільного рангу 1,5 успадковує цю властивість. А саме, якщо $\mathrm{st.r.}(R)$ =1,5, то і $\mathrm{st.r.}(M_2(R)) = 1{,}5$. Правильним буде і обернене твердження: якщо $\mathrm{st.r.}(M_2(R)) = 1{,}5$, де R — комутативна область Безу, то $\mathrm{st.r.}(R) = 1{,}5$.

2. Допоміжні результати. Нехай R — комутативна область елементарних дільників [14] з $1 \neq 0$. Тоді для кожної матриці A із $M_n(R)$ існують такі оборотні матриці P_A та Q_A, що

$$P_A A Q_A = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \mathrm{E}, \qquad \varepsilon_i \,|\varepsilon_{i+1}\ , \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Матрицю E називають формою Сміта, P_A та Q_A — лівими та правими перетворювальними матрицями матриці A. Іноді, для зручності, матрицю A будемо записувати у вигляді $A = P_A^{-1} \mathrm{E} Q_A^{-1}$.

Позначимо через $\mathbf{P}_A$ множину всіх лівих перетворювальних матриць A. Згідно з результатами робіт [15, 16] $\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_{\mathrm{E}} P_A$, де

$$\mathbf{G}_{\mathrm{E}} = \big\{H \in \mathrm{GL}_n(R) \mid \exists\, H_1 \in GL_n(R) \colon H\mathrm{E} = \mathrm{E}H_1\big\}.$$

Множина $\mathbf{G}_{\mathrm{E}}$ за структурою є мультиплікативною групою і складається з усіх оборотних матриць вигляду

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1,n-1} & h_{1n} \\ \varepsilon_2\varepsilon_1^{-1}h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2,n-1} & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_n\varepsilon_1^{-1}h_{n1} & \varepsilon_n\varepsilon_2^{-1}h_{n2} & \dots & \varepsilon_n\varepsilon_{n-1}^{-1}h_{n,n-1} & h_{nn} \end{bmatrix}.$$

Використавши теорему 5.1 із [14], легко показати, що комутативна область Безу стабільного рангу 1,5 є областю елементарних дільників.

Далі R — комутативна область Безу стабільного рангу 1,5.

Якщо $A = BC$, то матриця B називається лівим дільником матриці A, а матриця A — правим кратним матриці B. Якщо $A = DA_1$ та $B = DB_1$, то матриця D називається спільним лівим дільником матриць A та B. Окрім цього, якщо матриця D є правим кратним кожного спільного лівого дільника матриць A та B, то матрицю D називають **найбільшим спільним лівим дільником** матриць A та B і позначають $(A,B)_l$. На підставі теорем 3 із [17] і 3.8 із [14] найбільший спільний лівий дільник у кільці $M_n(R)$ визначено однозначно з точністю до правої асоційованості.

Символом $[a,b]$ будемо позначати н. с. к. елементів a, b, I — одинична матриця, $\left[s_{ij}\right]_2$ — матрицю другого порядку з елементами s_{ij}.

Теорема 1. *Нехай* A, B — *матриці з* $M_2(R)$, *які мають, відповідно, форми Сміта* $\mathrm{E} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \delta_2)$ *і* $P_B P_A^{-1} = \left[s_{ij}\right]_2 = S$. *Для того щоб* $(A,B)_l = I$, *необхідно та достатньо, щоб* $\left(\varepsilon_2, \delta_2, [\varepsilon_1, \delta_1] s_{21}\right) = 1$.

Доведення. Розглянемо матрицю $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$. Для неї існує така оборотна матриця U, що

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} D & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

де $D \in M_2(R)$. На підставі теореми 23.1 із [18] $(A,B)_l = D$. Справджуються рівності

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1} & P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1} \end{bmatrix} = P_B^{-1}\begin{bmatrix} P_B P_A^{-1}\mathrm{E} & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_A^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_B^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$= P_B^{-1}\begin{bmatrix} S\mathrm{E} & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_A^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_B^{-1} \end{bmatrix}.$$

Домножимо цю рівність справа на U:

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} D & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \left(P_B^{-1}\right)\begin{bmatrix} S\mathrm{E} & \Delta \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} Q_A^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_B^{-1} \end{bmatrix} U \right).$$

Звідси випливає, що

$$\begin{bmatrix} S\mathrm{E} & \Delta \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} P_B D & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

де V — оборотна матриця. Отже, $(S\mathrm{E}, \Delta)_l = P_B D = P_B (A,B)_l$. Оскільки $P_B \in \mathrm{GL}_2(R)$, то $(A,B)_l = I$ тоді і тільки тоді, коли $(S\mathrm{E}, \Delta)_l = I$. А це рівносильно тому, що н. с. д. μ мінорів

2-го порядку матриці

$$\begin{bmatrix} SE & \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}\varepsilon_1 & s_{12}\varepsilon_2 & \delta_1 & 0 \\ s_{21}\varepsilon_1 & s_{22}\varepsilon_2 & 0 & \delta_2 \end{bmatrix}$$

дорівнює одиниці. Зауваживши, що s_{ij} є елементами оборотної матриці S, отримуємо

$$\mu = (\varepsilon_1\varepsilon_2, \delta_1\delta_2, \varepsilon_1\delta_2 s_{11}, \varepsilon_2\delta_2 s_{12}, \varepsilon_1\delta_1 s_{21}, \varepsilon_2\delta_1 s_{22}) =$$

$$= \left(\varepsilon_1\varepsilon_2, \delta_1\delta_2, \varepsilon_1\delta_2\left(s_{11}, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}s_{12}\right), \varepsilon_1\delta_1\left(s_{21}, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}s_{22}\right)\right) =$$

$$= \left(\varepsilon_1\varepsilon_2, \delta_1\delta_2, \varepsilon_1\delta_2\left(s_{11}, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right), \varepsilon_1\delta_1\left(s_{21}, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\right) =$$

$$= \left(\varepsilon_1\varepsilon_2, \delta_1\delta_2, \varepsilon_1\delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\left(s_{11}, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right), s_{21}, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\right) =$$

$$= \left(\varepsilon_1\varepsilon_2, \delta_1\delta_2, \varepsilon_1\delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}s_{11}, \frac{\delta_2\varepsilon_2}{\delta_1\varepsilon_1}, s_{21}, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\right) =$$

$$= \left(\varepsilon_1\varepsilon_2, \delta_1\delta_2, \varepsilon_1\delta_1\left(\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}s_{11}, s_{21}\right), \left(\frac{\delta_2\varepsilon_2}{\delta_1\varepsilon_1}, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\right)\right) = \left(\varepsilon_1\varepsilon_2, \delta_1\delta_2, \varepsilon_1\delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}, s_{21}, \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\right) =$$

$$= (\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \varepsilon_2\delta_1, \delta_1\delta_2, \varepsilon_1\delta_2, \varepsilon_1\delta_1 s_{21}) =$$

$$= (\varepsilon_1, \delta_1)\left(\varepsilon_2\left(\frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1, \delta_1)}, \frac{\delta_1}{(\varepsilon_1, \delta_1)}\right), \delta_2\left(\frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1, \delta_1)}, \frac{\delta_1}{(\varepsilon_1, \delta_1)}\right), \frac{\varepsilon_1\delta_1}{(\varepsilon_1, \delta_1)}s_{21}\right) =$$

$$= (\varepsilon_1, \delta_1)\big(\varepsilon_2, \delta_2, [\varepsilon_1, \delta_1]s_{21}\big).$$

Таким чином, для того щоб $(A, B)_l = I$, необхідно та достатньо, щоб

$$\big(\varepsilon_1, \delta_1\big)\,(\varepsilon_2, \delta_2, [\varepsilon_1, \delta_1]s_{21}) = 1. \tag{1}$$

Оскільки $(\varepsilon_1, \delta_1)$ є дільником $(\varepsilon_2, \delta_2, [\varepsilon_1, \delta_1]s_{21})$, то рівність (1) рівносильна умові $\big(\varepsilon_2, \delta_2, [\varepsilon_1, \delta_1]s_{21}\big) = 1$.

Для завершення доведення теореми скористаємося лемою 2 із [19], з якої випливає, що $\big(\varepsilon_2, \delta_2, [\varepsilon_1, \delta_1]s_{21}\big)$ не залежить від вибору матриць P_A та P_B.

Теорему 1 доведено.

Легко переконатися, що справджуються наступні наслідки.

***Наслідок* 1.** *Якщо* $\varepsilon_2 = 0$, $\delta_2 \neq 0$, *то* $(A, B)_l = I$ *тоді і тільки тоді, коли* $\delta_1 = 1$ *і* $(\delta_2, \varepsilon_1 s_{21}) = 1$.

***Наслідок* 2.** *Якщо* $\varepsilon_2, \delta_2 = 0$, *то* $(A, B)_l = I$ *тоді і тільки тоді, коли* $\varepsilon_1\delta_1 s_{21}$ *є оборотним елементом кільця* R.

***Наслідок* 3.** *Якщо* $(A, B)_l = I$ *і* $s_{21} = 0$, *то матриці* A, B *є неособливими, причому* $(\det A, \det B) = 1$.

Теорема 2. *Нехай* $A, B \in M_2(R)$ *і принаймні одна із них є неособливою матрицею. Тоді множина* $\mathbf{P}_B\mathbf{P}_A^{-1}$ *містить нижню унітрикутну матрицю.*

Доведення. Збережемо позначення теореми 1. Оскільки $\mathbf{P}_B = \mathbf{G}_\Delta P_B, \mathbf{P}_A = \mathbf{G}_{\mathrm{E}} P_A$, то

$$\mathbf{P}_B\mathbf{P}_A^{-1} = \mathbf{G}_\Delta P_B(\mathbf{G}_{\mathrm{E}} P_A)^{-1} = \mathbf{G}_\Delta P_B P_A^{-1}\mathbf{G}_{\mathrm{E}} = \mathbf{G}_\Delta S\mathbf{G}_{\mathrm{E}}.$$

Таким чином, домножуючи матрицю $P_B P_A^{-1} = S$ зліва на елементи групи $\mathbf{G}_\Delta$ і справа на елементи групи $\mathbf{G}_{\mathrm{E}}$, ми залишаємося в межах множини $\mathbf{P}_B\mathbf{P}_A^{-1}$.

Позначимо через $U_2^{\mathrm{up}}(R)$ та $U_2^{\mathrm{lw}}(R)$ групи верхніх та нижніх унітрикутних (2×2)-матриць над R відповідно. Нехай $\det\Delta \neq 0$. На підставі теореми 1 із [20]

$$\mathrm{GL}_2(R) = \mathbf{G}_\Delta U_2^{\mathrm{lw}}(R)U_2^{\mathrm{up}}(R).$$

Оскільки $S \in \mathrm{GL}_2(R)$, то $S = HUV$, де $H \in \mathbf{G}_\Delta, U \in U_2^{\mathrm{lw}}(R),\ V \in U_2^{\mathrm{up}}(R)$. Отже, $U = H^{-1}SV^{-1}$. Зауважуючи, що $H^{-1} \in \mathbf{G}_\Delta$, $V^{-1} \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$, приходимо до висновку, що $U \in \mathbf{P}_B\mathbf{P}_A^{-1}$.

Нехай $\det \mathrm{E} \neq 0$. Тоді виконується рівність $\mathrm{GL}_2(R) = \mathbf{G}_{\mathrm{E}} U_2^{\mathrm{lw}}(R)U_2^{\mathrm{up}}(R)$. Перейшовши до оборотних матриць, отримаємо $\mathrm{GL}_2(R) = U_2^{\mathrm{up}}(R)U_2^{\mathrm{lw}}(R)\mathbf{G}_{\mathrm{E}}$, тобто $S = MNK$, де $M \in U_2^{\mathrm{up}}(R)$, $N \in U_2^{\mathrm{lw}}(R)$, $K \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$. Отже, $N = M^{-1}SK^{-1}$. Оскільки $U_2^{\mathrm{up}}(R) \subset \mathbf{G}_\Delta$, то $M^{-1} \in \mathbf{G}_\Delta$. Оскільки $K^{-1} \in U_2^{\mathrm{up}}(R)$, приходимо до висновку, що $N \in \mathbf{P}_B\mathbf{P}_A^{-1}$.

Теорему 2 доведено.

Нагадаємо, що матриці M і N називають еквівалентними і позначають $M \sim N$, якщо існують такі оборотні матриці U, V, що $M = UNV$.

Теорема 3. *Нехай матриці* A, B *мають, відповідно, форми Сміта* E, Δ, *причому* $AB \sim \mathrm{E}\Delta$. *Тоді* $\mathbf{P}_{AB} \subseteq \mathbf{P}_A$.

Доведення. На підставі теореми із [21] $AB \sim \mathrm{E}\Delta$ тоді і тільки тоді, коли матрицю $Q_A^{-1}P_B^{-1}$ можна записати у вигляді $Q_A^{-1}P_B^{-1} = K_1K_2$, де $K_1 \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}^t$, тобто $\mathrm{E}K_1 = L_1\mathrm{E}$, де $L_1 \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$ і $K_2 \in \mathbf{G}_\Delta$. Тоді

$$AB = P_A^{-1}\mathrm{E}\big(Q_A^{-1}P_B^{-1}\big)\Delta Q_B^{-1} = P_A^{-1}\mathrm{E}K_1K_2\Delta Q_B^{-1} = \big(L_1^{-1}P_A\big)^{-1}\mathrm{E}\Delta\big(Q_BL_2^{-1}\big)^{-1}.$$

Це означає, що $L_1^{-1}P_A \in \mathbf{P}_{AB}$. Отже, $\mathbf{P}_{AB} = \mathbf{G}_{\mathrm{E}\Delta}\big(L_1^{-1}P_A\big)$. В свою чергу $\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_{\mathrm{E}}P_A$. Зауважуючи, що $L_1^{-1} \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$, отримуємо

$$\mathbf{G}_{\mathrm{E}}\big(L_1^{-1}P_A\big) = \big(\mathbf{G}_{\mathrm{E}}L_1^{-1}\big)P_A = \mathbf{G}_{\mathrm{E}}P_A = \mathbf{P}_A.$$

Оскільки $\mathbf{G}_{\mathrm{E}\Delta} \subseteq \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$, то приходимо до висновку, що $\mathbf{P}_{AB} \subseteq \mathbf{P}_A$.

Теорему 3 доведено.

3. Основні результати.

Теорема 4. *Нехай* A, B — *ненульові взаємно прості зліва матриці із* $M_2(R)$. *Тоді якщо матриця* A *є особливою, то існує така матриця* T, *що* $A + BT \in \mathrm{GL}_2(R)$. *Якщо ж матриця* A *є неособливою, то для кожного фіксованого* $\varphi \neq 0$ *із* R *існує така матриця* F_φ, *що* $A + BF_\varphi \sim \mathrm{diag}(1, \mu)$, *причому* $(\mu, \varphi) = 1$.

Для доведення теореми нам потрібні наступні твердження.

Лема 1. *Матриці* $(A, B)_l$ *та* $P_B^{-1}\big(P_BP_A^{-1}\mathrm{E}, \Delta\big)_l$ *асоційовані справа.*

Доведення. Позначимо $P_BP_A^{-1} = S$. Як було зазначено при доведенні теореми 1, $(S\mathrm{E}, \Delta)_l = D$, де

$$\begin{bmatrix} S\mathrm{E} & \Delta \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} D & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$U \in \mathrm{GL}_4(R)$. Домножаючи цю рівність зліва на P_B^{-1}, отримуємо

$$\begin{bmatrix} P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1} & P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} Q_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_B \end{bmatrix} U \right) = \begin{bmatrix} P_B^{-1}D & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

тобто $(A, B)_l = P_B^{-1}D = P_B^{-1}(S\mathrm{E}, \Delta)_l$.

Лема 2. *Матриці* $P_BP_A^{-1}\mathrm{E} + \Delta V$ *та* $A + B(Q_BVQ_A^{-1})$ *є еквівалентними.*

Доведення. Дійсно,

$$A + B\big(Q_BVQ_A^{-1}\big) = P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1} + P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1}(Q_BVQ_A^{-1}) = P_B^{-1}(P_BP_A^{-1}\mathrm{E} + \Delta V)Q_A^{-1}.$$

***Доведення теореми* 4.** Нехай $\det A = 0$, тобто $A = P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}$, $\mathrm{E} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1,\ 0)$. На підставі наслідку 1 матриця B має вигляд $B = P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1}$, $\Delta = \mathrm{diag}(1, \delta_2)$. Нехай $V = \big[v_{ij}\big]_2$ — параметрична матриця.

Оскільки $(A, B)_l = I$, то з леми 1 випливає, що і $(S\mathrm{E}, \Delta)_l = I$.

1. Нехай $\delta_2 \neq 0$. Згідно з теоремою 2 матриці P_A, P_B можна вибрати таким чином, що

$$P_BP_A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix} = S.$$

Враховуючи, що $P_{S\mathrm{E}} = S^{-1}$ і $P_\Delta = I$, отримуємо

$$P_{S\mathrm{E}}P_\Delta^{-1} = S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{bmatrix}.$$

Оскільки $(S\mathrm{E}, \Delta)_l = I$, то на підставі наслідку 1

$$(\delta_2, -s\varepsilon_1) = 1 \Rightarrow (\delta_2, s\varepsilon_1) = 1.$$

Розглянемо рівність

$$S\mathrm{E} + \Delta V = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 + v_{11} & v_{12} \\ s\varepsilon_1 + v_{21}\delta_2 & v_{22}\delta_2 \end{bmatrix}.$$

Покладемо $v_{21}^0 = 0$, $v_{22}^0 = 1$. Існують такі m, n, що $m\delta_2 - ns\varepsilon_1 = 1$. Покладемо $v_{11}^0 = m - \varepsilon_1$, $v_{12}^0 = n$. Матрицю $\big[v_{ij}^0\big]_2$ позначимо через V^0. Отримана матриця $S\mathrm{E} + \Delta V^0$ є оборотною. На підставі леми 2 $A + BU \in \mathrm{GL}_2(R)$, де $U = Q_BV^0Q_A^{-1}$.

2. Нехай $\delta_2 = 0$ і $P_BP_A^{-1} = \big[s_{ij}\big]_2 = S$. Тоді

$$S\mathrm{E} + \Delta V = \begin{bmatrix} s_{11}\varepsilon_1 + v_{11} & v_{12} \\ s_{21}\varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Оскільки

$$S^{-1} = e^{-1}\begin{bmatrix} s_{22} & -s_{12} \\ -s_{21} & s_{11} \end{bmatrix},$$

де $e = \det S \in U(R)$, то, враховуючи попередні міркування, на підставі наслідку 2 отримуємо

$$-e\varepsilon_1 s_{21} \in U(R) \Rightarrow \varepsilon_1 s_{21} \in U(R).$$

Покладемо

$$V^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тоді $S\mathrm{E} + \Delta V^0 \in \mathrm{GL}_2(R)$. Згідно з лемою 2 існує така матриця T, що $A + BT \in \mathrm{GL}_2(R)$.

3. Нехай $\det A \neq 0, \det B \neq 0$. Виберемо матриці P_A, P_B таким чином, що

$$P_B P_A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix} = S.$$

У параметричній матриці V покладемо $v_{22} = 0$. Розглянемо рівність

$$S\mathrm{E} + \Delta V = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 + \delta_1 v_{11} & \delta_1 v_{12} \\ s\varepsilon_1 + v_{21}\delta_2 & \varepsilon_2 \end{bmatrix}.$$

Оскільки $(\varepsilon_1, \delta_1) | (\varepsilon_2, \delta_2, [\varepsilon_1, \delta_1]s)$, то $(\varepsilon_1, \delta_1) = 1$. Тому

$$\big(\varepsilon_2, \delta_2, [\varepsilon_1, \delta_1]s\big) = (\varepsilon_2, \delta_2, \varepsilon_1\delta_1 s) = 1. \tag{2}$$

Оскільки $\delta_1 | \delta_2$, то і $(\varepsilon_2, \delta_1\delta_2, \varepsilon_1\delta_1 s) = 1$. Існує таке u, що $(\varepsilon_1\delta_1 s + \delta_1\delta_2 u, \varepsilon_2) = 1$. Покладемо $v_{21}^0 = u$, $v_{22}^0 = 0$. Тоді

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 s + \delta_2 v_{21}^0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \varepsilon_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Із (2) випливає, що $(\varepsilon_1\varepsilon_2, \delta_1) = 1$. Тоді для довільного $\varphi \neq 0$ із R також $(\varepsilon_1\varepsilon_2, \delta_1, \varphi) = 1$. Отже, існує таке r, що $(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \delta_1 r, \varphi) = 1$. Знайдуться такі p, q, що

$$p(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \delta_1 r) + q\varphi = 1.$$

У параметричні матриці V покладемо $v_{21} = v_{22} = 0$. Розглянемо

$$\det\begin{bmatrix} \varepsilon_1 + \delta_1 v_{11} & \delta_1 v_{12} \\ a & \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \delta_1(\varepsilon_2 v_{11} - a v_{12}).$$

Оскільки $(a, \varepsilon_2) = 1$, то існують такі v_{11}^0, v_{12}^0, що $\varepsilon_2 v_{11}^0 - a v_{12}^0 = r$. Позначимо $\big[v_{ij}^0\big]_2 = V^0$. Тоді $\big(\det(S\mathrm{E} + \Delta V^0), \varphi\big) = 1$, причому з (3) випливає, що

$$S\mathrm{E} + \Delta V^0 \sim \operatorname{diag}(1, \mu), \qquad \mu = \det(S\mathrm{E} + \Delta V^0).$$

Для завершення розгляду цього випадку достатньо скористатись лемою 2.

4. Нехай $\det A \neq 0, \det B = 0$. У цьому випадку

$$A = P_A^{-1} \mathrm{E} Q_A^{-1}, \qquad \mathrm{E} = \operatorname{diag}(1, \varepsilon_2), \qquad B = P_B^{-1} \Delta Q_B^{-1},$$

$$\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, 0), \qquad P_B P_A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix} = S.$$

Розглянемо рівність

$$S\mathrm{E} + \Delta V = \begin{bmatrix} 1 + \delta_1 v_{11} & \delta_1 v_{12} \\ s & \varepsilon_2 \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\det(S\mathrm{E} + \Delta V) = \varepsilon_2 + \big(v_{11}\varepsilon_2 - s v_{12}\big)\delta_1.$$

Оскільки $(S\mathrm{E}, \Delta)_l = I$, то на підставі наслідку 1

$$(\varepsilon_2, -\delta_1 s) = (\varepsilon_2, \delta_1 s) = 1. \tag{4}$$

Тому $(\varepsilon_2, \delta_1) = 1$. Тоді для довільного $\varphi \neq 0$ із R $(\varepsilon_2, \delta_1, \varphi) = 1$. Отже, існує таке d, що $(\varepsilon_2 + \delta_1 d, \varphi) = 1$. З рівності (4) випливає, що $(\varepsilon_2, s) = 1$. Виберемо такі v_{11}^0, v_{12}^0, що $v_{11}^0 \varepsilon_2 - s v_{12}^0 = d$. Позначимо $\begin{bmatrix} v_{11}^0 & v_{12}^0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = V^0$. Тоді $\big(\det(S\mathrm{E} + \Delta V^0), \varphi\big) = 1$. Отже, згідно з лемою 2 $A + B(Q_B V^0 Q_A^{-1}) \sim \operatorname{diag}(1, \nu)$, де $(\nu, \varphi) = 1$.

Теорему 4 доведено.

***Наслідок* 4.** *Нехай A, B — ненульові взаємно прості зліва матриці із $M_2(R)$ і C — неособлива матриця. Тоді існує така матриця F_C, що $\big(\det(A + BF_C), \det C\big) = 1$.*

Лема 3. *Нехай A, $B \in M_2(R)$. Тоді існують такі A_1, B_1, що $A = (A, B)_l A_1$, $B = (A, B)_l B_1$, причому $(A_1, B_1)_l = I$.*

Доведення. Нехай $(A, B)_l$ — неособлива матриця і $(A_1, B_1)_l = D \notin \mathrm{GL}_2(R)$. Отже, $(A, B)_l D$ є лівим спільним дільником матриць A та B. Згідно з означенням лівого спільного дільника матриця $(A, B)_l D$ є лівим дільником матриці $(A, B)_l$:

$$(A, B)_l = (A, B)_l D U$$

для деякої матриці U, тобто $(A, B)_l (I - DU) = \mathbf{0}$. Оскільки $(A, B)_l$ — неособлива матриця, то $DU = I$, тобто $D \in \mathrm{GL}_2(R)$. Отримали суперечність.

Нехай $(A, B)_l$ — особлива матриця. Отже, матриці A та B також є особливими і мають вигляд

$$A = P_A^{-1} \mathrm{E} Q_A^{-1}, \qquad \mathrm{E} = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, 0), \qquad B = P_B^{-1} \Delta Q_B^{-1}, \qquad \Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, 0).$$

З теореми 1 випливає, що матриця $(A, B)_l$ є особливою тоді і тільки тоді, коли $s_{21} = 0$, де $P_B P_A^{-1} = S = \big[s_{ij}\big]_2$, тобто $P_B P_A^{-1} \in \mathbf{G}_\mathrm{E} = \mathbf{G}_\Delta$ — група оборотних верхніх трикутних матриць. Це означає, що $\mathbf{P}_B \cap \mathbf{P}_A \neq \varnothing$. Нехай $P \in \mathbf{P}_B \cap \mathbf{P}_A$. Тобто матриці A та B мають вигляд $A = P^{-1} \mathrm{E} Q_A^{-1}$, $B = P^{-1} \Delta Q_B^{-1}$. Тоді розклад матриць на множники

$$A = \left(P^{-1}\begin{bmatrix}(\varepsilon_1,\delta_1) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1,\delta_1)} & 0\\ u & 0\end{bmatrix}Q_A^{-1}\right),$$

$$B = \left(P^{-1}\begin{bmatrix}(\varepsilon_1,\delta_1) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}\frac{\delta_1}{(\varepsilon_1,\delta_1)} & 0\\ v & 0\end{bmatrix}Q_B^{-1}\right),$$

де

$$\frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1,\delta_1)}v - \frac{\delta_1}{(\varepsilon_1,\delta_1)}u = 1,$$

і буде шуканим.

Лему 3 доведено.

Теорема 5. *Нехай R — комутативна область Безу. Для того щоб кільце $M_2(R)$ мало стабільний ранг* 1,5, *необхідно та достатньо, щоб кільце R мало стабільний ранг* 1,5.

Доведення. *Достатність*. Нехай A, B, C — ненульові взаємно прості зліва матриці із $M_2(R)$.

1. Нехай $\det A = 0$ і $(A,B)_l = D$. Тоді $A = DA_1, B = DB_1$. На підставі леми 3 матриці A_1, B_1 можна вибрати таким чином, що $(A_1,B_1)_l = I$. Тоді, якщо матриця D неособлива, матриця A_1 є особливою. Якщо ж матриця D особлива, то, як випливає із доведення теореми 1, матрицю A_1 також можна вибрати особливою. Отже, вважатимемо, що $\det A_1 = 0$.

Використавши теорему 4, знайдемо таке T, що $A_1 + B_1T = U \in \mathrm{GL}_2(R)$. Оскільки $P_D = P_{DU}$, а також $(D,C)_l = I$, із теореми 1 випливає, що $(A+BT,C)_l = I$.

2. Нехай $\det A \neq 0$, $\det C \neq 0$ і $(A,B)_l = I$. На підставі наслідку 4 існує така матриця T, що

$$\big(\det(A+BT), \det C\big) = 1.$$

Тоді $(A+BT,C)_l = I$.

Нехай $(A,B)_l = D \neq I$. Отже, $A = DA_1, B = DB_1$, де

$$D = P_D^{-1}\Gamma Q_D^{-1}, \qquad \Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1,\gamma_2), \qquad C = P_C^{-1}\Omega Q_C^{-1}, \qquad \Omega = \mathrm{diag}(\omega_1,\omega_2).$$

Згідно з наслідком 4 існує така матриця L, що

$$\big(\det(A_1 + B_1L), \det D \det C\big) = 1. \tag{5}$$

Звідси випливає, що $(A_1 + B_1L, C)_l = I$. Розглянемо матрицю $D(A_1 + B_1L) = F$. Нехай $\Psi = \mathrm{diag}(\psi_1,\psi_2)$ — форма Сміта матриці $A_1 + B_1L$. Зважаючи на (5) та використовуючи наслідок 1 із [21], отримуємо

$$F = D(A_1 + B_1L) \sim \Delta\Psi = \mathrm{diag}(\gamma_1\psi_1, \gamma_2\psi_2) = \Gamma.$$

На підставі теореми 3 $\mathbf{P}_F \subseteq \mathbf{P}_D$. Це означає, що матрицю F можна записати у вигляді $F = P_D^{-1}\Gamma Q_F^{-1}$. З огляду на (5) отримуємо

$$(\psi_1\psi_2, \gamma_1\gamma_2) = (\psi_1\psi_2, \omega_1\omega_2) = 1.$$

Отже,

$$(\psi_2, \omega_2) = (\psi_1, \omega_1) = (\psi_1, \omega_2) = 1.$$

Нехай $P_D P_C^{-1} = \left[s_{ij}\right]_2$. Розглянемо

$$\big(\psi_2\gamma_2, \omega_2, [\psi_1\gamma_1, \omega_1]s_{21}\big) = \left((\psi_2\gamma_2, \omega_2), \frac{\psi_1\gamma_1\omega_1}{(\psi_1\gamma_1, \omega_1)}s_{21}\right) = \left(\gamma_2, \omega_2, \frac{\psi_1\gamma_1\omega_1}{(\gamma_1, \omega_1)}s_{21}\right) =$$

$$= \left(\gamma_2, \omega_2, \frac{\gamma_1\omega_1}{(\gamma_1, \omega_1)}\psi_1 s_{21}\right) = \big(\gamma_2, (\omega_2, [\gamma_1, \omega_1]\psi_1)s_{21}\big) = \big(\gamma_2, \omega_2, [\gamma_1, \omega_1]s_{21}\big).$$

Оскільки $(D, C)_l = I$, то $\big(\gamma_2, \omega_2, [\gamma_1, \omega_1]s_{21}\big) = 1$. Таким чином,

$$\big(\psi_2\gamma_2, \omega_2, [\psi_1\gamma_1, \omega_1]s_{21}\big) = 1,$$

а це означає, що $\big(D(A_1 + B_1 L), C\big)_l = I$, тобто $(A + BL, C)_l = I$.

3. Нехай $\det A \neq 0, \det C = 0$. Отже, $C = P_C^{-1}\Omega Q_C^{-1}$, $\Omega = \operatorname{diag}(\omega_1, 0)$. Спершу розглянемо випадок, коли $(A, B)_l = D \neq I$, тобто $D = P_D^{-1}\Gamma Q_D^{-1}, \Gamma = \operatorname{diag}(1, \gamma_2)$. Оскільки $(D, C)_l = I$, то

$$(\gamma_2, \omega_1 s) = 1, \tag{6}$$

де $P_D P_C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}$. Тоді $s \neq 0$. На підставі теореми 4 існує така матриця K, що $A_1 + B_1 K \sim \sim \operatorname{diag}(1, \mu)$, де $(\mu, \omega_1 s \det D) = 1$. Оскільки $(\mu, \det D) = 1$, то за аналогією з випадком 2 показуємо, що

$$A + BK = D(A_1 + B_1 K) \sim P_D^{-1} \operatorname{diag}(1, \gamma_2\mu).$$

Оскільки також $(\mu, \omega_1 s) = 1$, то із (6) отримуємо, що $(\mu\gamma_2, \omega_1 s) = 1$. А це означає, що $(A + + BK, C)_l = I$.

Нехай $(A, B)_l = I$. Виберемо матриці P_A та P_B так, що $P_B P_A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$. Спершу розглянемо випадок, коли $c \neq 0$. Позначимо $P_B P_C^{-1} = \left[p_{ij}\right]_2$. З рівності $(\varepsilon_1, \delta_1) = 1$ випливає, що і $(\varepsilon_1, \delta_1, \varepsilon_1\delta_1 c) = 1$. Виберемо елемент t_{11} таким чином, що

$$(\varepsilon_1 + \delta_1 t_{11}, \varepsilon_1\delta_1 c) = 1, \tag{7}$$

причому

$$\det \begin{bmatrix} \varepsilon_1 + \delta_1 t_{11} & p_{11} \\ \varepsilon_1 c & p_{21} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Це можна зробити, тому що рівняння

$$\det \begin{bmatrix} \varepsilon_1 + \delta_1 x & p_{11} \\ \varepsilon_1 c & p_{21} \end{bmatrix} = 0$$

відносно змінної x має не більше одного розв'язку, а елементів, які задовольняють рівність (7), є більше. Так, кожний елемент суміжного класу $t_{11}+(\varepsilon_1\delta_1 c)R$ також буде задовольняти рівність (7).

Оскільки $(A,B)_l=I$, то $(\varepsilon_2,\delta_2,\varepsilon_1\delta_1 c)=1$. Тому знайдеться таке t_{22}, що

$$(\varepsilon_2+\delta_2 t_{22},\varepsilon_1\delta_1 c)=1.$$

Якщо $\delta_2=0$, то можемо покласти $t_{22}=0$, оскільки $(\varepsilon_2,\varepsilon_1\delta_1 c)=1$. Таким чином, $(ab,\varepsilon_1\delta_1 c)= =1$, де $a=\varepsilon_1+\delta_1 t_{11}, b=\varepsilon_2+\delta_2 t_{22}$. Отже, і

$$\left(ab,\varepsilon_1\delta_1 c,\det\begin{bmatrix} a & p_{11}\\ \varepsilon_1 c & p_{21}\end{bmatrix}\omega\right)=1.$$

Тому існує таке t_{12}, що

$$\left(ab-\varepsilon_1\delta_1 c t_{12},\det\begin{bmatrix} a & p_{11}\\ \varepsilon_1 c & p_{21}\end{bmatrix}\omega\right)=1.$$

Звідси випливає, що

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1+\delta_1 t_{11} & \delta_1 t_{12} & \omega p_{11} & 0\\ \varepsilon_1 c & \varepsilon_2+\delta_2 t_{22} & \omega p_{21} & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} I & 0\end{bmatrix}.$$

Отже,

$$\left(P_B P_A^{-1}\mathrm{E}+\Delta\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12}\\ 0 & t_{22}\end{bmatrix}, P_B P_C^{-1}\Omega\right)_l=I.$$

Тоді і

$$\left(P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1}+P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1}\left(Q_B\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12}\\ 0 & t_{22}\end{bmatrix}\right),\ P_C^{-1}\Omega Q_C^{-1}\right)_l=(A+BU,C)_l=I,$$

де $U=Q_B\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12}\\ 0 & t_{22}\end{bmatrix}$.

На завершення залишилося розглянути випадок, коли $(A,B)_l=I$, причому $P_B P_A^{-1}=I$, тобто $P_A=P_B$. На підставі наслідку 3 матриці A,B є неособливими і $(\det A,\det B)=1$. Отже, $(\varepsilon_1\varepsilon_2,\delta_1\delta_2)=1$. Звідси випливає, що $(\varepsilon_1,\delta_1,\omega)=1$ і $(\varepsilon_2,\delta_2,\omega)=1$. Виберемо q_{11}, q_{22} таким чином, що

$$(\varepsilon_1+\delta_1 q_{11},\omega)=1,(\varepsilon_2+\delta_2 q_{22},\omega)=1.$$

Звідси випливає, що

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1+\delta_1 t_{11} & 0 & \omega p_{11} & 0\\ 0 & \varepsilon_2+\delta_2 q_{22} & \omega p_{21} & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} I & 0\end{bmatrix},$$

де $P_B P_C^{-1}=\begin{bmatrix} p_{ij}\end{bmatrix}_2$. Звідси отримуємо $(A+BV,C)_l=I$, де $V=Q_B\,\mathrm{diag}(q_{11},q_{22})$.

Достатність доведено.

Необхідність. Нехай R — комутативна область Безу і $(a,b,c)=1, c\neq 0$. Розглянемо матриці

$$A=\operatorname{diag}(1,a), \qquad B=\operatorname{diag}(0,b), \qquad C=\operatorname{diag}(0,c).$$

Очевидно, що $(A,B,C)_l=I$. Тоді існує така матриця $T=\left[t_{ij}\right]_2$, що $(A+BT,C)_l=I$. Оскільки

$$A+BT=\begin{bmatrix}1 & 0\\ bt_{21} & a+bt_{22}\end{bmatrix},$$

то

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ bt_{21} & a+bt_{22} & 0 & c\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}I & 0\end{bmatrix}.$$

Звідси випливає, що $(a+bt_{22},c)=1$.

Теорему 5 доведено.

1. *Bass H.* K-theory and stable algebra // Publ. Math. – 1964. – **22**. – P. 5 – 60.
2. *Gillman L., Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – **82**. – P. 362 – 365.
3. *Забавський Б.В.* Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше 2 // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 4. – С. 550 – 554.
4. *McGovern W.* Neat rings // J. Pure and Appl. Algebra. – 2006. – **205**, № 2. – P. 243 – 265.
5. *McGovern W.* Bezout rings with almost stable range 1 // J. Pure and Appl. Algebra. – 2008. – **212**, № 2. – P. 340 – 348.
6. *Білявська С., Забавський Б.* Стабільний ранг адекватного кільця // Мат. студ. – 2010. – **33**, № 2. – С. 212 – 214.
7. *Zabavsky B.* Diagonal reduction of matrices over finite stable range rings // Мат. студ. – 2014. – **41**, № 1. – P. 101 – 108.
8. *Zabavsky B.* Diagonal reduction of matrices over rings // Math. Stud. Monograph Ser. – Lviv: VNTL Publ., 2012. – Vol. 16 – 251 p.
9. *Chen H.* Rings with many idempotents // Int. J. Math. and Math. Sci. – 1999. – **22**, № 3. – P. 547 – 558.
10. *Goodearl K., Menal P.* Stable range one for rings with many units // J. Pure and Appl. Algebra. – 1998. – **54**. – P. 261 – 287.
11. *Helmer O.* The elementary divisor for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**, № 2. – P. 225 – 236.
12. *Shchedryk V. P.* Some determinant properties of primitive matrices over Bezout B-domain // Algebra and Discrete Math. – 2005. – № 2. – P. 46 – 57.
13. *Васерштейн Л. Н.* Стабильный ранг колец и размерность топологических пространств // Функцион. анализ и его прил. – 1971. – **5**, вып. 2. – С. 17 – 27.
14. *Kaplansky I.* Elementary divisor and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464 – 491.
15. *Зелиско В. Р.* О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып. 12. – С. 14 – 21.
16. *Shchedryk V.* Factorization of matrices over elementary divisor domain // Algebra and Discrete Math. – 2009. – № 2. – P. 79 – 99.
17. *Stewart B. M.* A note on least common left multiples // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – **55**, № 6. – P. 587 – 591.
18. *MacDuffee C. C.* The theory of matrices. – Berlin: Verlag von Julius Springer, 1933. – 110 p.
19. *Романів А. М., Щедрик В. П.* Найбільший спільний дільник та найменше спільне праве кратне матриць другого порядку // Мат. вісн. наук. товариства ім. Шевченка. – 2012. – **9**. – С. 269 – 284.
20. *Shchedryk V. P.* On decomposition of complete linear group into some its subgroups // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – **61**. – P. 184 – 190.
21. *Щедрик В. П.* Про мультиплікативність канонічної діагональної форми матриць // Прикл. пробл. механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – P. 77 – 85.

Одержано 22.04.14,
після доопрацювання — 04.02.15