УДК 519.21

М. С. Братійчук (Шльон. техн. ун-т, Ін-т математики, Глівіце, Польща)

МЕТОД ПОТЕНЦІАЛУ В ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПРОЦЕСІВ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ПРИРОСТАМИ

We propose a new approach to the application of the Korolyuk potential method in the study of boundary functionals for processes with independent increments. The formulas for the joint distribution of functionals related to crossing of a level are obtained and their asymptotic analyses are performed. The possibility of crossing a level by the process in a continuous way is also investigated.

Предложен новый подход к использованию метода потенциала Королюка при исследовании граничных функционалов для процессов с независимыми приращениями. Получены формулы для совместного распределения функционалов, связанных с достижением процессом уровня, и проведен их асимптотический анализ. Изучена возможность пересечения процессом уровня непрерывным образом.

Вступ. Розглянемо однорідний процес з незалежними приростами $\xi(t),\ t \geq 0,\ \xi(0) = 0,$ неперервними справа траєкторіями та кумулянтою

$$k(s) = \ln \mathbf{E} e^{-s\xi(1)} = \frac{bs^2}{2} - as + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-sx} - 1 + \frac{sx}{1+x^2} \right) \Pi\{dx\}, \qquad \operatorname{Re} s = 0,$$

де $b \geq 0,\ a \in (-\infty; \infty)$ і $\Pi\{\cdot\}$ — міра стрибків. Для $x > 0$ позначимо

$$\tau(x) = \inf\{t > 0 \colon \xi(t) > x\}, \qquad \gamma^{\pm}(x) = \pm\xi(\tau(x)\pm) \mp x. \tag{1}$$

Ці функціонали були предметом дослідження у багатьох роботах. У випадку, коли процес є напівнеперервним, тобто має стрибки лише одного знака, добре працюють прямі ймовірнісні методи, і в цьому випадку можна отримати формули для характеристичних функцій наведених функціоналів (див, наприклад, [1 – 3]). Для цього класу процесів у роботах [4, 5] було запропоновано інший підхід, який було названо *методом потенціалу*. Суттєвою перевагою цього методу є те, що, по-перше, дослідження різних функціоналів проводиться за стандартним алгоритмом, а по-друге, зображення для шуканих характеристик записуються у вигляді, який є зручним для асимптотичного аналізу.

В загальному випадку, тобто без умови напівнеперервності, використовується факторизаційний метод і з його допомогою отримано формули для подвійних перетворень Лапласа сумісних розподілів функціоналів з (1), які є відомими (див., наприклад, праці [6 – 8] та наведену в них бібліографію). Ці формули записуються в термінах компонент нескінченно подільної факторизації (див. формулу (2) нижче) і, як правило, вони не є зручними для асимптотичного аналізу самих розподілів. Тому абсолютно природно постає питання про поширення методу потенціалу на цей випадок з тим, щоб використати його переваги при асимптотичному аналізі. Перший крок у цьому напрямку було зроблено у статті [9], в якій при деяких додаткових умовах на процес було отримано зображення для резольвенти процесу з незалежними приростами з обривом на півосі, яке є центральним у методі потенціалу. Зв'язок з граничними функціоналами з (1), як і у випадку напівнеперервного процесу, досягався за допомогою відомої формули Динкіна [10, с. 190]. У статтях [11 – 13] отримано зображення резольвенти для загального процесу з незалежними приростами, тобто без жодних додаткових умов, але дослідження конкретних функціоналів все-таки вимагало деяких додаткових обмежень на процес. Результати цих досліджень викладено у монографії [14].

У даній статті запропоновано деяку модифікацію методу потенціалу Королюка, який базується на результатах з [12, 13] та компенсаційній формулі [15]. Це дозволяє отримати формули для сумісних розподілів функціоналів з (1) без жодних додаткових умов на процес $\xi(t)$ і зберегти при цьому головну перевагу методу потенціалу, тобто отримати вказані формули у вигляді, який є зручним для асимптотичного аналізу. Такий аналіз проведено для функціоналів $\gamma^{\pm}(x)$ у випадку $0 < m = \mathbf{E}\xi(1) \leq \infty.$ Також узагальнено деякі результати з [15] щодо можливості неперервного перетину процесом фіксованого рівня.

1. Допоміжні результати. У цьому пункті ми наведемо необхідні для подальшого допоміжні результати, частина з яких є відомими. Позначимо

$$F_-(x,\lambda) = -\lambda \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t}\mathbf{P}\left\{\inf_{u\leq t}\xi(s) \geq x\right\}dt, \qquad x \leq 0,$$

$$F_+(x,\lambda) = \lambda \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t}\mathbf{P}\left\{\sup_{u\leq t}\xi(s) < x\right\}dt, \qquad x \geq 0.$$

Для $\operatorname{Re} s = 0,\ \lambda > 0$ справджується рівність, яка відома під назвою *тотожності нескінченно подільної факторизації*:

$$\frac{\lambda}{\lambda - k(s)} = \int\limits_{-0}^{\infty} e^{-sx}dF_+(x,\lambda) \int\limits_{-\infty}^{+0} e^{-sx}dF_-(x,\lambda). \tag{2}$$

Через $\mathcal{B}_+(\varepsilon),\ \mathcal{B}_-(\varepsilon),\ \varepsilon > 0,$ позначимо борелівські σ-алгебри підмножин з (ε,∞) та $(-\infty,-\varepsilon)$ відповідно. Для $\lambda > 0$ означимо міру $Q_{\pm}\{\cdot,\lambda\}$ таким чином:

$$Q_{\pm}\{A,\lambda\} = \pm\lambda^{-1} \int\limits_{\mp\infty}^{\pm 0} \Pi\{A_y\}dF_{\mp}(y,\lambda), \qquad A \in \mathcal{B}_{\pm}(0),$$

де $A_y = \{z\colon z = x - y,\ x \in A\}.$

Теорема 1 [12]. *Для довільного процесу з незалежними приростами $\xi(t)$ існують числа $0 \leq \beta_+(\lambda) < \infty,\ -\infty < \beta_-(\lambda) \leq 0$ такі, що*

$$\int\limits_{-0}^{\infty} e^{-sx}dF_+(x,\lambda) = \left(1 - \int\limits_0^{\infty}(e^{-sx}-1)Q_+\{dx,\lambda\} + \beta_+(\lambda)s\right)^{-1}, \tag{3}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+0} e^{-sx}dF_-(x,\lambda) = \left(1 - \int\limits_{-\infty}^{+0}(e^{-sx}-1)Q_-\{dx,\lambda\} + \beta_-(\lambda)s\right)^{-1}. \tag{4}$$

Позначимо

$$k_{\pm}(s,\lambda) = \int\limits_{0}^{\pm\infty} (e^{-sx}-1)Q_{\pm}\{dx,\lambda\} - \beta_{\pm}(\lambda)s.$$

Ці функції є кумулянтами деяких процесів з незалежними приростами, причому кумулянта $k_-(s,\lambda)$ відповідає незростаючому процесові, а кумулянта $k_+(s,\lambda)$ — неспадаючому.

З (2)–(4) отримуємо факторизаційну рівність

$$\lambda - k(s) = \lambda(1-k_-(s,\lambda))(1-k_+(s,\lambda)), \quad \mathrm{Re}\, s = 0, \qquad \lambda > 0, \tag{5}$$

а з (3) оберненням по s — співвідношення

$$F_+(x,\lambda) + \int\limits_{-0}^{x} Q_+\{[x-t;\infty),\lambda\}dF_+(t,\lambda) + \beta_+(\lambda)\frac{dF_+(x,\lambda)}{dx} = 1, \qquad x > 0. \tag{6}$$

Розглянемо тепер випадок, коли $\mathbf{P}\big\{\inf_{t\ge 0}\xi(t) > -\infty\big\} = 1$, що, як відомо, є рівносильним умові $\int_1^\infty t^{-1}\mathbf{P}\big\{\xi(t) < 0\big\}dt < \infty$, яка виконується, наприклад, якщо $m = \mathbf{E}\xi(1) > 0$. В цьому випадку $\lim_{\lambda\downarrow 0} F_-(x,\lambda) = -\mathbf{P}\big\{\inf_{u\ge 0}\xi(u) \ge x\big\} = \mathbf{P}\big\{\inf_{u\ge 0}\xi(u) < x\big\} - 1, \quad x \le 0$, та

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda^{-1}F_+(x,\lambda) = \int\limits_{0}^{\infty}\mathbf{P}\big\{\sup_{u\le t}\xi(u) < x\big\}dt \stackrel{\mathrm{df}}{=} F_+(x), \qquad x \ge 0.$$

Означимо такі міри:

$$Q_+\{A\} = \int\limits_{-\infty}^{+0}\Pi\{A_y\}d\mathbf{P}\big\{\inf_{u\ge 0}\xi(u) < y\big\}, \quad A \in \mathcal{B}_+(0),$$

$$Q_-\{A\} = \int\limits_{-0}^{\infty}\Pi\{A_y\}dF_+(y), \quad A \in \mathcal{B}_-(0),$$

і нехай

$$k_{\pm}(s) = \int\limits_{0}^{\pm\infty}(e^{-sx}-1)Q_{\pm}\{dx\} - \beta_{\pm}s, \qquad \pm\mathrm{Re}\, s \ge 0,$$

де $\beta_+ = \lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda\beta_+(\lambda), \quad \beta_- = \lim_{\lambda\downarrow 0}\beta_-(\lambda) \le 0$. Існування цих границь встановлено в [14, с. 218] і там же показано, що

$$\int\limits_{-0}^{\infty} e^{-sx}dF_+(x) = -1/k_+(s), \qquad \mathrm{Re}\, s > 0. \tag{7}$$

З (5) при $\lambda \to 0$ отримуємо факторизаційну рівність

$$k(s) = k_+(s)(1-k_-(s)), \qquad \mathrm{Re}\, s = 0. \tag{8}$$

2. Основні результати.

Теорема 2. *Для* $\lambda,\ \nu,\ \mu > 0$ *має місце зображення*

$$\mathbf{E}e^{-\lambda\tau(x)-\nu\gamma^-(x)-\mu\gamma^+(x)} = \mathbf{E}e^{-\lambda\tau(x)}+$$

$$+\lambda^{-1}\int\limits_{-0}^{x}\int\limits_{-\infty}^{+0}\int\limits_{x-y-t}^{\infty}\big(e^{(\mu-\nu)(x-t-y)-\mu z}-1\big)\Pi\{dz\}dF_-(y,\lambda)dF_+(t,\lambda). \tag{9}$$

Зауваження. Формулу (9) при деяких додаткових умовах на процес $\xi(t)$ наведено в [16]. З (9) оберненням по ν та μ отримуємо таке твердження.

***Наслідок* 1.** *Для* $z_1,\ z_2 > 0$

$$\mathbf{E}\Big\{e^{-\lambda\tau(x)},\gamma^-(x)\geq z_1,\gamma^+(x)\geq z_2\Big\} =$$

$$=\lambda^{-1}\int\limits_{-0}^{x}\int\limits_{-\infty}^{+0}I\{x-y-t\geq z_1\}\Pi\{[z_2+x-t-y;\infty)\}dF_-(y,\lambda)dF_+(t,\lambda). \tag{10}$$

Поклавши в (10) $\lambda\downarrow 0,$ одержимо наступний результат.

***Наслідок* 2.** *Якщо* $\displaystyle\int_1^{\infty}t^{-1}\mathbf{P}\big\{\xi(t)<0\big\}dt<\infty,$ *то для* $z_i>0,\ \ i=1,2,$ *маємо*

$$\mathbf{P}\big\{\gamma^-(x)\geq z_1,\gamma^+(x)\geq z_2\big\} =$$

$$=\int\limits_{-0}^{x}\int\limits_{-\infty}^{+0}I\{x-y-t\geq z_1\}\Pi\{[z_2+x-t-y;\infty)\}d\mathbf{P}\big\{\inf_{u\geq 0}\xi(u)<y\big\}dF_+(t). \tag{11}$$

Теорема 3. *Нехай* $0<m=\mathbf{E}\xi(1)<\infty$ *та* $\displaystyle\int_1^{\infty}x^{1+\alpha}\Pi\{dx\}<\infty,\ \ \alpha\geq 0.$ *Тоді для* $z_i\geq 0,\ \ i=1,2,$ *та* $x\to\infty$ *маємо*

$$\mathbf{P}\big\{\gamma^-(x)\geq z_1,\gamma^+(x)\geq z_2\big\} =$$

$$=\frac{1}{m}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+0}I\{t-y\geq z_1\}\Pi\{[z_2+t-y;\infty)\}d\mathbf{P}\big\{\inf_{u\geq 0}\xi(u)<y\big\}dt+o(x^{-\alpha}). \tag{12}$$

Якщо $\mathbf{E}\xi(1)=\infty,$ то $\gamma^{\pm}(x)\to\infty$ за ймовірністю при $x\to\infty,$ а тому тепер потрібно знайти нормуючий множник $\varepsilon(x)$ такий, щоб випадкові величини $\varepsilon(x)\gamma^{\pm}(x)$ мали невироджений розподіл при $x\to\infty.$

Теорема 4. *Нехай*

$$\int\limits_{-\infty}^{-1}|x|\Pi\{dx\}<\infty,\qquad \Pi\{[x;\infty)\}=x^{-\alpha}L(x),\qquad 0<\alpha<1, \tag{13}$$

де функція $L(x)$ *повільно змінюється на нескінченності. Тоді для* $0 \le u_1 \le 1$, $u_2 \ge 0$ *маємо*

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\gamma^-(x)}{x} \ge u_1, \frac{\gamma^+(x)}{x} \ge u_2\right\} = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int\limits_{u_1}^{1} \frac{(1-z)^{\alpha-1}dz}{(z+u_2)^{\alpha}}.$$

Означення. *Будемо говорити, що траєкторія* $\xi(t,\omega)$ *перетинає рівень* $x > 0$ *неперервним чином, якщо* $\gamma^-(x) = \gamma^+(x) = 0$. *Якщо ж* $\gamma^-(x) > 0$, $\gamma^+(x) > 0$, *то говоримо, що траєкторія* $\xi(t,\omega)$ *перетинає рівень* $x > 0$ *стрибком.*

Наступна теорема описує можливість перетину рівня стрибком.

Теорема 5. *Якщо*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\varepsilon + \int\limits_0^1 t^{-1}\mathbf{P}\big\{\xi(t) > \varepsilon\big\}dt\right) = -\infty, \tag{14}$$

то

$$\mathbf{P}\big\{\gamma^-(x) > 0, \gamma^+(x) > 0 \,/\, \tau(x) < \infty\big\} = 1 \tag{15}$$

для всіх $x > 0$.

Співвідношення (15) справджується, наприклад, якщо процес $\xi(t)$ має обмежену варіацію та від’ємний зсув.

Наступна теорема узагальнює результат з [15] і в трохи іншому вигляді доведена в [16] (див. також [17, 18]).

Теорема 6. *Для довільних* $x > 0$, $\lambda > 0$ *справджується свіввідношення*

$$\mathbf{E}\{e^{-\lambda\tau(x)}, \gamma^-(x) = \gamma^+(x) = 0\} = \beta_+(\lambda)\frac{d}{dx}F_+(x,\lambda). \tag{16}$$

***Наслідок* 3.** *Існують лише дві можливості:*

i) $\mathbf{E}\{e^{-\lambda\tau(x)}, \gamma^+(x) = \gamma^-(x) = 0\} = 0$ *для всіх* $x > 0$,

ii) $\mathbf{E}\{e^{-\lambda\tau(x)}, \gamma^+(x) = \gamma^-(x) = 0\} > 0$ *для всіх* $x > 0$.

Цей наслідок легко випливає з (16). Дійсно, нехай $\mathbf{E}\{e^{-\lambda\tau(x_0)}, \gamma^-(x) = \gamma^+(x) = 0\} = 0$ для деякого $x_0 > 0$. Тоді з (16) маємо, що або $\beta_+(\lambda) = 0$ або $\beta_+(\lambda) > 0$, $F'_+(x_0,\lambda) = 0$. Але якщо $\beta_+(\lambda) > 0$, то $F'_+(x,\lambda) > 0$ для всіх $x > 0$ і, отже, $\mathbf{E}\{e^{-\lambda\tau(x_0)}, \gamma^-(x) = \gamma^+(x) = 0\} > 0$, що суперечить припущенню. В свою чергу $\beta_+(\lambda) = 0$, і пункт i) випливає з (16).

Якщо $\mathbf{E}\{e^{-\lambda\tau(x_0)}, \gamma^-(x_0) = \gamma^+(x_0) = 0\} > 0$ для деякого $x_0 > 0$, то $\beta_+(\lambda) > 0$, а отже, $F'_+(x,\lambda) > 0$ для $x > 0$, і пункт ii) знову випливає з (16).

3. Доведення результатів. ***Доведення теореми* 2.** Покладемо $\xi_x(t) = x - \xi(t)$, $x > 0$, $t \le \zeta(x)$, де $\zeta(x) = \inf\{t > 0;\ \xi_x(t) < 0\}$. Іншими словами, $\xi_x(t)$ є процесом з незалежними приростами, який отримано з процесу $x - \xi(t)$ обривом у момент першого виходу на піввісь $(-\infty, 0)$; $\xi_x(t)$ є марковським процесом і його резольвента визначається формулою Динкіна [10, с. 189]

$$\mathbf{R}^0_\lambda f(x) = \mathbf{E}\int\limits_0^{\zeta(x)} e^{-\lambda t} f(x - \xi(t))dt$$

для довільної обмеженої борелівської функції $f(x)$. Наступне зображення для $\mathbf{R}_\lambda^0 f(x)$ наведено в [11]:

$$\mathbf{R}_\lambda^0 f(x) = \lambda^{-1} \int\limits_{-0}^{x} \int\limits_{-\infty}^{+0} f(x-y-z) dF_-(y,\lambda) dF_+(z,\lambda), \qquad x > 0. \tag{17}$$

Далі при доведенні використовується компенсаційна формула з [15]

$$\mathbf{E} \sum_{s \le \zeta(x)} g(s, \xi_x(s-), \xi_x(s)) = \mathbf{E} \int\limits_0^{\zeta(x)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(s, \xi_x(s), \xi_x(s)+z) \widetilde{\Pi}\{dz\} ds, \tag{18}$$

де g — дійснозначна невід'ємна обмежена борелівська функція на $[0,\infty) \times R \times R$ така, що $g(s,u,u) = 0$ для всіх $s \ge 0, u \in R$, а $\widetilde{\Pi}\{dy\}$ — міра Леві для процесу $\xi_x(t)$. Зрозуміло, що $\widetilde{\Pi}\{A\} = \Pi\{A_-\}$ для довільної борелівської множини A, де $A_- = \{-x \colon x \in A\}$.

У (18) в якості функції $g(s,u,v)$ візьмемо $g(s,u,v) = e^{-\lambda s}\big(e^{-\nu u + \mu v} - 1\big) I\{v \le 0 \le u\}$, $s > 0$. Маємо

$$\mathbf{E}\{e^{-\lambda\tau(x)}\big(e^{-\nu\gamma^-(x) - \mu\gamma^+(x)} - 1\big)\} = \mathbf{E}\left\{e^{-\lambda\zeta(x)}\big(e^{-\nu\xi_x(\zeta(x)-) + \mu\xi_x(\zeta(x))} - 1\big)\right\} =$$

$$= \mathbf{E} \int\limits_0^{\zeta(x)} e^{-\lambda s} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g\big(\xi_x(s), \xi_x(s)+z\big) \widetilde{\Pi}\{dz\} ds =$$

$$= \mathbf{E} \int\limits_0^{\zeta(x)} e^{-\lambda s} \int\limits_{\xi_x(s)}^{\infty} \big(e^{-\nu\xi_x(s) + \mu(\xi_x(s) - z)} - 1\big) \Pi\{dz\} ds = \mathbf{E} \int\limits_0^{\zeta(x)} e^{-\lambda s} f(\xi_x(s)) ds =$$

$$= \mathbf{R}_\lambda^0 f(x),$$

де

$$f(x) = \int\limits_x^{\infty} \big(e^{-(\nu-\mu)x - \mu z} - 1\big) \Pi\{dz\}.$$

Використовуючи тут формулу для резольвенти (17), отримуємо

$$\mathbf{E}\left\{e^{-\lambda\tau(x)}\big(e^{-\nu\gamma^-(x) - \mu\gamma^+(x)} - 1\big)\right\} =$$

$$= \lambda^{-1} \int\limits_{-0}^{x} \int\limits_{-\infty}^{+0} \int\limits_{x-y-t}^{\infty} \big(e^{-(\nu-\mu)(x-y-t) - \mu z} - 1\big) \Pi\{dz\} dF_-(y,\lambda) dF_+(t,\lambda),$$

звідки випливає зображення (9).

***Доведення теореми* 3**. У [13] було доведено, що якщо $\int_1^\infty x^{1+\alpha}\Pi\{dx\} < \infty,\ \ \alpha \geq 0,$ то для функції $R(t) = F_+(t) - t/m$ справджується оцінка

$$\operatorname*{\mathbf{var}}_{[x,x+y]}(F_+(t) - t/m) = (y+1)\psi(x), \tag{19}$$

і $\psi(x) = o(x^{-\alpha})$ при $x \to \infty$.

Для фіксованих $z_1,\ z_2$ позначимо

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{+0} I\{t-y \geq z_1\}\Pi\{[z_2 + t-y; \infty)\}d\mathbf{P}\big\{\inf_{u\geq 0}\xi(u) < y\big\}.$$

Тепер з (11) отримуємо

$$\mathbf{P}\big\{\gamma^-(x) \geq z_1, \gamma^+(x) \geq z_2\big\} - \frac{1}{m}\int\limits_0^\infty f(t)dt = \int\limits_{-0}^{x} f(x-t)dF_+(t) -$$

$$-\frac{1}{m}\int\limits_0^\infty f(t)dt = \int\limits_{-0}^{x} f(x-t)dR(t) - \frac{1}{m}\int\limits_x^\infty f(t)dt, \tag{20}$$

але

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{+0} I\{t-y \geq z_1\}\Pi\{[z_2 + t - y; \infty)\}d\mathbf{P}\big\{\inf_{u\geq 0}\xi(u) < y\big\} \leq$$

$$\leq \Pi\{[z_2 + t; \infty)\} = o(t^{-1-\alpha}),$$

де остання рівність випливає з того, що $\int_0^\infty t^\alpha \Pi\{[t,\infty)\}dt < \infty,$ і тепер співвідношення (12) випливає з (3) та рівності (19).

***Доведення теореми* 4.** Позначимо $T(x) = \int_1^x \Pi\{[y;\infty)\}dy$. З (13) та властивостей повільно змінних функцій [19, с. 321] випливає, що

$$T(x) \sim (1-\alpha)^{-1}x^{1-\alpha}L(x), \qquad x \to \infty. \tag{21}$$

З (13) та (21) маємо

$$k(s) \sim -s\int\limits_1^\infty e^{-sx}dT(x) \sim \frac{s^\alpha\Gamma(2-\alpha)}{1-\alpha}L(1/s), \qquad s \to +0,$$

а тому з (8) отримуємо

$$k_+(s) \sim -\frac{s^\alpha\Gamma(2-\alpha)}{1-\alpha}L(1/s), \qquad s \to +0.$$

Отже,

$$\int_{-0}^{\infty} e^{-sx} dF_+(x) \sim \frac{s^{-\alpha}(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)L(1/s)}, \qquad s \to +0,$$

що дає [17, с. 499]

$$F_+(x) \sim \frac{x^{\alpha}(1-\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2-\alpha)L(x)} = \frac{x^{\alpha}\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha L(x)}, \qquad x \to \infty. \tag{22}$$

З (11) маємо

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\gamma^-(x)}{x} \geq u_1, \frac{\gamma^+(x)}{x} \geq u_2\right\} = \int_0^{1-u_1}\int_{-\infty}^{+0} Q(x,t,y)d\mathbf{P}\big\{\inf_{u\geq 0}\xi(u) < y\big\}d_tF_+(tx) +$$

$$+\int_{1-u_1}^{1}\int_{-\infty}^{x(1-u_1-t)} Q(x,t,y)d\mathbf{P}\big\{\inf_{u\geq 0}\xi(u) < y\big\}d_tF_+(tx), \tag{23}$$

де $Q(x,t,y) = \Pi\{[x(1-t+u_2)-y;\infty)\}$.

Нехай $x_n \to \infty$ при $n \to \infty$ і $D_n(t) = F_+(tx_n)/F_+(x_n)$. $D_n(t)$, $n \geq 0$, $0 \leq t \leq 1$ — множина функцій розподілу на відрізку $[0,1]$, і згідно з (22) маємо

$$\lim_{n\to\infty} D_n(t) = t^{\alpha}, \qquad 0 \leq t \leq 1. \tag{24}$$

Оскільки $Q(x_n,t,y)/Q(x_n,t,0) \leq 1$ для $y \leq 0$, $0 \leq t \leq 1$, $n \geq 0$ і $\lim_{n\to\infty} Q(x,t,y)/Q(x,t,0) = 1$ для довільних фіксованих y, t, то

$$\int_{-\infty}^{+0} Q(x_n,t,y)d\mathbf{P}\big\{\inf_{u\geq 0}\xi(u) < y\big\} = Q(x_n,t,0)(1+\varphi_n(t)), \tag{25}$$

$$\int_{-\infty}^{x_n(1-u_1-t)} Q(x_n,t,y)/Q(x_n,t,0)d\mathbf{P}\big\{\inf_{u\geq 0}\xi(u) < y\big\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad 1-u_1 < t \leq 1, \tag{26}$$

і $\varphi_n(t) \to 0$ для всіх $t \in [0;1]$ при $n \to \infty$.

Тоді з (23) маємо

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\gamma^-(x_n)}{x_n} \geq u_1, \frac{\gamma^+(x_n)}{x_n} \geq u_2\right\} = \int_0^{1-u_1} Q(x_n,t,0)F_+(x_n)(1+\varphi_n(t))dD_n(t) +$$

$$+\int_{1-u_1}^{1} Q(x_n,t,0)F_+(x_n)\int_{-\infty}^{x(1-u_1-t)} \frac{Q(x_n,t,y)}{Q(x_n,t,0)}d\mathbf{P}\big\{\inf_{u\geq 0}\xi(u) < y\big\}dD_n(t).$$

Тепер з (22) та (24) – (26) отримуємо

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\gamma^-(x_n)}{x_n}\geq u_1,\frac{\gamma^+(x_n)}{x_n}\geq u_2\right\}=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{1-u_1}\frac{L(x_n(1-z+u_2))}{(1-z+u_2)^\alpha L(x_n)}dD_n(z)=$$

$$=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int\limits_0^{1-u_1}\frac{z^{\alpha-1}dz}{(1-z+u_2)^\alpha}=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int\limits_{u_1}^1\frac{(1-z)^{\alpha-1}dz}{(z+u_2)^\alpha}. \tag{27}$$

Права частина в (27) не залежить від послідовності $x_n,$ що і завершує доведення теореми 4.

***Доведення теореми* 5.** З (10) при $z_1\to 0,\ z_2\to 0$ отримуємо

$$\mathbf{E}\{e^{-\lambda\tau(x)},\gamma^-(x)>0,\gamma^+(x)>0\}=\int\limits_{-0}^{x}Q_+\{(x-t;\infty),\lambda\}dF_+(t,\lambda)=$$

$$=1-F_+(x,\lambda)-\beta_+(\lambda)\frac{dF_+(x,\lambda)}{dx}=\mathbf{E}e^{-\lambda\tau(x)}-\beta_+(\lambda)\frac{d}{dx}F_+(x,\lambda). \tag{28}$$

Якщо покажемо, що $\beta_+(1)=0,$ то тоді $\beta_+(\lambda)=0$ для всіх $\lambda>0$ і співвідношення (15) буде випливати очевидним чином з (28).

Використовуючи тотожність $\ln s=\int_0^\infty(e^{-x}-e^{-sx})d\ln x,\ \ s>0,$ і співвідношення [20, с. 439]

$$\int\limits_{-0}^{\infty}e^{-sx}dF_+(x,1)=\exp\left(\int\limits_0^\infty(e^{-sx}-1)dN(x)\right),$$

де

$$N(x)=-\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{-1}\mathbf{P}\{\xi(t)>x\}dt,$$

маємо

$$s\int\limits_{-0}^{\infty}e^{-sx}dF_+(x,1)=\exp\left(\int\limits_0^\infty(e^{-sx}-e^{-x})d(N(x)-\ln x)\right)\exp\left(\int\limits_0^\infty(e^{-x}-1)dN(x)\right).$$

Звідси та з (3) випливає, що

$$\exp\left(\int\limits_0^\infty(e^{-x}-1)dN(x)\right)\lim_{s\to\infty}\exp\left(\int\limits_0^\infty(e^{-sx}-e^{-x})d(N(x)-\ln x)\right)=1/\beta_+(1),$$

а тому достатньо показати, що якщо виконується (14), то

$$\lim_{s\to\infty}\int\limits_0^\alpha(e^{-sx}-e^{-x})d(N(x)-\ln x)=\infty \tag{29}$$

для деякого $\alpha>0$.

З (14) та рівності

$$\ln x + \int_0^1 t^{-1}\mathbf{P}\{\xi(t) > x\}dt = \ln x - N(x) - \int_1^\infty e^{-t}t^{-1}\mathbf{P}\{\xi(t) > x\}dt -$$

$$- \int_0^1 (e^{-t} - 1)t^{-1}\mathbf{P}\{\xi(t) > x\}dt$$

випливає, що $\lim_{x\to 0}(N(x) - \ln x) = \infty$, а отже, можемо вибрати $\alpha > 0$, яке далі буде фіксованим, таким, що $N(x) - \ln x > 0$, $0 < x \le \alpha$. Тепер для довільного $C > 0$ можемо вибрати $0 < \varepsilon < \alpha$ так, щоб $N(x) - \ln x \ge C$, $0 < x \le \varepsilon$. Тоді

$$\int_0^\alpha (e^{-sx} - e^{-x})d(N(x) - \ln x) = (e^{-s\alpha} - e^{-\alpha})(N(\alpha) - \ln\alpha) +$$

$$+ s\int_0^\alpha e^{-sx}(N(x) - \ln x)dx \ge (e^{-s\alpha} - e^{-\alpha})(N(\alpha) - \ln\alpha) + C(1 - e^{-s\varepsilon}) \underset{s\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{s\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\alpha}\big(\ln\alpha - N(\alpha)\big) + C.$$

Звідси при $C \to \infty$ отримуємо (29).

***Доведення теореми* 6.** З (9) при ν, $\mu \to \infty$ маємо

$$\mathbf{E}\{e^{-\lambda\tau(x)}, \gamma^+(x) = \gamma^-(x) = 0\} = \mathbf{E}e^{-\lambda\tau(x)} - \int_0^x Q_+\{[x - t; \infty), \lambda\}dF_+(t, \lambda) =$$

$$= 1 - F_+(x, \lambda) - \int_0^x Q_+\{[x - t; \infty), \lambda\}dF_+(t, \lambda).$$

Використовуючи тут тотожність (6), отримуємо (16).

1. *Bertoin J.* Lévy processes. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. – 265 p.
2. *Такач Л.* Комбинаторные методы в теории случайных процессов. – М.: Мир, 1971. – 264 с.
3. *Doney R.* Hitting probabilities for spectrally positive Levy processes // J. London Math. Soc. – 1991. – **44**, № 3. – С. 566 – 576.
4. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложного пуассоновского процесса // Теория вероятностей и ее применения. – 1974. – **19**, № 1. – С. 3 – 14.
5. *Королюк В. С., Супрун В. Н., Шуренков В. М.* Метод потенциала в граничных задачах для процессов с независимыми приращениями и скачками одного знака // Теория вероятностей и ее применения. – 1976. – **22**, № 2. – С. 419 – 425.
6. *Гусак Д. В., Королюк В. С.* Распределение функционалов от однородного процесса с независимыми приращениями // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1970. – № 1. – С. 55 – 73.

7. *Гусак Д. В.* Метод факторизации в граничных задачах для процессов с независимыми приращениями // Распределение некоторых функционалов для процессов с независимыми приращениями и полумарковских процессов. – Киев, 1985. – С. 12 – 42. (Препринт / УССР. Ин-т математики; 85.43)
8. *Рогозин Б. А.* Распределение некоторых функционалов, связанных с процессом с независимыми приращениями // Теория вероятностей и ее применения. – 1966. – **11**, № 4. – С. 6 – 670.
9. *Братийчук М. С.* О резольвенте обрывающегося процесса с независимыми приращениями // Укр. мат. журн. – 1978. – **30**, № 1. – С. 96 – 100.
10. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 860 с.
11. *Братийчук М. С., Королюк В. С.* Резольвента однородного процесса с независимыми приращениями, обрывающегося на полуоси // Теория вероятностей и ее применения. – 1985. – **30**, № 2. – С. 368 – 372.
12. *Братийчук М. С.* Об одном подходе к изучению граничных функционалов для процессов с независимыми приращениями. – Киев, 1989. – 50 с. – (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; № 89.38).
13. *Братийчук М. С.* Предельные теоремы для граничных функционалов от процесса с независимыми приращениями. – Киев, 1989. – 50 с. – (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; № 89.39).
14. *Братийчук М. С., Гусак Д. В.* Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями. – Киев: Наук. думка, 1990. – 263 с.
15. *Millar P.* Exit properties of stochastic process with stationary independent increments // Trans. Amer. Math. Soc. – 1973. – **178**. – P. 459 – 479.
16. *Гусак Д. В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2007. – **65**. – 459 с.
17. *Гусак Д. В.* Процеси з незалежними приростами в теорії ризику // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2011. – **88**. – 544 с.
18. *Гусак Д. В.* О пересечении уровня однородным процессом с независимыми приращениями и невырожденной винеровской компонентой // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 3. – С. 373 – 378.
19. *Феллер В.* Ведение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир,1984. – Т. 2. – 738 с.
20. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. – М.: Наука, 1973. – Т. 2. – 640 с.

Одержано 24.09.14