

**В. Е. Капустян, И. А. Пышнограев** (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ”, Киев)

## ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОЛУОПРЕДЕЛЕННЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ТОЧЕЧНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

We consider an optimal control problem for parabolic-hyperbolic equations with nonlocal boundary conditions and semidefinite quality criterion. The optimality conditions are constructed by reducing the problem to a sequence of one-dimensional problems, the optimal control is obtained in the closed form, and its convergence is proved. The form of the quality criterion is substantiated.

Розглядається задача оптимального керування для параболо-гіперболічних рівнянь з нелокальними крайовими умовами та напіввизначеним критерієм якості. Побудовано умови оптимальності шляхом зведення задачі до послідовності одновимірних задач, знайдено оптимальне керування в замкненій формі, доведено його збіжність, а також обґрунтовано вид критерію якості.

**1. Введение.** Одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений является теория краевых задач для уравнений смешанного типа. Такие задачи для уравнений параболического типа изучались во многих работах (см., например, [1–4]). В статье [5] найдены условия существования и единственности решения соответствующей однородной краевой задачи, а в [6] эти результаты расширены на неоднородный случай.

Задачи оптимального управления для уравнений такого типа раньше не рассматривались. В данной работе построено и обосновано оптимальное управление для параболических уравнений с нелокальными краевыми условиями для задачи с полуопределенным критерием.

**2. Постановка задачи.** Пусть управляемый процесс  $y(x, t) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D_-) \cap C^{2,1}(D_+)$  в области  $D$  удовлетворяет уравнению

$$Ly(x, t) = g(x)\hat{u}(t), \quad (1)$$

начальным

$$y(x, -\alpha) = \phi(x) \quad (2)$$

и граничным условиям

$$y(0, t) = 0, \quad y'(0, t) = y'(1, t), \quad -\alpha \leq t \leq T, \quad (3)$$

где  $D = \{(x, t) : 0 < x < 1, -\alpha < t \leq T, \alpha, T > 0\}$ ,  $D_- = \{(x, t) : 0 < x < 1, -\alpha < t \leq 0\}$ ,  $D_+ = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ , функции  $g(x)$ ,  $\phi(x)$  считаем заданными, а их свойства по гладкости будут уточнены ниже,  $\hat{u}(t) = v(t)$ ,  $t \in [-\alpha, 0)$ ;  $\hat{u}(t) = u(t)$ ,  $t \in [0, T]$ ,

$$Ly = \begin{cases} y_t - y_{xx}, & t \geq 0, \\ y_{tt} - y_{xx}, & t < 0. \end{cases}$$

Требуется найти управления  $v^*(t) \in C[-\alpha, 0) : |v^*(t)| \leq 1; |u^*(0)| \leq l_0; \xi^*(t) \in L_2[0, T] : |\xi^*(t)| \leq l_1$  почти всюду на  $[0, T]$ , которые минимизируют функционал

$$I(\hat{u}) = 0,5 \left( \int_0^1 q(x) (y(x, T) - \psi(x)) dx \right)^2 + \gamma \left( \int_{-\alpha}^0 v^2(t) dt + u^2(0) + \int_0^T \xi^2(t) dt \right), \quad (4)$$

где  $\psi(x)$  — фиксированная функция,  $\gamma, l_0, l_1 = \text{const} > 0$ ,

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \xi(\tau) d\tau.$$

Критерий качества (4) относится к классу полуопределенных функционалов: он не обязательно должен быть равен нулю, когда  $\hat{u}(t) = 0, y(x, T) = \psi(x)$ .

**3. Формальное решение задачи управления. 3.1. Сведение к одномерной задаче.** Известно [7], что дифференциальный оператор  $Ly = y''$  и нелокальные условия (3) порождают биортогональный в  $L_2(0, 1)$  базис  $W_0 = \{X_j(x), j = 0, 1, \dots\}, R_0 = \{Y_i(x), i = 0, 1, \dots\}$ , где

$$X_{2k-1}(x) = x \cos(2\pi kx), \quad X_{2k}(x) = \sin(2\pi kx),$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad X_0(x) = x,$$

$$Y_{2k-1}(x) = 4 \cos(2\pi kx), \quad Y_{2k}(x) = 4(1-x) \sin(2\pi kx), \quad k = 1, 2, \dots, \quad Y_0(x) = 2.$$

Тогда сформулированная задача оптимального управления может быть формально сведена к одномерной задаче. С этой целью запишем разложение функции  $q(x)$  по базису  $R_0$ :

$$q(x) = q_0 Y_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (q_{2k-1} Y_{2k-1}(x) + q_{2k} Y_{2k}(x)),$$

где  $q_i = (q, X_i), i = 0, 1, \dots$

Функции  $g(x), \psi(x), y(x, t)$  представим в виде рядов по базису  $W_0$ :

$$g(x) = g_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{2k-1} X_{2k-1}(x) + g_{2k} X_{2k}(x)), \quad (5)$$

$$\psi(x) = \psi_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_{2k-1} X_{2k-1}(x) + \psi_{2k} X_{2k}(x)), \quad (6)$$

$$y(x, t) = y_0(t) X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (y_{2k-1}(t) X_{2k-1}(x) + y_{2k}(t) X_{2k}(x)). \quad (7)$$

Здесь  $g_i = (g, Y_i), \psi_i = (\psi, Y_i), i = 0, 1, \dots$ , а коэффициенты разложения (7) удовлетворяют задаче

$$\frac{dy_0(t)}{dt} = g_0 u(t), \quad t > 0,$$

$$\frac{d^2 y_0(t)}{dt^2} = g_0 v(t), \quad t < 0,$$

$$y_0(-\alpha) = \phi_0,$$

$$\frac{dy_{2k-1}(t)}{dt} + \lambda_k^2 y_{2k-1}(t) = g_{2k-1} u(t), \quad t > 0,$$

$$\frac{d^2 y_{2k-1}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2 y_{2k-1}(t) = g_{2k-1} v(t), \quad t < 0,$$

$$y_{2k-1}(-\alpha) = \phi_{2k-1}, \quad \lambda_k = 2k\pi, \quad (8)$$

$$\frac{dy_{2k}(t)}{dt} + \lambda_k^2 y_{2k}(t) = -2\lambda_k y_{2k-1}(t) + g_{2k} u(t), \quad t > 0,$$

$$\frac{d^2 y_{2k}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2 y_{2k}(t) = -2\lambda_k y_{2k-1}(t) + g_{2k} v(t), \quad t < 0,$$

$$y_{2k}(-\alpha) = \phi_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad y_i(t) \in C^2(-\alpha, T), \quad i \geq 0.$$

Теперь задача оптимального управления сводится к задаче определения управлений  $v^*(t) \in C[-\alpha, 0]: |v^*(t)| \leq 1$ ,  $u^*(0) \leq l_0$ ,  $\xi^*(t) \in L_2[0, T]: |\xi^*(t)| \leq l_1$  почти всюду на  $[0, T]$ , минимизирующих критерий качества

$$I(\hat{u}) = 0,5 \left( \left( \sum_{i=0}^{\infty} q_i (y_i(T) - \psi_i) \right)^2 + \gamma \left( \int_{-\alpha}^0 v^2(t) dt + u^2(0) + \int_0^T \xi^2(t) dt \right) \right) \quad (9)$$

на решениях системы (8), т. е.

$$y_0(T) = \Phi_{1,0}(T)\phi_0 + \Phi_{3,0}(T)u(0) + \int_{-\alpha}^0 g_0 \Psi_{1,0}(t)v(t) dt + \int_0^T g_0 \tilde{\Psi}_{1,0}(t)u(t) dt,$$

$$y_{2k-1}(T) = \Phi_{1,2k-1}(T)\phi_{2k-1} + \Phi_{3,2k-1}(T)u(0) +$$

$$+ \int_{-\alpha}^0 g_{2k-1} \Psi_{1,2k-1}(t)v(t) dt + \int_0^T g_{2k-1} \tilde{\Psi}_{1,2k-1}(t)u(t) dt,$$

$$y_{2k}(T) = \Phi_{1,2k}(T)\phi_{2k-1} + \Phi_{2,2k}(T)\phi_{2k} + \Phi_{3,2k}(T)u(0) +$$

$$+ \int_{-\alpha}^0 (g_{2k-1} \Psi_{1,2k}(t) + g_{2k} \Psi_{2,2k}(t)) v(t) dt +$$

$$+ \int_0^T (g_{2k-1} \tilde{\Psi}_{1,2k}(t) + g_{2k} \tilde{\Psi}_{2,2k}(t)) u(t) dt,$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \Phi_{1,0}(T) &= 1, & \Phi_{3,0}(T) &= g_0 \alpha, & \Psi_{1,0}(t) &= -(\alpha + t), & \tilde{\Psi}_{1,0}(t) &= 1, \\ \Phi_{1,2k-1}(T) &= \frac{1}{\delta_k(\alpha) \exp \lambda_k^2 T}, & \Phi_{3,2k-1}(T) &= \frac{g_{2k-1} \sin \lambda_k \alpha}{\lambda_k \delta_k(\alpha) \exp \lambda_k^2 T}, \\ \Psi_{1,2k-1}(t) &= -\frac{\sin \lambda_k(t + \alpha)}{\lambda_k \delta_k(\alpha) \exp \lambda_k^2 T}, & \tilde{\Psi}_{1,2k-1}(t) &= \exp(-\lambda_k^2(T - t)), \\ \Phi_{1,2k}(T) &= -\frac{\sin \lambda_k \alpha + 2\lambda_k T \delta_k(\alpha) + \alpha(\lambda_k \cos \lambda_k \alpha - \sin \lambda_k \alpha)}{\delta_k^2(\alpha) \exp(\lambda_k^2 T)}, \\ \Phi_{2,2k}(T) &= \Phi_{1,2k-1}(T), \\ \Phi_{3,2k}(T) &= \frac{1}{\lambda_k \delta_k^2(\alpha) \exp(\lambda_k^2 T)} \times \\ &\times \left[ -g_{2k-1} \left( 2\sin^2 \lambda_k \alpha + 2\lambda_k T \delta_k(\alpha) \sin \lambda_k \alpha - \alpha + \frac{\sin 2\lambda_k \alpha}{2\lambda_k} \right) + g_{2k} \delta_k(\alpha) \sin \lambda_k \alpha \right], \\ \Psi_{1,2k}(t) &= \frac{1}{\delta_k^2(\alpha) \exp(\lambda_k^2 T)} \left[ \delta_k(\alpha) \left( \frac{\cos \lambda_k \alpha \sin \lambda_k t}{\lambda_k^2} - \frac{t \cos \lambda_k(t + \alpha)}{\lambda_k} \right) + \right. \\ &+ 2 \sin \lambda_k(t + \alpha) \left( \frac{\sin \lambda_k \alpha}{\lambda_k} + \delta_k(\alpha) \right) + \left. \left( \alpha - \frac{\sin 2\lambda_k \alpha}{2\lambda_k} \right) \left( \sin \lambda_k t - \frac{\cos \lambda_k t}{\lambda_k} \right) \right], \\ \Psi_{2,2k}(t) &= \Psi_{1,2k-1}(t), \\ \tilde{\Psi}_{1,2k}(t) &= -2\lambda_k(T - t) \exp(-\lambda_k^2(T - t)), & \tilde{\Psi}_{2,2k}(t) &= \tilde{\Psi}_{1,2k-1}(t). \end{aligned} \tag{10}$$

С учетом записанных значений  $y_i(T)$  критерий (9) представим в виде

$$\begin{aligned} I(u) &= 0,5 \left[ \left( \int_{-\alpha}^0 A(t)v(t) dt + \int_0^T \left( \int_t^T B(\tau) d\tau \right) \xi(t) dt + \left( M + \int_0^T B(t) dt \right) u(0) + C \right)^2 + \right. \\ &\left. + \gamma \left( \int_{-\alpha}^0 v^2(t) dt + \int_0^T \xi^2(t) dt + u^2(0) \right) \right], \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}
A(t) &= q_0 g_0 \Psi_{1,0}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ q_{2k-1} g_{2k-1} \Psi_{1,2k-1}(t) + q_{2k} \left( g_{2k-1} \Psi_{1,2k}(t) + g_{2k} \Psi_{2,2k}(t) \right) \right], \\
B(t) &= q_0 g_0 \tilde{\Psi}_{1,0}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ q_{2k-1} g_{2k-1} \tilde{\Psi}_{1,2k-1}(t) + q_{2k} \left( g_{2k-1} \tilde{\Psi}_{1,2k}(t) + g_{2k} \tilde{\Psi}_{2,2k}(t) \right) \right], \\
C &= q_0 \Phi_0 \Phi_{1,0}(T) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ q_{2k-1} \Phi_{2k-1} \Phi_{1,2k-1}(T) + q_{2k} \left( \Phi_{2k-1} \Phi_{1,2k}(T) + \Phi_{2k} \Phi_{2,2k}(T) \right) \right] - \sum_{i=0}^{\infty} q_i \Psi_i, \\
M &= q_0 \Phi_{3,0}(T) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( q_{2k-1} \Phi_{3,2k-1}(T) + q_{2k} \Phi_{3,2k}(T) \right).
\end{aligned}$$

Предположим, что ряды, представляющие функции  $A(t)$ ,  $B(t)$ , сходятся равномерно, а ряды, представляющие числа  $C$ ,  $M$ , сходятся.

**3.2. Условия оптимальности.** Функционал (11) имеет единственную точку минимума в силу строгой выпуклости по управлениям. Необходимые и достаточные условия оптимальности для него имеют вид

$$\begin{aligned}
&\int_{-\alpha}^0 \left[ A(t) \left( \int_{-\alpha}^0 A(\tau) v^*(\tau) d\tau + \int_0^T \left( \int_{\tau}^T B(\rho) d\rho \right) \xi^*(\tau) d\tau + \left( M + \int_0^T B(\tau) d\tau \right) u^*(0) + C \right) + \gamma v^*(t) \right] \times \\
&\quad \times [v(t) - v^*(t)] dt \geq 0 \quad \forall |v(t)| \leq 1, \\
&\left[ \left( M + \int_0^T B(\tau) d\tau \right) \left( \int_{-\alpha}^0 A(\tau) v^*(\tau) d\tau + \int_0^T \left( \int_{\tau}^T B(\rho) d\rho \right) \xi^*(\tau) d\tau + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( M + \int_0^T B(\tau) d\tau \right) u^*(0) + C \right) + \gamma u^*(0) \right] \times \\
&\quad \times [u(0) - u^*(0)] \geq 0 \quad \forall |u(0)| \leq l_0, \tag{12} \\
&\int_0^T \left[ \int_t^T B(\tau) d\tau \left( \int_{-\alpha}^0 A(\tau) v^*(\tau) d\tau + \int_0^T \left( \int_{\tau}^T B(\rho) d\rho \right) \xi^*(\tau) d\tau + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( M + \int_0^T B(\tau) d\tau \right) u^*(0) + C \right) + \gamma \xi^*(t) \right] [\xi(t) - \xi^*(t)] dt \geq 0 \quad \forall |\xi(t)| \leq l_1.
\end{aligned}$$

Система вариационных неравенств (12) эквивалентна следующим локальным условиям [8]:

$$v^*(t) = -1,$$

$$A(t) \left( \int_{-\alpha}^0 A(\tau)v^*(\tau) d\tau + \int_0^T \left( \int_{\zeta}^T B(\tau) d\tau \right) \xi^*(\zeta) d\zeta + \right. \\ \left. + C + \left( M + \int_0^T B(\tau) d\tau \right) u^*(0) \right) - \gamma > 0,$$

$$t \in [\underline{\xi}_i, \bar{\xi}_i] \subset [-\alpha, 0), \quad i = \overline{1, V_1},$$

$$|v^*(t)| < 1,$$

$$v^*(t) = -\frac{A(t)}{\gamma} \left( \int_{-\alpha}^0 A(\tau)v^*(\tau) d\tau + \int_0^T \left( \int_{\zeta}^T B(\tau) d\tau \right) \xi^*(\zeta) d\zeta + \right. \\ \left. + C + \left( M + \int_0^T B(\tau) d\tau \right) u^*(0) \right), \quad t \in [\underline{\xi}_i, \bar{\xi}_i] \subset [-\alpha, 0), \quad i = \overline{V_1+1, V_2},$$

$$v^*(t) = 1,$$

$$A(t) \left( \int_{-\alpha}^0 A(\tau)v^*(\tau) d\tau + \int_0^T \left( \int_{\zeta}^T B(\tau) d\tau \right) \xi^*(\zeta) d\zeta + C + \right. \\ \left. + \left( M + \int_0^T B(\tau) d\tau \right) u^*(0) \right) + \gamma < 0, \quad t \in [\underline{\xi}_i, \bar{\xi}_i] \subset [-\alpha, 0), \quad i = \overline{V_2+1, V_3},$$

$$\bigcup_{i=1}^{V_3} [\underline{\xi}_i, \bar{\xi}_i] = [-\alpha, 0),$$

$$u^*(0) = -l_0,$$

$$\left( M + \int_0^T B(\tau) d\tau \right) \left( \int_{-\alpha}^0 A(\tau)v^*(\tau) d\tau + \int_0^T \left( \int_{\tau}^T B(\rho) d\rho \right) \xi^*(\tau) d\tau - \right. \\ \left. - \left( M + \int_0^T B(\tau) d\tau \right) l_0 + C \right) - \gamma l_0 > 0,$$

$$|u^*(0)| < l_0,$$

$$u^*(0) = -\frac{1}{\gamma} \left( M + \int_0^T B(\tau) d\tau \right) \left( \int_{-\alpha}^0 A(\tau)v^*(\tau) d\tau + \right.$$

$$+ \int_0^T \left( \int_{\tau}^T B(\rho) d\rho \right) \xi^*(\tau) d\tau + C + \left( M + \int_0^T B(\tau) d\tau \right) u^*(0), \quad (13)$$

$$u^*(0) = l_0,$$

$$\left( M + \int_0^T B(\tau) d\tau \right) \left( \int_{-\alpha}^0 A(\tau) v^*(\tau) d\tau + \int_0^T \left( \int_{\tau}^T B(\rho) d\rho \right) \xi^*(\tau) d\tau + \left( M + \int_0^T B(\tau) d\tau \right) l_0 + C \right) + \gamma l_0 < 0,$$

$$\xi^*(t) = -l_1,$$

$$\int_t^T B(\tau) d\tau \left( \int_{-\alpha}^0 A(\tau) v^*(\tau) d\tau + \int_0^T \left( \int_{\zeta}^T B(\tau) d\tau \right) \xi^*(\zeta) d\zeta + C + \left( M + \int_0^T B(\tau) d\tau \right) u^*(0) \right) - \gamma l_1 > 0,$$

$$t \in [\underline{\zeta}_i, \bar{\zeta}_i] \subset (0, T], \quad i = \overline{1, U_1},$$

$$|\xi^*(t)| < l_1,$$

$$\xi^*(t) = -\frac{\int_t^T B(\tau) d\tau}{\gamma} \left( \int_{-\alpha}^0 A(\tau) v^*(\tau) d\tau + \int_0^T \left( \int_{\zeta}^T B(\tau) d\tau \right) \xi^*(\zeta) d\zeta + C + \left( M + \int_0^T B(\tau) d\tau \right) u^*(0) \right), \quad t \in [\underline{\zeta}_i, \bar{\zeta}_i] \subset (0, T], \quad i = \overline{U_1+1, U_2},$$

$$\xi^*(t) = l_1,$$

$$\int_t^T B(\tau) d\tau \left( \int_{-\alpha}^0 A(\tau) v^*(\tau) d\tau + \int_0^T \left( \int_{\zeta}^T B(\tau) d\tau \right) \xi^*(\zeta) d\zeta + C + \left( M + \int_0^T B(\tau) d\tau \right) u^*(0) \right) + \gamma l_1 < 0, \quad t \in [\underline{\zeta}_i, \bar{\zeta}_i] \subset (0, T], \quad i = \overline{U_2+1, U_3},$$

$$\bigcup_{i=1}^{U_3} [\underline{\zeta}_i, \bar{\zeta}_i] = (0, T].$$

Рассмотрим сначала случай, когда  $|v^*(t)| < 1$ ,  $|u^*(0)| < l_0$ ,  $|\xi^*(t)| < l_1$ . Тогда из (13) находим

$$v^*(t) = -\frac{A(t)C}{\gamma + \left(M + \int_0^T B(\tau) d\tau\right)^2}, \quad t \in [-\alpha, 0),$$

$$u^*(0) = -\frac{\left(M + \int_0^T B(\tau) d\tau\right)C}{\gamma + \left(M + \int_0^T B(\tau) d\tau\right)^2}, \tag{14}$$

$$\xi^*(t) = -\frac{\int_t^T B(\tau) d\tau C}{\gamma + \left(M + \int_0^T B(\tau) d\tau\right)^2}, \quad t \in (0, T],$$

где  $C = C_1 + C_2$ , а числа  $C_1 = \int_{-\alpha}^0 A(\tau)v^*(\tau) d\tau$ ,  $C_2 = \int_0^T \left(\int_\tau^T B(\zeta) d\zeta\right) \xi^*(\tau) d\tau$  определяются из системы уравнений

$$\left(\gamma + \left(M + \int_0^T B(\tau) d\tau\right)^2 + \int_{-\alpha}^0 A^2(t) dt\right) C_1 + \int_{-\alpha}^0 A^2(t) dt C_2 = -C \int_{-\alpha}^0 A^2(t) dt,$$

$$\int_0^T \left(\int_t^T B(\tau) d\tau\right)^2 dt C_1 + \left(\gamma + \left(M + \int_0^T B(\tau) d\tau\right)^2 + \int_0^T \left(\int_\tau^T B(\zeta) d\zeta\right)^2 d\tau\right) C_2 =$$

$$= -C \int_0^T \left(\int_\tau^T B(\zeta) d\zeta\right)^2 d\tau. \tag{15}$$

Система уравнений (15) однозначно разрешима, так как имеет отличный от нуля определитель. Тогда формулы (14) примут окончательный вид

$$v^*(t) = -\frac{A(t)C}{\gamma + \left(M + \int_0^T B(\tau) d\tau\right)^2 + \int_{-\alpha}^0 A^2(\tau) d\tau + \int_0^T \left(\int_\tau^T B(\zeta) d\zeta\right)^2 d\tau}, \quad t \in [-\alpha, 0);$$

$$u^*(0) = -\frac{\left(M + \int_0^T B(\tau) d\tau\right)C}{\gamma + \left(M + \int_0^T B(\tau) d\tau\right)^2 + \int_{-\alpha}^0 A^2(\tau) d\tau + \int_0^T \left(\int_\tau^T B(\zeta) d\zeta\right)^2 d\tau}, \tag{16}$$



$$\xi^*(t) = \frac{\int_t^T B(\tau) d\tau C}{\gamma + \left(M + \int_0^T B(\tau) d\tau\right)^2 + \int_{-\alpha}^0 A^2(\tau) d\tau + \int_0^T \left(\int_t^T B(\zeta) d\zeta\right)^2 d\tau}, \quad t \in (0, T].$$

Теперь рассмотрим случай, когда управление выходит на ограничение. Вернемся к условиям оптимальности (13) и положим  $V_1 = 1$ ,  $V_2 = 2$ ,  $V_3 = 0$ ,  $\xi_1 = -\alpha$ ,  $\bar{\xi}_1 = \xi_2$ ,  $\bar{\xi}_2 = 0$ ,  $U_i = 0$ ,  $i = \overline{1, 3}$ . Тогда искомые управления характеризуются условиями

$$v^*(t) = -1, \quad A(t) \left( \int_{\bar{\xi}_1}^0 A(\tau) v^*(\tau) d\tau + C(\bar{\xi}_1) \right) > \gamma, \quad t \in [-\alpha, \bar{\xi}_1),$$

$$|v^*(t)| < 1, \quad v^*(t) = -\frac{1}{\gamma} A(t) \left( \int_{\bar{\xi}_1}^0 A(\tau) v^*(\tau) d\tau + C(\bar{\xi}_1) \right), \quad t \in [\bar{\xi}_1, 0),$$

$$u^*(0) = 0, \quad \xi^*(t) = 0, \quad t \in (0, T],$$

где

$$C(\bar{\xi}_1) = C - \int_{-\alpha}^{\bar{\xi}_1} A(\tau) d\tau.$$

Далее, как и в предыдущем случае, получаем управление

$$v^*(t) = -1, \quad t \in [-\alpha, \bar{\xi}_1), \tag{17}$$

$$v^*(t) = -\frac{A(t)C(\bar{\xi}_1)}{\gamma + \int_{\bar{\xi}_1}^0 A^2(t) dt}, \quad t \in [\bar{\xi}_1, 0),$$

зависящее от параметра  $\bar{\xi}_1$ , который определяется из условий

$$\frac{A(\bar{\xi}_1)C(\bar{\xi}_1)}{\gamma + \int_{\bar{\xi}_1}^0 A^2(t) dt} = 1, \quad \frac{dv^*(\bar{\xi}_1 + 0)}{dt} > 0.$$

Другие варианты реализаций управлений (13) анализируются аналогично.

**4. Обоснование результатов.** Убедимся в сходимости рядов из (11). С этой целью оценим функции из (10):

$$|\Phi_{1,0}(T)| = 1, \quad |\Phi_{3,0}(T)| = \alpha |g_0|, \quad |\Psi_{1,0}(t)| \leq \alpha, \quad |\tilde{\Psi}_{1,0}(t)| = 1,$$

$$\begin{aligned}
 |\Phi_{1,2k-1}(T)| &\leq \frac{C}{\exp(\lambda_k^2 T)}, \quad |\Phi_{3,2k-1}(T)| \leq \frac{C |g_{2k-1}|}{\lambda_k \exp(\lambda_k^2 T)}, \\
 |\Psi_{1,2k-1}(t)| &\leq \frac{C}{\lambda_k \exp(\lambda_k^2 T)}, \quad |\tilde{\Psi}_{1,2k-1}(t)| \leq 1, \\
 |\Phi_{1,2k}(T)| &\leq C \frac{1+(2\lambda_k T + \alpha)(1+\lambda_k)}{\exp(\lambda_k^2 T)} < C \frac{\lambda_k^2}{\exp(\lambda_k^2 T)}, \\
 |\Phi_{2,2k}(T)| &= |\Phi_{1,2k-1}(T)|, \\
 |\Phi_{3,2k}(T)| &\leq \frac{C}{\lambda_k \exp(\lambda_k^2 T)} \left[ |g_{2k-1}| \left( 2 + 2\lambda_k T(1+\lambda_k) + \alpha + \frac{1}{2\lambda_k} \right) + |g_{2k}| (1 + \lambda_k) \right] < \\
 &< \frac{C}{\exp(\lambda_k^2 T)} [ |g_{2k-1}| \lambda_k + |g_{2k}| ], \\
 |\Psi_{1,2k}(t)| &\leq \frac{C}{\exp(\lambda_k^2 T)} \left[ (1+\lambda_k) \left( \frac{1}{\lambda_k^2} + \frac{\alpha}{\lambda_k} \right) + \right. \\
 &+ 2 \left( \frac{1}{\lambda_k} + 1 + \lambda_k \right) + \left. \left( \alpha + \frac{1}{2\lambda_k} \right) \left( 1 + \frac{1}{\lambda_k} \right) \right] < \frac{C \lambda_k}{\exp(\lambda_k^2 T)}, \\
 |\Psi_{2,2k}(t)| &= |\Psi_{1,2k-1}(t)|, \\
 |\tilde{\Psi}_{1,2k}(t)| &\leq \frac{C}{\lambda_k}, \quad |\tilde{\Psi}_{2,2k}(t)| = |\tilde{\Psi}_{1,2k-1}(t)|.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Тогда с учетом (18) справедливы оценки

$$\begin{aligned}
 |A(t)| &\leq |q_0| |g_0| |\Psi_{1,0}(t)| + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ |q_{2k-1}| |g_{2k-1}| |\Psi_{1,2k-1}(t)| + \right. \\
 &\quad \left. + |q_{2k}| ( |g_{2k-1}| |\Psi_{1,2k}(t)| + |g_{2k}| |\Psi_{2,2k}(t)| ) \right] < \\
 &< C \left[ |q_0| |g_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|q_{2k-1}| |g_{2k-1}| + |q_{2k}| ( |g_{2k-1}| \lambda_k + |g_{2k}| )}{\exp(\lambda_k^2 T)} \right], \\
 |B(t)| &\leq |q_0| |g_0| |\tilde{\Psi}_{1,0}(t)| + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ |q_{2k-1}| |g_{2k-1}| |\tilde{\Psi}_{1,2k-1}(t)| + \right. \\
 &\quad \left. + |q_{2k}| ( |g_{2k-1}| |\tilde{\Psi}_{1,2k}(t)| + |g_{2k}| |\tilde{\Psi}_{2,2k}(t)| ) \right] <
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< C \left[ |q_0| |g_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ |q_{2k-1}| |g_{2k-1}| + |q_{2k}| \left( |q_{2k-1}| \frac{1}{\lambda_k} + |g_{2k}| \right) \right] \right], \quad (19) \\
&|C| \leq |q_0| |\phi_0| |\Phi_{1,0}(T)| + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ |q_{2k-1}| |\phi_{2k-1}| |\Phi_{1,2k-1}(T)| + \right. \\
&\quad \left. + |q_{2k}| (|\phi_{2k-1}| |\Phi_{1,2k}(T)| + |\phi_{2k}| |\Phi_{2,2k}(t)|) \right] + \sum_{i=0}^{\infty} |q_i| |\psi_i| < \\
&< C \left[ |q_0| |\phi_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|q_{2k-1}| |\phi_{2k-1}| + |q_{2k}| (|\phi_{2k-1}| \lambda_k^2 + |\phi_{2k}|)}{\exp(\lambda_k^2 T)} + \sum_{i=0}^{\infty} |q_i| |\psi_i| \right], \\
&|M| \leq |q_0| |\Phi_{3,0}(T)| + \sum_{k=1}^{\infty} (|q_{2k-1}| |\Phi_{3,2k-1}(T)| + |q_{2k}| |\Phi_{3,2k}(T)|) < \\
&< C \left[ |q_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|q_{2k-1}| |g_{2k-1}| + |q_{2k}| (|g_{2k-1}| \lambda_k + |g_{2k}|)}{\exp(\lambda_k^2 T)} \right].
\end{aligned}$$

Из [6] следует, что для функции  $\phi(x)$  сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^4 |\phi_{2k-1}| + \lambda_k^3 |\phi_{2k}|). \quad (20)$$

Кроме того, из [6] следует, что функция  $g(x)$  должна быть такой, для которой сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |g_{2k-1}| + \lambda_k^2 |g_{2k}|). \quad (21)$$

Условия на функцию  $g(x)$ , обеспечивающие сходимость ряда (21), находятся аналогично условиям на функцию  $\phi(x)$  и имеют вид  $g(x) \in C^4[0, 1]$ ,  $g(0) = g''(0) = 0$ ,  $g'(0) = g'(1)$ ,  $g'''(0) = g'''(1)$ .

Функции  $q(x)$  и  $\psi(x)$  можно взять из пространства  $L_2(0, 1)$ . Тогда ряды из правых частей неравенств (19) будут сходящимися с учетом сходимости рядов (20), (21). Более того, за счет наличия под знаком суммы множителя  $\exp(-\lambda_k^2 T)$  будет равномерно сходиться и ряд для производной функции  $A(t)$ . Тем самым справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть в задаче оптимального управления (1) – (3), (4):

- 1) выполнены условия из [5];
- 2)  $g(x) \in C^4[0, 1]$ ,  $g(0) = g''(0) = 0$ ,  $g'(0) = g'(1)$ ,  $g'''(0) = g'''(1)$ ;

3)  $q(x), \psi(x) \in L_2(0, 1)$ ;

4)  $|v^*(t)| < 1, |u^*(0)| < l_0, |\xi^*(t)| < l_1$ , где функции  $v^*(t), u^*(0), \xi^*(t)$  заданы формулами (16).

Тогда формулы (16) представляют собой единственное решение задачи (1)–(3), (4).

**Теорема 2.** Пусть в задаче оптимального управления (1)–(3), (4) выполнены условия 1–3 теоремы 1 и

$$A(t) \left( \int_{\bar{\xi}_1}^0 A(\tau)v^*(\tau) d\tau + C(\bar{\xi}_1) \right) > \gamma, \quad t \in [-\alpha, \bar{\xi}_1),$$

$$\left| A(t) \left( \int_{\bar{\xi}_1}^0 A(\tau)v^*(\tau) d\tau + C(\bar{\xi}_1) \right) \right| < \gamma, \quad t \in [\bar{\xi}_1, 0),$$

$$u^*(t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

где

$$C(\bar{\xi}_1) = C - \int_{-\alpha}^{\bar{\xi}_1} A(\tau) d\tau,$$

а точка  $\bar{\xi}_1 \in (-\alpha, 0)$  — единственное решение уравнения

$$A(t) \left( \int_{\bar{\xi}_1}^0 A(\tau)v^*(\tau) d\tau + C(\bar{\xi}_1) \right) = \gamma.$$

Тогда формулы (17) представляют собой единственное решение задачи (1)–(3), (4).

В заключение этого пункта остановимся на вопросе о целесообразности включения в критерий качества (4) слагаемого

$$0,5\gamma \left( u^2(0) + \int_0^T \xi^2(t) dt \right) \tag{22}$$

вместо традиционного

$$0,5\gamma \int_0^T u^2(t) dt.$$

Для упрощения рассуждений положим  $v(t) = 0, t \in [-\alpha, 0)$ . Рассмотрим такую задачу оптимального управления: найти управление  $u^*(t) \in C[0, T]$ , которое минимизирует функционал

$$I_1(u) = 0,5 \left( \left( \int_0^1 q(x) (y(x, T) - \psi(x)) dx \right)^2 + \gamma \left( \int_0^T u^2(t) dt \right) \right), \quad (23)$$

где  $y(x, t)$  — решение краевой задачи (1)–(3).

Функционал (23) представим в виде

$$I_1(u) = 0,5 \left( \left( \int_0^T B(t)u(t) dt + Mu(0) + C \right)^2 + \gamma \int_0^T u^2(t) dt \right).$$

Предположим, что функции  $\phi(x)$ ,  $g(x)$ ,  $q(x)$ ,  $\psi(x)$  удовлетворяют условиям теоремы 1, т. е.  $B(t) \in C[0, T]$ , а  $M$ ,  $C$  — действительные числа.

Очевидно, что  $\inf_u I_1(u) = 0$ . Рассмотрим последовательность непрерывных функций

$$u_n(t) = \begin{cases} -\frac{C}{M} + n \frac{C}{M} t, & t \in \left[ 0, \frac{1}{n} \right], \\ 0, & t \in \left( \frac{1}{n}, T \right], \quad M \neq 0. \end{cases} \quad (24)$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_1(u_n) &= 0,5 \left( \left( \int_0^{1/n} B(t) \left( -\frac{C}{M} + n \frac{C}{M} t \right) dt \right)^2 + \gamma \int_0^{1/n} \left( -\frac{C}{M} + n \frac{C}{M} t \right)^2 dt \right) \leq \\ &\leq 0,5 \left( \frac{C}{M} \right)^2 \left( \left( \max_{t \in [0, T]} B(t) \right)^2 \frac{1}{n^2} + \gamma \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что последовательность (24) является минимизирующей, но

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = \begin{cases} -\frac{C}{M}, & t = 0, \\ 0, & t \in (0, T], \end{cases}$$

представляет собой разрывную функцию. Тем самым мы показали, что рассматриваемая здесь задача оптимального управления не имеет решения, т. е. переход к критерию (4) является оправданным. Более того, вместо слагаемого (22) в критерий качества (4) можно внести, например, слагаемое

$$0,5 \gamma \int_0^T (u^2(t) + \xi^2(t)) dt.$$

Соответствующая задача оптимального управления будет однозначно разрешимой, однако условия оптимальности (в случае отсутствия ограничений на управления) будут выражаться в виде системы интегральных уравнений с симметричными ядрами, т. е. их явный вид получить не удастся.

Если  $M = 0$ , то описанный выше эффект не имеет места и вместо критерия (4) можно рассматривать критерий вида

$$I_1(\hat{u}) = 0,5 \left( \left( \int_0^1 q(x) (y(x, T) - \psi(x)) dx \right)^2 + \gamma \left( \int_{-\alpha}^0 v^2(t) dt + \int_0^T u^2(t) dt \right) \right).$$

1. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1959. – **14**, № 3. – С. 3 – 19.
2. Beilin S. A. Existence of solutions for one-dimensional wave equations with non-local conditions // Electron. J. Different. Equat. – 2001. – **56**. – P. 1 – 8.
3. Renardy M., Hrusa W., Nohel J. A. Mathematical problems in viscoelasticity. – London: Longman, 1987. – 273 p.
4. Ashyralyev A., Yurtsever A. On a nonlocal boundary value problem for semilinear hyperbolic-parabolic equations // Nonlinear Anal. – 2001. – **47**. – P. 3585 – 3592.
5. Сабитов К. Б. Краевая задача для уравнений парабола-гиперболического типа с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. – 2010. – **46**, № 10. – С. 1468 – 1478.
6. Капустян В. Е., Пышинограев И. А. Условия существования и единственности решения парабола-гиперболического уравнения с нелокальными граничными условиями // Науч. вестн. НТУУ „КПИ”. – 2012. – **4**. – С. 72 – 86.
7. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 2. – С. 294 – 304.
8. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных. – М.: Мир, 1972. – 412 с.

Получено 26.08.14