УДК 512.534.5
В. Д. Дереч (Вінниц. нац. техн. ун-т)

КЛАСИФІКАЦІЯ СКІНЧЕННИХ КОМУТАТИВНИХ НАПІВГРУП, ДЛЯ ЯКИХ ІНВЕРСНИЙ МОНОЇД ЛОКАЛЬНИХ АВТОМОРФІЗМІВ Є Δ-НАПІВГРУПОЮ

A semigroup S is called a Δ-semigroup if the lattice of its congruences forms a chain relative to the inclusion. A local automorphism of the semigroup S is called an isomorphism between its two subsemigroups. The set of all local automorphisms of the semigroup S relative to the ordinary operation of composition of binary relations forms an inverse monoid of local automorphisms. We present a classification of finite commutative semigroups for which the inverse monoid of local automorphisms is a Δ-semigroup.

Полугруппа S называется Δ-полугруппой, если решетка ее конгруэнций образует цепь относительно включения. Локальным автоморфизмом полугруппы S называют изоморфизм между двумя ее подполугруппами. Множество всех локальных автоморфизмов полугруппы S относительно обычной операции композиции бинарных отношений образует инверсный моноид локальных автоморфизмов. В данной статье дана классификация конечных коммутативных полугрупп, для которых инверсный моноид локальных автоморфизмов является Δ-полугруппой.

Напівгрупа S називається інверсною, якщо для будь-якого елемента a існує єдиний елемент a^{-1} такий, що $aa^{-1}a = a$ і $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$. Відомо (див. [1]), що напівгрупа є інверсною тоді і лише тоді, коли вона регулярна і два її довільні ідемпотенти комутують. Напівгрупа називається моноїдом, якщо вона містить одиницю. Найбільш природним чином інверсний моноїд з'являється у вигляді моноїда всіх локальних автоморфізмів тієї чи іншої математичної структури. (Під локальним автоморфізмом математичної структури розуміють ізоморфізм між її підструктурами.) Нехай S — довільна напівгрупа. Через $P\,\mathrm{Aut}(S)$ позначимо інверсний моноїд усіх локальних автоморфізмів напівгрупи S. У даній статті мова йтиме про інверсні моноїди локальних автоморфізмів скінченних комутативних напівгруп. Розглянемо два приклади. Нехай E — n-елементна лінійно впорядкована напівґратка. Інверсний моноїд усіх локальних автоморфізмів напівґратки E зазвичай позначають через $\mathcal{IO}_n$. Нехай тепер S — $(n+1)$-елементна напівгрупа з нульовим множенням (тобто для довільних $x, y \in S$ $xy = 0$, де 0 — нуль напівгрупи S). Очевидно, що в цьому випадку моноїд $P\,\mathrm{Aut}(S)$ ізоморфний симетричній інверсній напівгрупі на n-елементній множині. Цей моноїд позначають через $\mathcal{IS}_n$. Отже, інверсні моноїди $\mathcal{IO}_n$ і $\mathcal{IS}_n$ є моноїдами локальних автоморфізмів комутативних напівгруп. Крім того, кожний з цих моноїдів є Δ-напівгрупою (тобто конгруенції на $\mathcal{IO}_n$ і $\mathcal{IS}_n$ лінійно впорядковані відносно включення). Вивчення Δ-напівгруп розпочато в 1969 р. незалежно Б. Шайном в [2, 3] і Т. Тамурою в [4]. В цих статтях з'ясовано структуру довільної комутативної Δ-напівгрупи. В більшості наступних робіт (див., наприклад, [5 – 16]) вивчалася структура Δ-напівгруп, які є тим чи іншим узагальненням комутативних напівгруп. У роботі [17] запропоновано метод конструювання скінченної інверсної Δ-напівгрупи. У зв'язку з викладеним вище цілком природно виникає проблема класифікації скінченних комутативних напівгруп, для яких інверсний моноїд усіх локальних автоморфізмів є Δ-напівгрупою. В даній статті цю задачу розв'язано (див. п. 2).

1. Означення. Термінологія. Формулювання потрібних результатів. Напівгрупа називається переставною, якщо для будь-яких двох її конгруенцій ρ і σ виконується рівність $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$, де $\circ$ — позначення композиції бінарних відношень.

Напівгрупа S називається Δ-напівгрупою, якщо її конгруенції лінійно впорядковані відносно включення. Очевидно, що будь-яка Δ-напівгрупа є переставною.

Комутативну напівгрупу, кожний елемент якої є ідемпотентом, називають напівґраткою. Відомо (див. [1]), що на будь-якій напівґратці за допомогою операції можна визначити стабільний порядок, а саме $a \leq b \Leftrightarrow ab = a$. Зрозуміло, що скінченна напіврешітка містить найменший елемент, який стандартно позначають через 0.

Нехай P — впорядкована множина з найменшим елементом 0. Через $\prec$ будемо позначати відношення покриття. Якщо $0 \prec a$, то елемент a називають атомом впорядкованої множини P. Якщо E — нетривіальна напіврешітка скінченної довжини, то, очевидно, вона містить атоми.

Нетривіальну напіврешітку називають примітивною, якщо кожний її ненульовий елемент є атомом.

Через $\mathrm{Sub}(S)$ позначимо решітку піднапівгруп напівгрупи S. Нехай $A \in \mathrm{Sub}(S)$. Число $h(A)$ $\big($де $h(A)$ — висота піднапівгрупи A в решітці $\mathrm{Sub}(S)\big)$ назвемо розмірністю піднапівгрупи A. Якщо $A \in \mathrm{Sub}(S)$, то через Δ_A будемо позначати відношення рівності на піднапівгрупі A.

Нехай S — довільна напівгрупа. Ізоморфізм між піднапівгрупами напівгрупи S називають *локальним автоморфізмом* напівгрупи S. Множина всіх локальних автоморфізмів напівгрупи S відносно звичайної операції композиції бінарних відношень утворює інверсний моноїд, який ми позначимо через $P\,\mathrm{Aut}(S)$. Якщо $\xi \in P\,\mathrm{Aut}(S)$, то через $\mathrm{dom}(\xi)$ і $\mathrm{im}(\xi)$ будемо позначати відповідно область визначення і множину значень локального автоморфізму ξ.

До класу інверсних моноїдів, що розглядаються в даній статті, входять, зокрема, симетрична інверсна напівгрупа на n-елементній множині (вона позначається через IS_n), а також інверсний моноїд усіх локальних автоморфізмів скінченного n-вимірного простору $\big($його позначаємо через $P\,\mathrm{Aut}(V_n)\big)$. Якщо $\varphi \in IS_n$, то ранг перетворення φ $\big($його позначають через $\mathrm{rank}(\varphi)\big)$ — це число $|\mathrm{im}(\varphi)|$. Але таке означення рангу незвичне для моноїда $P\,\mathrm{Aut}(V_n))$: якщо $\psi \in P\,\mathrm{Aut}(V_n)$, то згідно зі стандартним означенням $\mathrm{rank}(\psi) = \dim\big(\mathrm{im}(\psi)\big)$. Щоб при переході від одного інверсного моноїда до іншого не змінювати сенс позначення $\mathrm{rank}(\varphi)$, ми нагадаємо відносно універсальне означення рангу (див. [18]). Отже, нехай S — інверсна напівгрупа скінченної довжини (відносно канонічного порядку). Через $\mathrm{rank}(a)$ позначимо число $h(a \cdot a^{-1})$, де $h(a \cdot a^{-1})$ — висота ідемпотента $a \cdot a^{-1}$ у напіврешітці ідемпотентів напівгрупи S. Можна перевірити, що виконується характеристична властивість рангу, а саме $\mathrm{rank}(a \cdot b) \leq \min\big(\mathrm{rank}(a), \mathrm{rank}(b)\big)$.

Нехай S — інверсна напівгрупа перетворень скінченної довжини з нулем. Припустимо, що ідеали напівгрупи S утворюють ланцюг відносно включення. В цьому випадку кожний ідеал має форму $I_k = \{\alpha \in S\colon\ \mathrm{rank}(\alpha) \leq k\}$. Якщо Θ — конгруенція на S, то очевидно, що множина $I^\Theta = \{\alpha \in S\colon (\alpha, 0) \in \Theta\}$ є ідеалом напівгрупи S і, отже, існує невід'ємне ціле число m таке, що $I^\Theta = I_m$. Це число ми позначимо через $\mathrm{ind}(\Theta)$ і назвемо індексом конгруенції Θ.

Цілком 0-проста інверсна напівгрупа називається напівгрупою Брандта. Нехай G — група, I — довільна непорожня множина. Нехай, крім того, $B = B(G, I) = (I \times\ G \times\ I) \cup\ \{0\}$, де $0 \notin I \times G \times I$. Визначимо операцію множення на множині B таким чином: $(i, g, j) \cdot (j, h, l) = (i, gh, l)$, а всі інші добутки дорівнюють 0. Тоді $B(G, I)$ є напівгрупою Брандта і будь-яку напівгрупу Брандта можна зобразити в такій формі. Групу G називають базисною групою напівгрупи Брандта $B(G, I)$.

Нехай σ — довільна конгруенція на групі G. На напівгрупі Брандта $B(G, I)$ визначимо бінарне відношення Σ таким чином: $\big((i, g, j), (k, h, l)\big) \in \Sigma$ тоді і тільки тоді, коли $i = k$, $j = l$ і $(g, h) \in \sigma$. Відношення Σ є конгруенцією на напівгрупі Брандта. Кожна конгруенція, відмінна від універсальної на $B(G, I)$, має такий вигляд.

Група G називається елементарною абелевою p-групою (p — просте число), якщо будь-який її відмінний від одиниці елемент має порядок p. Відомо (див. [19]), що група автоморфізмів елементарної абелевої p-групи $G = \underbrace{F \times F \times \ldots \times F}_{n}$ ізоморфна повній лінійній групі $GL_n(F_p)$, де F_p — поле, адитивна група якого — це група F простого порядку p.

Нехай I — ідеал напівгрупи S. Конгруенцію $\rho_I = I \times I \cup \Delta$, де Δ — відношення рівності на S, називають конгруенцією Ріса.

Напівгрупу S, що містить нуль, називають нільнапівгрупою, якщо для довільного $x \in S$ існує натуральне число n таке, що $x^n = 0$.

Нехай $\mathcal{H}$ — скінченна множина, що містить щонайменше 4 елементи. Нехай 0 і z — два різні фіксовані елементи з множини $\mathcal{H}$. Визначимо операцію на $\mathcal{H}$ таким чином:

a) для довільного $x \in \mathcal{H}$ $0 * x = x * 0 = 0$;

b) для будь-якого $x \in \mathcal{H}$ $x * x = 0$;

c) якщо $x \neq y$ і $\{x, y\} \cap \{0, z\} = \varnothing$, то $x * y = y * x = z$;

d) для довільного $x \in \mathcal{H}$ $x * z = z * x = 0$.

Легко перевірити, що $(\mathcal{H}, *)$ є нільнапівгрупою. Клас таких напівгруп позначимо через $\mathcal{N}$.

У статті [20] наведено класифікацію скінченних комутативних напівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним. Сформулюємо відповідний результат.

Твердження 1 (див. [20], теорема 1)**.** *Нехай S — скінченна комутативна напівгрупа. Її інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним тоді і лише тоді, коли S :*

(1) *або лінійно впорядкована напіврешітка;*

(2) *або примітивна напіврешітка*;

(3) *або елементарна абелева p-група*;

(4) *або напівгрупа з нульовим множенням*;

(5) *або нільнапівгрупа з класу $\mathcal{N}$.*

2. Основна теорема. В цьому пункті ми сформулюємо і доведемо основний результат статті.

Теорема. *Нехай S — скінченна комутативна напівгрупа. Її інверсний моноїд локальних автоморфізмів є Δ-напівгрупою тоді і лише тоді, коли S:*

(1) *або лінійно впорядкована напіврешітка*;

(2) *або примітивна напіврешітка*;

(3) *або група простого порядку p, причому $p - 1 = 2^k$ для деякого невід'ємного цілого числа k*;

(4) *або елементарна абелева 2-група порядку 2^n, де $n \geq 2$*;

(5) *або напівгрупа з нульовим множенням*;

(6) *або нільнапівгрупа з класу $\mathcal{N}$.*

Доведення. Будь-яка Δ-напівгрупа, очевидно, є переставною, тому, використовуючи твердження 1, будемо шукати скінченні комутативні напівгрупи S, для яких інверсний моноїд $P\operatorname{Aut}(S)$ є Δ-напівгрупою, серед напівгруп, що перелічені в цьому твердженні. За числом класів, що наведені у твердженні 1, доведення розіб'ємо на 5 пунктів.

2.1. Лінійно впорядкована напіврешітка. Почнемо з лінійно впорядкованої напіврешітки S, що складається з n елементів. Ідеали інверсного моноїда $\mathcal{IO}_n$ лінійно впорядковані відносно включення (цей факт без доведення сформульовано в [21] і доведено в [22]). Будь-яка конгруенція на $\mathcal{IO}_n$ є конгруенцією Ріса (цей факт без доведення сформульовано в [21] і доведено в [22]). Звідси випливає, що конгруенції на інверсному моноїді $\mathcal{IO}_n$ лінійно впорядковані відносно включення, тобто моноїд $\mathcal{IO}_n$ є Δ-напівгрупою.

2.2. Примітивна напіврешітка. Розглянемо тепер інверсний моноїд $P\operatorname{Aut}(S)$, де S — примітивна напіврешітка. Якщо $|S| = 2$, то легко перевірити, що $|P\operatorname{Aut}(S)| = 6$ і конгруенції інверсного моноїда $P\operatorname{Aut}(S)$ вичерпуються такими бінарними відношеннями: Δ — відношенням рівності, універсальним бінарним відношенням і $(I_1 \times I_1) \cup \Delta$. Отже, в цьому випадку конгруенції на $P\operatorname{Aut}(S)$ лінійно впорядковані відносно включення.

Далі будемо вважати, що $|S| = n$ і $n \geq 3$. Оскільки інверсний моноїд $PAut(S)$ є переставним, то (див. [23]) його ідеали утворюють ланцюг відносно включення, а отже, кожний ідеал має форму $I_m = \{\alpha \in P\operatorname{Aut}(S)\colon \operatorname{rank}(\alpha) \leq m\}$. Нехай k — таке невід'ємне ціле число, що $k < n$. Легко перевірити, що фактор-напівгрупа I_{k+1}/I_k є напівгрупою Брандта. Нехай σ — конгруенція, відмінна від універсальної на факторі I_{k+1}/I_k. Зазначимо, що опис конгруенцій на напівгрупі Брандта є відомим (див. п. 1). На моноїді $P\operatorname{Aut}(S)$ визначимо бінарне відношення Σ таким чином:

$$\Sigma = I_k \times I_k \cup \big((D_{k+1} \times D_{k+1}) \cap \sigma\big) \cup \triangle,$$

де $D_{k+1} = \{\varphi \in P\operatorname{Aut}(S))\colon \operatorname{rank}(\varphi) = k+1\}$ і Δ — відношення рівності на $P\operatorname{Aut}(S)$. Перевірка показує, що бінарне відношення Σ є конгруенцією на моноїді $P\operatorname{Aut}(S)$. Покажемо, що кожна відмінна від універсальної конгруенція на $P\operatorname{Aut}(S)$ має таку форму.

Нехай Ω — конгруенція на $P\operatorname{Aut}(S)$, причому $\operatorname{ind}(\Omega) = k$. Якщо $k = n$, то зрозуміло, що Ω є універсальною конгруенцією на $P\operatorname{Aut}(S)$. Відтепер будемо вважати, що $k < n$. Нехай $k \geq 1$, $(\alpha, \beta) \in \Omega$ і $\operatorname{rank}(\alpha) \geq k+2$. Покажемо, що в цьому випадку $\alpha = \beta$. Оскільки інверсний моноїд $P\operatorname{Aut}(S)$ є переставним, то (див. [18]) $(\alpha, \beta) \in H$, тобто $\operatorname{dom}(\alpha) = \operatorname{dom}(\beta)$ і $\operatorname{im}(\alpha) = \operatorname{im}(\beta)$. Якщо припустити, що $\alpha \neq \beta$, то знайдеться елемент $x \in \operatorname{dom}(\alpha)$ такий, що $(x)\alpha \neq (x)\beta$. Зрозуміло, що $x \neq 0$ (тут 0 — найменший елемент напіврешітки S). Позначимо $(x)\alpha$ через a, а множину $\operatorname{dom}(\alpha) - \{x\}$ через X. Оскільки $x \neq 0$, то множина X є піднапіврешіткою примітивної напіврешітки S. Тому $\Delta_X \in P\operatorname{Aut}(S)$. Позаяк $(\alpha, \beta) \in \Omega$, то $(\Delta_X \circ \alpha, \Delta_X \circ \beta) \in \Omega$. Оскільки $\operatorname{rank}(\Delta_X \circ \alpha) = \operatorname{rank}(\alpha) - 1 \geq k+1 > k$, то (див. [18]) $\operatorname{im}(\Delta_X \circ \alpha) = \operatorname{im}(\Delta_X \circ \beta)$. Очевидно, що $a \notin \operatorname{im}(\Delta_X \circ \alpha)$. З іншого боку, існує $y \in \operatorname{dom}(\beta)$ $(y \neq x)$ такий, що $(y)\beta = a$. Позаяк $y \in \operatorname{dom}(\Delta_X \circ \beta)$, то $a \in \operatorname{im}(\Delta_X \circ \beta)$. Суперечність. Отже, $\alpha = \beta$.

Зазначимо, якщо $\operatorname{ind}(\Omega) = 0$, то Ω — відношення рівності на $P\operatorname{Aut}(S)$. Дійсно, якщо $(\alpha, \beta) \in \Omega$ і $\operatorname{rank}(\alpha) = 1$, то $\operatorname{dom}(\alpha) = \operatorname{dom}(\beta)$ і $\operatorname{im}(\alpha) = \operatorname{im}(\beta)$. Звідси безпосередньо випливає рівність $\alpha = \beta$. Якщо $\operatorname{rank}(\alpha) = 2$, то, враховуючи рівності $(0)\alpha = (0)\beta = 0$, $\operatorname{dom}(\alpha) = \operatorname{dom}(\beta)$ і $\operatorname{im}(\alpha) = \operatorname{im}(\beta)$, знову одержуємо рівність $\alpha = \beta$. Якщо $\operatorname{rank}(\alpha) \geq 3$, то, міркуючи так само, як і вище, отримуємо $\alpha = \beta$.

Далі, розглянемо бінарне відношення на фактор-напівгрупі I_{k+1}/I_k, а саме $\omega = \big(\Omega \cap \cap (D_{k+1} \times D_{k+1})\big) \cup \big\{(0^*, 0^*)\big\}$, де 0^* — нуль фактор-напівгрупи I_{k+1}/I_k. Легко перевірити, що ω — конгруенція, відмінна від універсальної на фактор-напівгрупі I_{k+1}/I_k. Отже,

$$\Omega = (I_k \times I_k) \cup \big((D_{k+1} \times D_{k+1}) \cap \omega\big) \cup \Delta,$$

де Δ — відношення рівності на моноїді $P\operatorname{Aut}(S)$.

Нехай Θ і Υ — дві довільні конгруенції на інверсному моноїді $P\operatorname{Aut}(S)$. Покажемо, що $\Theta \subseteq \Upsilon$ або $\Upsilon \subseteq \Theta$. Припустимо, що $\operatorname{ind}(\Theta) = k$, $\operatorname{ind}(\Upsilon) = m$ і $k < m$. Якщо $m = n$, то Υ — універсальна конгруенція на $P\operatorname{Aut}(S)$. Тому $\Theta \subset \Upsilon$.

Нехай тепер $k < m < n$. Вище ми вже з'ясували структуру довільної (відмінної від універсальної) конгруенції на інверсному моноїді $P\operatorname{Aut}(S)$, де S — примітивна напіврешітка. Оскільки $I_k \subset I_m$, то $\Theta \subset \Upsilon$.

Залишилося розглянути випадок, коли $\mathrm{ind}(\Theta) = \mathrm{ind}(\Upsilon) = k$. Якщо $k = 0$, то, як вже показано вище, конгруенції Θ і Υ є відношеннями рівності на $P\,\mathrm{Aut}(S)$.

Також окремо розглянемо випадок, коли $\mathrm{ind}(\Theta) = \mathrm{ind}(\Upsilon) = 1$. Зрозуміло, що базисна група фактор-напівгрупи I_2/I_1 як і в попередньому випадку, є тривіальною. До того ж якщо $(\alpha, \beta) \in \Theta$ ($(\alpha, \beta) \in \Upsilon$) і $\mathrm{rank}(\alpha) \geq 3$, то $\alpha = \beta$. Отже, кожна з конгруенцій Θ і Υ є конгруенцією Ріса, що відповідає ідеалу I_1. Таким чином, $\Theta = \Upsilon$.

Залишилося розглянути випадок, коли $k \geq 2$. Легко зрозуміти, що базисна група напівгрупи Брандта I_{k+1}/I_k ізоморфна симетричній групі S_k. Відомо, що конгруенції на скінченній симетричній групі лінійно впорядковані відносно включення. До того ж якщо $(\alpha, \beta) \in \Theta$ $\big((\alpha, \beta) \in \Upsilon\big)$ і $\mathrm{rank}(\alpha) \geq k + 2$, то $\alpha = \beta$. З цих двох фактів випливає, що $\Theta \subseteq \Upsilon$ або $\Upsilon \subseteq \Theta$.

2.3. Елементарна абелева p-група. Тепер розглянемо випадок, коли G — елементарна абелева p-група. Насамперед зазначимо такий простий факт. Нехай H — група. Зовні приєднаємо до неї 0. Одержимо інверсний моноїд $H \cup \{0\}$. Легко показати, що інверсний моноїд $H \cup \{0\}$ є Δ-напівгрупою тоді і лише тоді, коли H є Δ-групою. Спочатку розглянемо випадок, коли порядок групи G є простим числом p. Цю групу будемо розглядати в адитивній формі з нульовим елементом. Оскільки група G не містить нетривіальних власних підгруп, то $P\,\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Aut}(G) \cup \{\binom{0}{0}\}$. Якщо $|G| = 2$, то $P\,\mathrm{Aut}(G) = \left\{\Delta_G, \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}\right\}$, де Δ_G — тотожне перетворення на G. Очевидно, що в цьому випадку $P\,\mathrm{Aut}(G)$ є Δ-напівгрупою. Розглянемо тепер випадок, коли $p > 2$. Відомо (див. [19]), що група автоморфізмів групи простого порядку p ізоморфна мультиплікативній групі відповідного поля F_p, яка має порядок $p - 1$ і є циклічною. Оскільки число $p - 1$ є парним, то група $\mathrm{Aut}(G)$ містить підгрупу порядку 2. Якщо припустити, що число $|\mathrm{Aut}(G)|$ ділиться на непарне просте число (наприклад, q), то згідно з теоремою Коші група $\mathrm{Aut}(G)$ містить підгрупу порядку q. Очевидно, що підгрупи групи $\mathrm{Aut}(G)$ порядку 2 і q непорівнянні. В цьому випадку група $\mathrm{Aut}(G)$ не є Δ-групою, а отже, і інверсний моноїд $P\,\mathrm{Aut}(G)$ не є Δ-напівгрупою. Таким чином, якщо група $\mathrm{Aut}(G)$ є Δ-групою, то число $|\mathrm{Aut}(G)|$ має форму 2^k. Як відомо (див. [2] або [4]), циклічна група порядку p^n (p — просте число) є Δ-групою. Отже, у випадку, коли порядок групи G є простим числом p, інверсний моноїд $P\,\mathrm{Aut}(G)$ є Δ-напівгрупою тоді і лише тоді, коли число $p - 1$ має форму 2^k. Наприклад, до простих чисел з такою властивістю належать $3, 5, 17, 257, \ldots$.

Нехай тепер елементарна абелева p-група G має форму $G = \underbrace{F \times F \times \ldots \times F}_{n}$, де $n \geq 2$, група F має простий порядок p, причому $p \geq 3$. Покажемо, що в цьому випадку інверсний моноїд $P\,\mathrm{Aut}(G)$ не належить до класу Δ-напівгруп. На моноїді $P\,\mathrm{Aut}(G)$ розглянемо два бінарних відношення Ω і Θ, де Ω — конгруенція Ріса, що відповідає ідеалу I_{n-1}, а $\Theta = \big\{(\varphi, \psi) \in$ $\in P\,\mathrm{Aut}(G) \times P\,\mathrm{Aut}(G) \colon \exists\, c \in F^*, \psi = c\varphi\big\}$ (тут через F^* позначено мультиплікативну групу поля, що відповідає групі F). Легко перевірити, що бінарне відношення Θ є конгруенцією на $P\,\mathrm{Aut}(G)$. Оскільки $n \geq 2$, то ідеал I_{n-1} відмінний від 0, а отже, конгруенція Ω не є відношенням рівності. Нехай $\beta \in P\,\mathrm{Aut}(G)$ і $\mathrm{rank}(\beta) = n-1$, тоді $(0, \beta) \in \Omega$. Оскільки $(0, \beta) \notin$ $\notin \Theta$, то $\Omega \nsubseteq \Theta$. Далі, нехай $\xi \in \mathrm{Aut}(G)$. Тоді $\mathrm{rank}(\xi) = n$. Оскільки $p \geq 3$, то існує елемент $c \in F^*$, відмінний від 1. Очевидно, що $(\xi, c\xi) \in \Theta$. Разом з тим $(\xi, c\xi) \notin \Omega$. Отже, $\Theta \nsubseteq \Omega$. Таким чином, в цьому випадку інверсний моноїд $P\,\mathrm{Aut}(G)$ не належить до класу Δ-напівгруп.

Залишилося розглянути випадок, коли $G = \underbrace{F \times F \times \ldots \times F}_{n}$, $n \geq 2$, $|F| = 2$. Нехай Φ — довільна конгруенція на інверсному моноїді $P\,\mathrm{Aut}(G)$. Якщо $\mathrm{ind}(\Phi) = n$, то Φ — універсальна конгруенція на $P\operatorname{Aut}(G)$. Нехай $\operatorname{ind}(\Phi) = k < n$ і $(\alpha, \beta) \in \Phi$. Оскільки моноїд $P\operatorname{Aut}(G)$ є переставним, то у випадку, коли $\operatorname{rank}(\alpha) > k$, маємо $(\alpha, \beta) \in H$, де H — відношення Гріна. Останнє твердження випливає з теореми 4 статті [20]. До того ж якщо $(\alpha, \beta) \in \Phi$ і $\operatorname{rank}(\alpha) \geq k + 2$, то згідно з результатами Т. Н. Шаронової (див. [24, 25]) існує елемент $c \in F^*$ (де F^* — мультиплікативна група поля F) такий, що $\alpha = c\beta$. Оскільки $|F| = 2$, то $c = 1$. Отже, в цьому випадку $\alpha = \beta$. Таким чином, конгруенція Φ має форму

$$\Phi = I_k \times I_k \cup (\phi \cap (D_{k+1} \times D_{k+1})) \cup \Delta,$$

де ϕ — конгруенція, відмінна від універсальної на факторі I_{k+1}/I_k, Δ — відношення рівності на $P\operatorname{Aut}(G)$ і $D_{k+1} = \{\varphi \in P\operatorname{Aut}(G)\colon \operatorname{rank}(\alpha) = k + 1\}$.

Нехай Θ і Υ — дві довільні конгруенції на інверсному моноїді $P\operatorname{Aut}(G)$. Покажемо, що $\Theta \subseteq \Upsilon$ або $\Upsilon \subseteq \Theta$. Припустимо, що $\operatorname{ind}(\Theta) = k$, $\operatorname{ind}(\Upsilon) = m$ і $k < m$. Якщо $m = n$, то Υ — універсальна конгруенція на $P\operatorname{Aut}(G)$. Тому $\Theta \subset \Upsilon$.

Нехай тепер $k < m < n$. Як зазначено вище, конгруенція Θ має форму

$$\Theta = I_k \times I_k \cup (\theta \cap (D_{k+1} \times D_{k+1})) \cup \Delta,$$

де θ — конгруенція, відмінна від універсальної на I_{k+1}/I_k. Зрозуміло, що $\Theta \subset \Upsilon$.

Залишилося розглянути випадок, коли $\operatorname{ind}(\Theta) = \operatorname{ind}(\Upsilon) = k$, де $k \neq n$. Якщо $k = 0$, то Θ і Υ є відношеннями рівності. Справді, якщо $(\alpha, \beta) \in \Theta$ і $\operatorname{rank}(\alpha) \geq 2$, то $\alpha = \beta$. Аналогічно для конгруенції Υ. Якщо ж $\operatorname{rank}(\alpha) = 1$, то $(\alpha, \beta) \in H$, де H —- відношення Гріна, тобто $\operatorname{dom}(\alpha) = \operatorname{dom}(\beta)$ і $\operatorname{im}(\alpha) = \operatorname{im}(\beta)$. Якщо підгрупа A має розмірність 1, то вона, очевидно, містить лише один ненульовий елемент. Звідси випливає рівність $\alpha = \beta$.

Нехай тепер $k = 1$. Якщо $(\alpha, \beta) \in \Theta$ і $\operatorname{rank}(\alpha) \geq 3$, то $\alpha = \beta$. Те саме виконується і для Υ. Якщо $\operatorname{rank}(\alpha) = 2$, то кожна відмінна від універсальної конгруенція на факторі I_2/I_1 однозначно визначається конгруенцією на групі $GL_2(F)$ (див. п. 1). Як відомо (див. [26, с. 170]), група $GL_2(F)$ ізоморфна симетричній групі S_3. Нормальні підгрупи симетричної групи S_3 є відомими — це тривіальна і альтернативна підгрупи, а також сама група. Оскільки ці підгрупи лінійно впорядковані відносно включення, то лінійно впорядковані і відповідні конгруенції на факторі I_2/I_1. Звідси маємо $\Theta \subseteq \Upsilon$ або $\Upsilon \subseteq \Theta$.

Нехай тепер $k \geq 2$. Якщо $(\alpha, \beta) \in \Theta$ і $\operatorname{rank}(\alpha) \geq k + 2$, то $\alpha = \beta$. Те саме виконується і для Υ. Розглянемо випадок, коли $\operatorname{rank}(\alpha) = k + 1$. У цьому випадку (див. [26, с. 169]) група $GL_{k+1}(F)$ є простою. Звідси випливає, що конгруенції на факторі I_{k+1}/I_k лінійно впорядковані, а отже, конгруенції Θ і Υ утворюють ланцюг відносно включення.

2.4. Напівгрупа з нульовим множенням. Нехай тепер S — напівгрупа з нульовим множенням. Зрозуміло, що $\varphi \in P\operatorname{Aut}(S)$ тоді і лише тоді, коли $(0)\varphi = 0$, де 0 — нуль напівгрупи S. Отже, якщо напівгрупа S містить $n + 1$ елемент, то інверсний моноїд $P\operatorname{Aut}(S)$, очевидно, ізоморфний симетричній інверсній напівгрупі $\mathcal{IS}_n$. Знаючи структуру будь-якої конгруенції на симетричному інверсному моноїді (див. [27]), робимо висновок, що конгруенції на $\mathcal{IS}_n$ утворюють ланцюг відносно включення.

2.5. Нільнапівгрупа з класу $\mathcal{N}$. Залишилося розглянути випадок, коли напівгрупа S належить класу $\mathcal{N}$ (див. означення у п. 1). Перелічимо всі піднапівгрупи напівгрупи S. Оскільки напівгрупа S є нільнапівгрупою, то $\{0\}$ — єдина одноелементна піднапівгрупа напівгрупи S. Легко зрозуміти, що довільна двоелементна множина, що містить 0, є піднапівгрупою напівгрупи S. Будь-яка підмножина множини S, яка складається щонайменше з трьох елементів і містить 0 і z, є піднапівгрупою напівгрупи S. Інших піднапівгруп напівгрупи S, кількість елементів яких не менша за 3, немає. Ці твердження легко перевіряються.

Далі, нехай $A, B \in \mathrm{Sub}(S)$ і $|A| = |B| \leq 3$. В цьому випадку A і B є напівгрупами з нульовим множенням. Очевидно, що ін'єкція $f\colon A \to B$ є локальним автоморфізмом напівгрупи S тоді і лише тоді, коли $(0)f = 0$. Якщо $|A| = |B| \geq 4$, то ін'єкція $\varphi\colon A \to B$ є локальним автоморфізмом напівгрупи S тоді і тільки тоді, коли $(0)\varphi = 0$ і $(z)\varphi = z$.

Нехай Θ — конгруенція, відмінна від універсальної на інверсному моноїді $P\,\mathrm{Aut}(S)$, причому $\mathrm{ind}(\Theta) = k$. Якщо $(\alpha, \beta) \in \Theta$ і $\mathrm{rank}(\alpha) \geq k + 2$, то, міркуючи аналогічно тому, як це було зроблено в п. 2.2 щодо інверсного моноїда $P\,\mathrm{Aut}(S)$, коли S — примітивна напіврешітка, можна довести рівність $\alpha = \beta$. Крім того, зазначимо, що базисна група напівгрупи Брандта I_{m+1}/I_m при $m \geq 3$ ізоморфна симетричній групі S_{m-1}, а при $m = 2$ — симетричній групі S_2. Враховуючи все викладене вище і міркуючи, як і в п. 2.2, робимо висновок, що у випадку, коли напівгрупа S належить класу $\mathcal{N}$, $P\,\mathrm{Aut}(S)$ є Δ-напівгрупою.

Теорему доведено.

1. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп: В 2 т. – М.: Мир, 1972.– Т. 1. – 286 с. – Т. 2. – 422 с.
2. *Schein B. M.* Commutative semigroups where congruences form a chain // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys. – 1969. – **17**. – P. 523 – 527.
3. *Schein B.M.* Corrigenda to "Commutative semigroups where congruences form a chain"// Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys. – 1975. – **12**. – P. 1247.
4. *Tamura T.* Commutative semigroups whose lattice of congruences is a chain // Bull. Soc. Math. France. – 1969. – **97**. – P. 369 – 380.
5. *Bonzini C., Cherubini A.* Sui Δ-semigrouppi di Putcha // Inst. Lombardo Acad. Sci. Lett. Rend. A. – 1980. – **114**. – P. 179 – 194.
6. *Nagy A.* Weakly exponential Δ-semigroups // Semigroup Forum. – 1990. – **40**. – P. 297 – 313.
7. *Nagy A.* RC-commutative Δ-semigroups // Semigroup Forum. – 1992. – **44**. – P. 332 – 340.
8. *Nagy A.* On the structure of (m, n)-commutative semigroups // Semigroup Forum. – 1992. – **45**. – P. 183 – 190.
9. *Nagy A.* Semilattice decomposition of n_2-permutative semigroups // Semigroup Forum. – 1993. – **46**. – P. 16 – 20.
10. *Nagy A.* $\mathcal{RGC}_n$-commutative Δ-semigroups // Semigroup Forum. – 1998. – **57**. – P. 92 – 100.
11. *Nagy A.* Right commutative Δ-semigroups // Acta Sci. Math. (Szeged). – 2000. – **66**. – P. 33 – 45.
12. *Nagy A., Jones P. R.* Permutative semigroups whose congruences form a chain // Semigroup Forum. – 2004. – **69**. – P. 446 – 456.
13. *Nagy A.* Notes on a problem on weakly exponential Δ-semigroups // arXiv:1305.5427v1 [math.GR] 23 May 2013.
14. *Pondělíček B.* On generalized conditionally commutative semigroups // Math. Slovaca. – 1994. – **44**, № 3. – P. 359 – 364.
15. *Strecker R.* H-commutative Δ-semigroups // Rostock. math. Kolloq. – 1995. – **49**. – S. 98 – 104.
16. *Trotter P. G.* Exponential Δ-semigroups // Semigroup Forum. – 1976. – **12**. – P. 313 – 331.
17. *Trotter P., Tamura T.* Completely semisimple inverse Δ-semigroups admitting principal series // Pacif. J. Math. – 1977. – **68**, № 2. – P. 515 – 525.
18. *Дереч В.Д.* Конгруенції переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 4. – С. 469 – 473.
19. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
20. *Дереч В.Д.* Класифікація скінченних комутативних напівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 2. – С. 176 – 184.
21. *Дереч В.Д.* О квазипорядках на некоторых инверсных полугруппах // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 3. – С. 76 – 78.
22. *Fernandes V. H.* The monoid of all injective order preserving partial transformations on a finite chain // Semigroup Forum. – 2001. – **62**. – P. 178 – 204.
23. *Hamilton H.* Permutability of congruences on commutative semigroups // Semigroup Forum. – 1975. – **10**. – P. 55 – 66.
24. *Шаронова Т. Н.* Конгруенції на напівгрупах лінійних операторів // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1971. – № 1. – С. 17 – 19.
25. *Шаронова Т. Н.* Конгруэнции на полугруппе всех взаимно однозначных частичных линейных преобразований // 17 Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. сообщ. (Минск, 14–17 сент. 1983 г.). – Минск, 1983. – С. 275.
26. *Artin A.* Geometric algebra. – New York; London, 1957. – 214 p.
27. *Либер А. Е.* О симметрических обобщенных группах // Мат. сб. – 1953. – **33**, № 3. – С. 531 – 544.

Одержано 03.06.14