УДК 513.83

И. Ю. Власенко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПРИМЕР НЕЙТРАЛЬНО НЕБЛУЖДАЮЩИХ ТОЧЕК ВНУТРЕННИХ ОТОБРАЖЕНИЙ, НЕ ЯВЛЯЮЩИХСЯ НЕЙТРАЛЬНО РЕКУРРЕНТНЫМИ

In the previous papers, the author offered a new theory of topological invariants for the dynamical systems formed by noninvertible inner mappings. These invariants are constructed by using the analogy between the trajectories of homeomorphisms and directions in the set of points with common iteration. In particular, we introduce the sets of neutrally recurrent and neutrally nonwandering points. We also present an example of the so-called “neutrally nonwandering but not neutrally recurrent” points, which shows that these sets do not coincide.

Раніше автором було побудовано нові інваріанти для динамічних систем, що утворені необоротними внутрішніми відображеннями. Ці інваріанти побудовано за аналогією між траєкторіями гомеоморфізмів і напрямами у множині точок, що мають спільну ітерацію. Зокрема, було введено множини нейтрально рекурентних і нейтрально неблукаючих точок. У даній статті наведено приклад відображення з нейтрально неблукаючою, але не нейтрально рекурентною точкою, який показує, що дані множини є різними.

1. Введение. В работах [1, 2] были введены новые топологические инварианты внутренних отображений, для которых в качестве модели были взяты инвариантные множества динамических систем, образованных гомеоморфизмами. При построениях использовали аналогию между траекториями точек гомеоморфизма и направлениями в множестве точек, имеющих общую итерацию. В частности, были введены множества нейтрально рекуррентных и нейтрально неблуждающих точек. Как известно, их аналоги — множества рекуррентных и неблуждающих точек — являются различными (см. пример в [3]). Однако оставался открытым вопрос о том, различны ли множества нейтрально рекуррентных и нейтрально неблуждающих точек. Построенный здесь пример дает на этот вопрос положительный ответ. Полученный результат также является мотивацией для дальнейшего построения „нейтральных” аналогов инвариантных множеств, в частности, для введения „нейтрального” аналога центра Биркгофа.

2. Предварительные сведения. Внутренним отображением будем называть открытое (образ открытого множества открыт) изолированное (прообраз каждой точки состоит из изолированных точек) отображение. Пусть $f\colon X \to X$ — внутренний эндоморфизм локально компактного локально связного метрического пространства X.

Следующие определения были введены в [1, 2]. Обозначим через $O_f^+(x)$ положительную полутраекторию точки x, т. е. множество $\{f^n(x) \mid n \geq 0\}$, через $O_f^-(x)$ отрицательную полутраекторию точки x, т. е. множество $\{f^n(x \mid n < 0\}$. Широкой траекторией $O_f(x)$ точки x назовем множество $\cup_{y \in O_f^+(x)} O_f^-(y)$. В отличие от гомеоморфизмов, для которых траектория точки в точности состоит из ее положительной и отрицательной полутраекторий, у внутренних отображений широкая траектория точки имеет и другие точки. Введем еще одно естественное подмножество широкой траектории точки, которое не пересекается с ее положительной и отрицательной полутраекториями нигде, кроме как в самой точке.

Определение 1. *Нейтральным сечением траектории точки x назовем множество $\{f^{-n}(f^n(x)) \mid n \geq 0\}$. Обозначим ее через $O_f^{\perp}(x)$.*

Как следует из определения, если среди образов x нет периодической точки, а f имеет в точках орбиты более одного прообраза, то широкая траектория точки x распадается на бесконечное число нейтральных сечений, причем каждое нейтральное сечение состоит из бесконечного числа точек.

Определение 2. *Точка x называется периодической с периодом n, если $f^n(x) = x$ и $f^k(x) \neq x$ для $k = 1, \ldots, n-1$.*

Определение 3. *Точка x называется ω-рекуррентной, если она является либо периодической, либо предельной точкой для множества $O_f^+(x) \setminus \{x\}$.*

Определение 4. *Точка x называется α-рекуррентной, если она является либо периодической, либо предельной точкой для множества $O_f^-(x) \setminus \{x\}$.*

Определение 5. *Точка x называется рекуррентной, если x α-рекуррентна или ω-рекуррентна.*

Определение 6. *Точка x называется нейтрально рекуррентной или $\perp$-рекуррентной, если x — граничная точка для множества $O_f^\perp(x) \setminus \{x\}$.*

Определение 7. *Точка x называется блуждающей точкой f, если найдется такая ее окрестность U, что $f^m(U) \cap U = \varnothing$ для всех $m \in \mathbb{Z}$. При этом $U(x)$ называется окрестностью блуждания для x. Иначе точка называется неблуждающей.*

Определение ниже применимо только для локально связных пространств, но в данном случае его достаточно. Общая форма этого определения приведена в [2].

Определение 8. *Точка x называется нейтрально блуждающей или $\perp$-блуждающей точкой f, если найдется такая ее открытая связная окрестность U, что открытое множество $\cup_{n \geq 0} f^{-n}(f^n(U))$ распадается на компоненты связности такие, что каждая компонента связности содержит в точности одно точку из множества $O^\perp(x) = \cup_{n \geq 0}\{f^{-n}(f^n(x))\}$. При этом $U(x)$ называется окрестностью $\perp$-блуждания для x. Иначе точка называется $\perp$-неблуждающей.*

Здесь и везде знак $\perp$ будет синонимом и сокращением слова „нейтрально". Тогда в определениях, приведенных выше, $\perp$-блуждающее означает нейтрально блуждающее, $\perp$-рекуррентное — нейтрально рекуррентное и т. д.

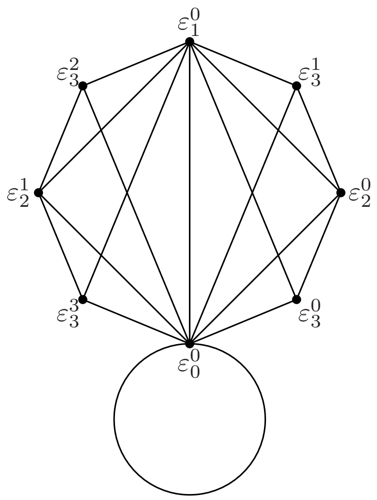
Определение 9. *Точка x называется суперблуждающей точкой f, если она блуждающая и $\perp$-блуждающая.*

Определение 10. *Множество U назовем нейтрально инвариантным относительно f, если для всех $x \in U$ $O_f^\perp(x) \subset U$.*

3. Построение примера. Построим пример внутреннего отображения, у которого есть $\perp$-блуждающая точка, не являющаяся $\perp$-рекуррентной.

Сначала построим топологическое пространство, на котором будет действовать отображение. Рассмотрим комплексные корни из единицы степени 2^k. При $k = 0$ есть один корень, собственно 1. Обозначим его через ε_0^0. При $k = 1$ есть два корня: 1 и -1; 1 уже обозначено через ε_0^0, -1 обозначим через ε_1^0. При $k = 2$ есть четыре корня: 1, -1, i, $-i$; 1 и -1 уже обозначены через ε_0^0 и ε_1^0, i и $-i$ обозначим через ε_2^0 и ε_2^1. По индукции на шаге $k = n$ у нас будет 2^n корней, 2^{n-1} из которых уже обозначены. Оставшиеся корни обозначим по порядку обхода окружности, начиная от 1, как $\varepsilon_n^0 \ldots \varepsilon_n^{2^{n-1}-1}$. Пусть $\Sigma = \{\varepsilon_k^i \mid i = 0, \ldots, 2^{k-1}-1, k \in \mathbb{N}\}$ — так занумерованное счетное множество комплексных корней из единицы степени 2^k, $k \in \mathbb{N}$, с дискретной топологией. Возьмем счетный набор стандартных отрезков $[0,1]$ и приклеим их к множеству кореней по следующему правилу. Для каждой пары корней $(\varepsilon_{k_1}^i, \varepsilon_{k_2}^j)$ такой, что $k_1 > k_2$, приклеим к множеству корней некоторый отрезок $[0,1]$, отождествив 1 с $\varepsilon_{k_1}^i$ и 0 с $\varepsilon_{k_2}^j$. Обозначим такой отрезок через $I_{\varepsilon_{k_1}^i : \varepsilon_{k_2}^j}$. Дополнительно для ε_0^0 приклеим к множеству корней некоторый отрезок $[0,1]$, отождествив его концы 0 и 1 с ε_0^0. Обозначим такой отрезок через $I_{\varepsilon_0^0 : \varepsilon_0^0}$. Полученное одномерное множество обозначим через R.

Заметим, что R — метрическое пространство с метрикой, порожденной уже имеющейся метрикой на отрезках, где расстояние между двумя точками — минимальная длина ломаной, их соединяющей. К примеру, для любой пары корней из Σ расстояние между ними по построению равно либо 1, либо 2.



3-й остов R.

Возьмем счетный набор множеств R и обозначим полученное пространство через $X = \{R_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ (см. рисунок). Чтобы различать точки и отрезки, принадлежащие разным R_i, будем обозначать через $I^m_{\varepsilon^i_{k_1}:\varepsilon^j_{k_2}}$ отрезок $I_{\varepsilon^i_{k_1}:\varepsilon^j_{k_2}} \subset R_m$, а через Σ_m множество корней $\Sigma \subset R_m$.

Зададим на X отображение f. Поскольку мы с каждой точкой из Σ_m связываем комплексное число — корень из 1, можно задать на Σ_m отображение с помощью комплексной функции z^2. Именно, пусть f отображает R_m на R_{m+1} так, что $\varepsilon^i_k \in R_m \mapsto (\varepsilon^i_k)^2 \in R_{m+1}$. Заметим, что под действием z^2, если корень имеет нумерацию ε^i_k, он переходит в ε^j_{k-1} для некоторого допустимого j, кроме ε^0_0, который переходит в ε^0_0. Таким образом, если два корня соединены отрезком, то их образы тоже соединены отрезком, включая случай ε^0_0, для которого есть отрезок, соединяющий ε^0_0 сам с собой. Тогда отрезок $I^m_{\varepsilon^i_{k_1}:\varepsilon^j_{k_2}} \subset R_m$, соединяющий $\varepsilon^i_{k_1}:\varepsilon^j_{k_2} \in R_m$, отображается на отрезок $f(I^m_{\varepsilon^i_{k_1}:\varepsilon^j_{k_2}}) = I^{m+1}_{(\varepsilon^i_{k_1})^2:(\varepsilon^j_{k_2})^2} \subset R_{m+1}$, соединяющий $(\varepsilon^i_{k_1})^2:(\varepsilon^j_{k_2})^2 \in R_{m+1}$. Таким образом, f определен на концах отрезков. Определим f на внутренности каждого отрезка вида $I^m_{\varepsilon^i_{k_1}:\varepsilon^j_{k_2}} \subset R_m$ $\Big($включая и $I^m_{\varepsilon^0_0:\varepsilon^0_0} \subset R_m\Big)$ как отображение $t^{1+k_2-k_1}$ в локальных координатах $[0,1]$. Отображение задано корректно, так как $t^{1+k_2-k_1}$ переводит $[0,1]$ в $[0,1]$. Полученное отображение f определено на каждом множестве R_m, а следовательно, и на X.

По построению f конечнократно: по наследству от z^2 у каждой точки есть ровно два прообраза. Легко видеть, что в сужении на внутренность любого отрезка f — гомеоморфизм. Кроме того, f гомеоморфно отображает малую окрестность каждой вершины на окрестность ее образа. Поэтому по построению f — локальный гомеоморфизм, а следовательно, внутреннее отображение.

Динамика f выглядит следующим образом: блуждающее множество f по построению есть все пространство X. В качестве разделяющей окрестности блуждания для точки $x \in R_m$ можно взять само открыто-замкнутое множество R_m.

Точки, принадлежащие внутренности отрезков, по построению являются суперблуждающими. В качестве разделяющей окрестности для таких точек можно брать внутренность отрезка, которому точка принадлежит. Поскольку эти точки суперблуждающие, то они и $\perp$-блуждающие.

Оставшиеся точки принадлежат множеству корней. По построению это множество нейтрально инвариантно. При этом его точки не являются нейтрально рекуррентными, так как расстояние между двумя корнями по построению не меньше 1. Покажем, что корни принадлежат множеству $\perp$-неблуждающих точек.

Поскольку множество $\perp$-неблуждающих точек нейтрально инвариантно [2], достаточно рассмотреть точку $\varepsilon_0^0 \subset R_m$ для некоторого m. Пусть $B_\delta^m(\varepsilon_0^0) \subset R_m$ — окрестность точки ε_0^0 в R_m, которая является внутренностью мерического шара радиуса δ вокруг точки $\varepsilon_0^0 \in R_m$. Обозначим через P_δ^m подмножество отрезка $I^m_{\varepsilon_0^0:\varepsilon_0^0} \subset R_m$, которое в локальных координатах этого отрезка имеет вид $[0,\delta)$. Тогда $P_\delta^m \subset B_\delta^m(\varepsilon_0^0)$. $f^n(P_\delta^m) = P_\delta^{m+n}$, поскольку $P_\delta^m \subset \subset I^m_{\varepsilon_0^0\,:\,\varepsilon_0^0}$ и f по построению тождественно в локальных координатах как отображение из $I^m_{\varepsilon_0^0\,:\,\varepsilon_0^0}$ в $I^{m+1}_{\varepsilon_0^0\,:\,\varepsilon_0^0}$. Тогда $f^{-n}(f^n(P_\delta^m)) = f^{-n}(P_\delta^{m+n})$. Рассмотрим $f^{-n}(f^n(P_\delta^m)) \cap I^m_{\varepsilon_n^0\,:\,\varepsilon_0^0}$. $\varepsilon_n^0 \in R_m$. По построению $\varepsilon_n^0 \in R_m \overset{f}{\mapsto} \varepsilon_{n-1}^0 \in R_{m+1}$, $\varepsilon_{n-1}^0 \in R_{m+1} \overset{f}{\mapsto} \varepsilon_{n-2}^0 \in R_{m+2}, \ldots, \varepsilon_1^0 \in R_{m+n-1} \overset{f}{\mapsto} \overset{f}{\mapsto} \varepsilon_0^0 \in R_{m+n}$. Соответственно, $I^m_{\varepsilon_n^0:\varepsilon_0^0} \overset{f}{\mapsto} I^{m+1}_{\varepsilon_{n-1}^0:\varepsilon_0^0}$, $I^{m+1}_{\varepsilon_{n-1}^0:\varepsilon_0^0} \overset{f}{\mapsto} I^{m+2}_{\varepsilon_{n-2}^0:\varepsilon_0^0}, \ldots, I^{m+n-1}_{\varepsilon_1^0:\varepsilon_0^0} \overset{f}{\mapsto} I^{m+n}_{\varepsilon_0^0:\varepsilon_0^0}$.

В сужении на эти отрезки f по построению задан в локальных координатах как t^{n+1}, $t^{n+2}, \ldots, t^3$, t^2. Соответственно, композиция $I^m_{\varepsilon_n^0:\varepsilon_0^0} \overset{f^n}{\mapsto} I^{m+n}_{\varepsilon_0^0:\varepsilon_0^0}$ в локальных координатах имеет вид $t^{(n+1)!}$. Тогда $f^{-n}(f^n(P_\delta^m)) \cap I^m_{\varepsilon_n^0:\varepsilon_0^0}$ в локальных координатах на $I^m_{\varepsilon_n^0:\varepsilon_0^0}$ имеет вид $[0, \delta^{\frac{1}{(n+1)!}})$.

Легко видеть, что $P_\delta^m \cap I^m_{\varepsilon_n^0\,:\,\varepsilon_0^0} = (1-\delta, 1]$ в локальных координатах. Для любого $\delta \in (0,1)$ существует такое $n \geq 0$, что $[0, \delta^{\frac{1}{(n+1)!}}) \cap (1-\delta, 1] \neq \varnothing$. Следовательно, для любого $\delta \in (0,1)$ множество $B_\delta^m(\varepsilon_0^0)$ нельзя выделить из множества $f^{-n}(f^n(B_\delta^m(\varepsilon_0^0))$ как компоненту связности. Поскольку множества $B_\delta^m(\varepsilon_0^0)$ образуют базу топологии в точке ε_0^0, то это же справедливо и для любой другой окрестности точки ε_0^0. Как следствие, точка $\varepsilon_0^0 \subset R_m$ является $\perp$-неблуждающей.

Полученное отображение $f : X \to X$ является искомым примером внутреннего отображения, у которого есть $\perp$-блуждающая точка, не являющаяся $\perp$-рекуррентной.

1. *Власенко И. Ю.* Динамика внутренних отображений // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, № 2. – С. 181 – 186.
2. *Власенко И. Ю.* Внутренние отображения: топологические инварианты и их приложения // Математика та її застосування: Праці Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **101**. – 225 с.
3. *Гринес В. З., Починка О. В.* Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три. – М.; Ижевск: РХД, 2011. – 423 с.

Получено 06.05.15