УДК 512.542

И. К. Чирик (Гомел. инж. ин-т МЧС Республики Беларусь)

О ФАКТОРИЗУЕМОЙ ГРУППЕ С БОЛЬШИМИ ЦИКЛИЧЕСКИМИ ПОДГРУППАМИ В СОМНОЖИТЕЛЯХ

We prove the supersolvability of a finite factorized group $G = G_1G_2 \ldots G_n$ with pairwise permutable factors each of which has a cyclic subgroup of odd order H_i and $|G_i : H_i| \leq 2$.

Доведено надрозв'язність скінченної факторизуємої групи $G = G_1G_2 \ldots G_n$ з попарно переставними співмножниками, кожний з яких містить циклічну підгрупу H_i непарного порядку та індексу $|G_i : H_i| \leq 2$.

Будем рассматривать только конечные группы. Принятые обозначения стандартны и соответствуют [1]. Сверхразрешимой называют группу, у которой все главные факторы имеют простые порядки [1] (VI.8.5).

Б. Хупперт [2] доказал сверхразрешимость группы $G = G_1G_2 \ldots G_n$ при условии, что каждая подгруппа G_i циклическая и $G_iG_j = G_jG_i$ для всех i и j.

В. С. Монахов [3] установил разрешимость группы $G = AB$, когда подгруппы A и B содержат циклические подгруппы индексов ≤ 2. Кроме того, он доказал [4] сверхразрешимость группы $G = AB$, если сомножители A и B содержат циклические подгруппы нечетных порядков и индексов ≤ 2.

Я. Г. Беркович [5] доказал сверхразрешимость группы $G = AB$ нечетного порядка при условии, что все силовские подгруппы в A и B циклические. Этот результат М. Асаад и В. С. Монахов [6] перенесли на факторизуемую группу с n сомножителями. Кроме того, для группы четного порядка они доказали сверхразрешимость группы $G = G_1G_2 \ldots G_n$, в которой подгруппы $G_1, G_2, \ldots, G_n$ попарно перестановочны и все силовские подгруппы в них циклические, подгруппы $G_2, G_3, \ldots, G_n$ имеют нечетные порядки и для каждого i подгруппы G_1 и G_i m-перестановочны.

В настоящей статье мы переносим результат В. С. Монахова [4] на факторизуемую группу с n сомножителями. Докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть группа $G = G_1G_2 \ldots G_n$, где $G_1, G_2, \ldots, G_n$ — попарно перестановочные подгруппы. Если для каждого i существует циклическая подгруппа нечетного порядка H_i такая, что $H_i \subseteq G_i$ и $|G_i : H_i| \leq 2$, то группа G сверхразрешима.*

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 1 [4] (теорема 2). *Если группы G_1 и G_2 содержат циклические подгруппы нечетных порядков и индексов ≤ 2, то группа $G = G_1G_2$ сверхразрешима.*

Лемма 2. *Пусть p — простое число, A, B и C — подгруппы группы G. Если $G = ABC$, где AB, AC и BC — абелевы подгруппы экспоненты, делящей $p - 1$, то группа G абелева экспоненты, делящей $p - 1$.*

Доказательство проводится простой проверкой.

Лемма 3 (теорема Машке) [7] (предложение 2). *Пусть P — силовская элементарная абелева нормальная подгруппа группы G и P_1 — нормальная в G подгруппа из P. Тогда $P = P_1 \times P_2$, где P_2 — также нормальная в G подгруппа из P.*

Говорят, что группа G порядка $p_1^{a_1}p_2^{a_2} \ldots p_n^{a_n}$, $p_1 > p_2 > \ldots > p_n$, имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, если для каждого i в группе G имеется нормальная подгруппа порядка $p_1^{a_1}p_2^{a_2} \ldots p_i^{a_i}$. Известно, что каждая сверхразрешимая группа имеет силовскую башню сверхразрешимого типа [1] (VI.9.1).

Лемма 4 [1] (VI.10.2). *Пусть группа $G = G_1G_2\ldots G_n$, где $G_1, G_2, \ldots, G_n$ — попарно перестановочные подгруппы. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если подгруппа G_iG_j имеет силовскую башню сверхразрешимого типа для любых i и j, то группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа*;

2) *если $G_iG_jG_k$ — сверхразрешимая подгруппа для любых i, j и k, то группа G сверхразрешима.*

Через $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G, а $O_p(G)$ — наибольшая нормальная p-подгруппа группы G.

Лемма 5. *Предположим, что разрешимая группа G не сверхразрешима, но фактор-группа G/K сверхразрешима для каждой неединичной нормальной в G подгруппы K. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\Phi(G) = 1$;

2) *группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N, $N = O_p(G) = F(G) = C_G(N)$ для некоторого простого p.*

Доказательство. Подгруппа Фраттини $\Phi(G) = 1$ [1] (VI.8.6). Если N_1 и N_2 — неединичные нормальные подгруппы группы G, то фактор-группа G/N_i сверхразрешима по условию. Поскольку прямое произведение сверхразрешимых групп является сверхразрешимой группой, то $G \simeq (G/N_1 \times G/N_2)$ сверхразрешима. Пришли к противоречию. Значит, в группе есть точно одна минимальная нормальная подгруппа N. По условию группа G разрешима, поэтому [1] (III.4.2) подгруппа Фиттинга $F(G) = N = O_p(G) = C_G(N)$ для некоторого простого p.

Лемма 6 [1] (I.9.6). *Если N_1 и N_2 — нормальные подгруппы группы G, то фактор-группа $G/(N_1 \cap N_2)$ изоморфна подгруппе из прямого произведения $G/N_1 \times G/N_2$.*

Лемма 7 [1] (II.3.10). *Пусть A — некоторая неприводимая абелева группа автоморфизмов p-группы V и $|V| = p^n$. Тогда A — циклическая группа порядка, делящего $p^n - 1$. Кроме того, n — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению $p^n \equiv 1 \pmod{|A|}$.*

Доказательство теоремы. Предположим, что группа G не сверхразрешима, и применим индукцию по порядку группы. Из лемм 1 и 4 следует, что $n = 3$ и группа $G = G_1G_2G_3$ имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. Ясно, что условия теоремы наследуют все фактор-группы группы G. Из леммы 5 следует, что подгруппа Фраттини $\Phi(G) = 1$, $N = F(G) = C_G(F(G)) = P$ — единственная минимальная нормальная в G подгруппа, где P — силовская p-подгруппа из G и p — наибольший простой делитель порядка группы G.

Предположим, что $G_1G_2P = G$. Тогда $(G_1G_2) \cap P$ нормальна в G. Так как P — единственная минимальная нормальная в G подгруппа, то $P \subseteq G_1G_2$ или $(G_1G_2) \cap P = 1$. Если $P \subseteq G_1G_2$, то $G = G_1G_2$ и G сверхразрешима по лемме 1, что противоречит нашему предположению. Если $(G_1G_2) \cap P = 1$, то G_1G_2 — p'-холлова подгруппа из G и $P \subseteq G_3$. Поскольку $p > 2$, то $P \subseteq H_3$ и $|P| = p$. Теперь группа G сверхразрешима, что невозможно по нашему предположению. Поэтому $G_1G_2P \neq G$. Аналогично $G_1G_3P \neq G$ и $G_2G_3P \neq G$.

По тождеству Дедекинда

$$G_1G_2P = G_1G_2(G_3 \cap G_1G_2P), \quad G_1G_3 \cap G_1G_2P = G_1(G_3 \cap G_1G_2P),$$

$$G_2G_3 \cap G_1G_2P = G_2(G_3 \cap G_1G_2P),$$

поэтому группа G_1G_2P является произведением трех попарно перестановочных подгрупп G_1, G_2 и $G_3 \cap G_1G_2P$. По индукции G_1G_2P сверхразрешима. Аналогично G_1G_3P и G_2G_3P сверхразрешимы.

Поскольку G_1G_2P сверхразрешима и P — нормальная элементарная абелева силовская p-подгруппа, то по лемме 3 подгруппа $P = N_1 \times R_1$, где N_1, R_1 — нормальные подгруппы в G_1G_2P и N_1 — подгруппа простого порядка. Пусть N_2 — минимальная нормальная в G_1G_2P подгруппа из R_1. Тогда $|N_2| = p$ и, применяя теорему Машке к группе $G_1G_2R_1$, получаем $R_1 = N_2 \times R_2$, где R_2 — нормальная в $G_1G_2R_1$ подгруппа и R_2 нормальна в G_1G_2P в силу абелевости подгруппы P. Выберем в R_2 минимальную нормальную в G_1G_2P подгруппу N_3 и т. д. Через конечное число шагов получим

$$P = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_t, \quad |N_j| = p, \quad j = 1, \ldots, t,$$

где все N_j нормальны в G_1G_2P. Фактор-группа $G_1G_2P/C_{G_1G_2P}(N_j)$ изоморфна подгруппе U_j из $\mathrm{Aut}N_j$, которая является циклической группой порядка $p-1$. По лемме 6 фактор-группа $G_1G_2P/\bigcap_{j=1}^{t} C_{G_1G_2P}(N_j)$ изоморфна подгруппе из группы $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_t$. Поскольку

$$\bigcap_{j=1}^{t} C_{G_1G_2P}(N_j) = C_{G_1G_2P}(P) = P,$$

то G_1G_2P/P является абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$. Аналогично, группы G_1G_3P/P и G_2G_3P/P абелевы экспоненты, делящей $p-1$.

По лемме 2 фактор-группа G/P будет абелевой экспоненты, делящей $p-1$. Согласно лемме 7 фактор-группа G/P является циклической и $|P| = p$. Но теперь группа G сверхразрешима. Противоречие с предположением.

Теорема доказана.

Пример. В $GL(2,7)$ есть неабелева подгруппа S_3 порядка 6, неприводимо действующая на элементарной абелевой группе E_{7^2} порядка 49. Поэтому существует несверхразрешимая группа $G = [E_{7^2}]S_3$, она имеет номер (294,9) в библиотеке AllSmallGroups [8]. Эта группа допускает факторизацию $G = G_1G_2$, $|G_1| = 14$, $|G_2| = 21$. Поэтому в теореме увеличить индексы подгрупп H_i до 3 нельзя.

1. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. – Berlin etc.: Springer, 1967.
2. *Huppert B.* Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen // Math. Z. – 1953. – **58**. – S. 243 – 264.
3. *Монахов В. С.* О произведении двух групп, одна из которых содержит циклическую подгруппу индекса ≤ 2 // Мат. заметки. – 1974. – **16**, № 2. – С. 285 – 295.
4. *Монахов В. С.* О произведении двух групп с циклическими подгруппами индекса 2 // Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. – 1996. – № 3. – С. 22 – 24.
5. *Беркович Я. Г.* О разрешимых группах конечного порядка // Мат. сб. – 1967. – **74 (116)**, № 1. – С. 75 – 92.
6. *Asaad M., Monakhov V. S.* Some sufficient conditions for a finite group to be supersolvable // Acta Math. hung. – 2012. – **135**, № 1-2. – P. 168 – 173.
7. *Белоногов В. А., Фомин А. Н.* Матричные представления в теории конечных групп. – М.: Наука, 1976.
8. *The GAP* Group // GAP – Groups, Algorithms, and Programming. – Version 4.4.12 [Электронный ресурс]. 2009. Режим доступа: http://www.gap-system.org.

Получено 14.07.14