УДК 517.946

М. В. Гончаренко (Физ.-техн. ин-т низких температур НАН Украины, Харьков),
Л. А. Хилькова (Ин-т хим. технологий Восточноукр. нац. ун-та им. В. Даля, Рубежное)

УСРЕДНЕННАЯ МОДЕЛЬ ДИФФУЗИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНЫМ ПОГЛОЩЕНИЕМ НА ГРАНИЦЕ

We consider a boundary-value problem used to describe the process of stationary diffusion in a porous medium with nonlinear absorption on the boundary. We study the asymptotic behavior of the solution when the medium becomes more and more porous and denser located in a bounded domain Ω. A homogenized equation for the description the main term of the asymptotic expansion is constructed.

Розглядається крайова задача, яка описує процес стаціонарної дифузії в пористому середовищі з нелінійним поглинанням на межі. Вивчається асимптотична поведінка розв'язку, коли середовище стає все більш пористим і розташоване все більш щільно в обмеженій області Ω. Побудовано усереднене рівняння, що описує головний член асимптотики.

1. Введение. Усреднению уравнения диффузии в пористой среде с поглощением на границе области посвящено большое количество работ. Одной из первых была работа [1], в которой рассматривалась задача нестационарной диффузии с линейным поглощением на границе. В работах [2 – 6] была построена усредненная модель диффузии с нелинейным поглощением на границе. В работах [7 – 9] уравнение диффузии рассматривалось в пористой среде с нелинейными краевыми взаимодействиями нескольких типов. В работе [10] построены асимптотические разложения квазилинейных и линейных задач с различными типами граничных условий, в том числе и нелинейными. Во всех этих работах пористая среда считается периодической, т. е. уравнение диффузии рассматривается в дополнении к периодически расположенным твердым частицам. Такая структура пористой среды является модельной. Более естественна с физической точки зрения связная структура пористой среды, являющаяся дополнением к связному множеству (твердой фракции среды).

В настоящей работе мы рассматриваем уравнение стационарной диффузии с нелинейным поглощением на поверхности без предположения о периодичности. Геометрия пористой среды предполагается произвольной с одним существенным ограничением: среда должна удовлетворять условию сильной связности [11] (гл. 3).

Пусть Ω — ограниченная область в R^n $n \geq 2$, F^ε — замкнутое множество в Ω, которое может быть связным и зависит от малого параметра ε так, что при $\varepsilon \to 0$ множество F^ε становится все более пористым и располагается все более плотно в Ω. Будем предполагать, что граница множества F^ε гладкая.

В области $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus F^\varepsilon$ рассматривается краевая задача

$$\begin{aligned} &-\Delta u^\varepsilon = f^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon, \\ &\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} + \sigma^\varepsilon(x, u^\varepsilon) = 0, \quad x \in \partial F^\varepsilon, \qquad (1.1) \\ &u^\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \end{aligned}$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа, ν — единичная нормаль к границе ∂F^ε, внешняя по отношению к области Ω^ε; функция $f^\varepsilon(x)$ принадлежит $L^2(\Omega^\varepsilon)$, функция $\sigma^\varepsilon(x,u)$ считается заданной и удовлетворяет определенным условиям монотонности и ограниченности роста. Задача (1.1) описывает процесс стационарной диффузии в пористой среде с поглощением на границе. Функция u^ε является концентрацией диффундирующего вещества.

Основная цель данной работы — изучение асимптотического поведения обобщенного решения $u^\varepsilon(x)$ задачи (1.1) при $\varepsilon \to 0$.

Мы покажем, что функция $u^\varepsilon(x)$ при определенных условиях сходится к функции $u(x)$, являющейся обобщенным решением усредненной задачи

$$
\begin{gathered}
-\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \frac{1}{2}c_u(x,u) = f(x), \quad x \in \Omega, \\
u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

Здесь $\{a_{ik}\}_{i,k=1}^{n}$ — симметричный положительно определенный тензор, характеризующий проводимость пористой среды, $c_u(x,u) = \dfrac{\partial}{\partial u}c(x,u)$ и функция $c(x,u)$ характеризует поглощающие свойства границы ∂F^ε.

Для определения свойств проводимости и поглощения микроструктуры среды вводятся так называемые мезоскопические характеристики. Такие характеристики описаны в [11]. Они позволяют рассматривать среду с произвольной (непериодической) структурой. Основной результат формулируется при условиях существования плотности этих характеристик. Выполнение этих условий проверяется на конкретных примерах, в частности на квазипериодических структурах.

Метод доказательства, который мы используем, можно назвать методом мезоскопических характеристик. Он был развит в [11]. По сути метод является энергетическим и его основная идея близка к Г-сходимости (см. [12 – 14]).

Отметим, что для изучения периодических структур было развито много достаточно эффективных методов, среди которых энергетический метод Тартара [15], метод асимптотических разложений [16], компенсированной компактности [17], двухмасштабной сходимости [18], unfolding метод [19]. Однако все эти методы не позволяют рассматривать среду с произвольной непериодической структурой. В данной работе мы получим общий результат для произвольной пористой среды при условии существования плотности мезоскопических характеристик. Проверка выполнения этих условий будет проведена в нашей следующей работе для области квазипериодической структуры.

2. Постановка задачи и основной результат. Постановка задачи и основной результат Пусть Ω — ограниченная область в R^n, $n \geq 2$, F^ε — замкнутое множество в Ω с гладкой границей. В области $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus F^\varepsilon$ рассмотрим краевую задачу (1.1).

Будем предполагать, что функция $\sigma^\varepsilon(x,s)$ удовлетворяет следующим условиям:

a$_1$) $\sigma^\varepsilon(x,s) \in C(\Omega \times R^1)$, $\sigma^\varepsilon(x,0) = 0$;

a$_2$) условию монотонности: $\forall\, s, r \in R^1 : (\sigma^\varepsilon(x,s) - \sigma^\varepsilon(x,r))(s-r) \geq 0$;

a$_3$) условию ограниченности роста по $s : \forall\, s \in R^1 : |\sigma^\varepsilon(x,s)| \le \hat{\sigma}^\varepsilon(x)(1+s^{\Theta_1}),\ \Theta_1 < \dfrac{n}{n-2}$, $\hat{\sigma}^\varepsilon(x) \in C(\Omega)$;

a$_4$) условию слабого (при $\varepsilon \to 0$) поглощения на границе, т. е. для любого шара $B(\rho, z)$ радиуса ρ с центром в точке $z \in \Omega$ при достаточно малых ε ($\varepsilon < \varepsilon_0(\rho)$)

$$\int\limits_{\partial F^\varepsilon \cap B(\rho,z)} \hat{\sigma}^\varepsilon(x) d\Gamma < C\rho^n,$$

где постоянная C не зависит от z, ρ и ε.

Определение 2.1. *Обобщенным решением задачи* (1.1) *будем называть функцию* $u^\varepsilon(x)$ *из пространства* $\mathring{H}^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega) = \{u(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$, *удовлетворяющую тождеству*

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} [(\nabla u^\varepsilon, \nabla\varphi^\varepsilon) - f^\varepsilon \varphi^\varepsilon]\, dx + \int\limits_{\partial F^\varepsilon} \sigma^\varepsilon(x, u^\varepsilon)\varphi^\varepsilon\, d\Gamma = 0 \quad \forall \varphi^\varepsilon(x) \in \mathring{H}^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega). \tag{2.1}$$

Определение 2.2. *Обобщенным решением задачи* (1.2) *будем называть функцию* $u(x) \in \in \mathring{H}^1(\Omega)$, *удовлетворяющую тождеству*

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} c_u(x,u)\varphi d\Gamma = \int\limits_{\Omega} f\varphi dx \quad \forall \varphi(x) \in \mathring{H}^1(\Omega). \tag{2.2}$$

Существование и единственность решения $u^\varepsilon(x)$ задачи (1.1) и решения $u(x)$ задачи (1.2) при сделанных предположениях доказана, например, в [20].

Для определения тензора проводимости $\{a_{ik}\}_{i,k=1}^n$ и функции поглощения $c(x,u)$, которые содержатся в усредненной задаче, введем так называемые мезоскопические характеристики областей Ω^ε. Это локальные характеристики микроструктуры, рассматриваемые в кубе $K_h^z = K(z,h)$ с центром в точке z и ребрами длиной h , ориентированными по координатным осям. Такой куб имеет промежуточный размер между масштабом микроструктуры и размером области Ω ($0 < \varepsilon \ll h \ll 1$), поэтому его можно назвать „мезокубом”.

На рисунке показан пример пористой области Ω^ε и куба K_h^z. Здесь множество F^ε не связно (мелкозернистая структура), но в работе оно может быть произвольным, в том числе и связным.

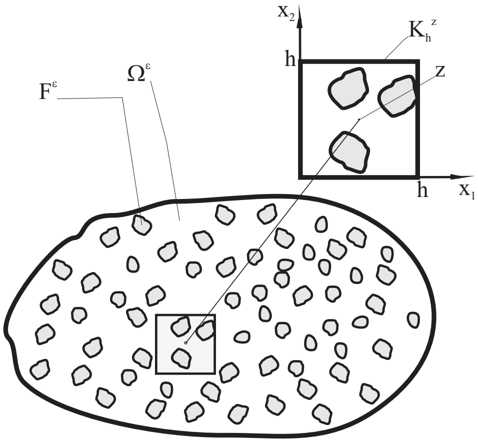
Количественную характеристику проводимости зададим с помощью функционала относительно произвольного вектора $\ell \in R^n$

$$T_{h,z}^\varepsilon(\ell) = \inf_{v^\varepsilon} \int\limits_{K_h^z \cap \Omega^\varepsilon} \left(|\nabla v^\varepsilon|^2 + h^{-2-\tau}|v^\varepsilon - (x-z,\ell)|^2\right) dx, \tag{2.3}$$

где нижняя грань берется в классе функций $v^\varepsilon(x) \in H^1(K_h^z \cap \Omega^\varepsilon)$, $\tau \in (0,2)$ — параметр штрафа.

В [11, c. 179] доказано, что этот функционал является однородно квадратичным относительно ℓ, т. е. справедливо следующее представление:

$$T_{h,z}^\varepsilon(\ell) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(z,\varepsilon,h)\ell_i\ell_k, \tag{2.4}$$



Пористая область Ω^ε и мезокуб K_h^z.

где коэффициенты $a_{ik}(z,\varepsilon,h)$ определяются формулой

$$a_{ik}(z,\varepsilon,h)=\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon}\left\{(\nabla v_i^\varepsilon,\nabla v_k^\varepsilon)+h^{-2-\tau}\left[v_i^\varepsilon-(x_i-z_i)\right]\left[v_k^\varepsilon-(x_k-z_k)\right]\right\}dx, \tag{2.5}$$

v_i^ε — функция, на которой достигается нижняя грань в (2.3) при $\ell=e^i$, — орт оси x_i.

Из (2.4) и (2.5) следует, что система чисел $\{a_{ik}(z,\varepsilon,h)\}_{i,k=1}^n$ образует симметричный положительно определенный тензор в R^n. Этот тензор характеризует проводимость областей Ω^ε.

Количественную характеристику поглощения на границе ∂F^ε зададим с помощью функционала относительно произвольного $s\in R^1$

$$c(z,s;\varepsilon,h)=\inf_{w^\varepsilon}\left[\int\limits_{K_h^z\cap\Omega^\varepsilon}\left\{|\nabla w^\varepsilon|^2+h^{-2-\tau}|w^\varepsilon-s|^2\right\}dx+\int\limits_{K_h^z\cap\partial F^\varepsilon}g^\varepsilon(x,w^\varepsilon)d\Gamma\right], \tag{2.6}$$

где инфимум берется в классе функций $w^\varepsilon\in H^1(K_h^z\cap\Omega^\varepsilon)$, $\tau\in(0,2)$ — параметр штрафа, а функция $g^\varepsilon(x,s)$ определена формулой

$$g^\varepsilon(x,s)=2\int\limits_0^s\sigma^\varepsilon(x,r)dr. \tag{2.7}$$

Из свойств a_1), a_2) функции $\sigma^\varepsilon(x,s)$ следует, что $g^\varepsilon(x,s)\ge 0$ для любых $x\in\Omega$, $s\in R^1$.

Будем предполагать, что система областей $\Omega^\varepsilon\subset\Omega$ удовлетворяет условию сильной связности, т. е. для любой функции $v^\varepsilon(x)\in H^1(\Omega^\varepsilon)$ существует функция $\tilde v^\varepsilon(x)\in H^1(\Omega)$ такая, что $v^\varepsilon(x)=\tilde v^\varepsilon(x)$ при $x\in\Omega^\varepsilon$ и выполняется неравенство

$$\|\tilde v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}\le C\,\|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}\,. \tag{2.8}$$

***Замечание* 2.1.** Понятие „сильной связности” было введено в работе [21]. В более поздних работах это условие называется также условием продолжения.

Определение 2.3. *Последовательность функций $u^\varepsilon(x) \in L^p(\Omega^\varepsilon)$ будем называть сходящейся в $L^p(\Omega^\varepsilon, \Omega)$, если существует функция $u(x) \in L^p(\Omega)$ такая, что u^ε сходится к $u(x)$ по норме в $L^p(\Omega^\varepsilon)$:*

$$\|u^\varepsilon - u\|^p_{L^p(\Omega^\varepsilon)} = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |u^\varepsilon(x) - u(x)|^p \, dx \to 0 \quad \text{\it при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Асимптотическое поведение решения задачи (1.1) при $\varepsilon \to 0$ описывается следующей теоремой.

Теорема 2.1. *Пусть области Ω^ε являются сильно связными и существует $\tau \in (0, 2)$, при котором равномерно по $x \in \Omega$ выполняются условия*:

1) $\lim_{h\to 0} \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \dfrac{a_{ik}(x,\varepsilon,h)}{h^n} = \lim_{h\to 0} \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \dfrac{a_{ik}(x,\varepsilon,h)}{h^n} = a_{ik}(x)$, *где* $a_{ik}(x)$ — *кусочно-непрерывные функции от* x *и* $\{a_{ik}(x)\}^n_{i,k=1}$ — *положительно определенный, симметричный тензор в* R^n;

2) $\lim_{h\to 0} \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \dfrac{c(x,s;\varepsilon,h)}{h^n} = \lim_{h\to 0} \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \dfrac{c(x,s;\varepsilon,h)}{h^n} = c(x,s)$ $\forall s \in R^1$, *где функция* $c(x,s)$ *ограничена по* x *и дифференцируема по* s *и ее производная* $c_s(x,s) \equiv \dfrac{\partial}{\partial s} c(x,s)$ *удовлетворяет условиям*

$$\forall\, s_1, s_2 \in R^1 : (c_s(x,s_1) - c_s(x,s_2))(s_1 - s_2) \geq 0, \tag{2.9}$$

$$\forall\, s \in R^1 : c_s(x,s) \leq C(1 + |s|^{\Theta_2}), \quad \text{\it где} \quad \Theta_2 < \frac{n+2}{n-2}; \tag{2.10}$$

3) *функция $f^\varepsilon(x)$, продолженная нулем на F^ε, сходится слабо в $L^2(\Omega)$ к функции $f(x)$.*

Тогда обобщенное решение $u^\varepsilon(x)$ задачи (1.1) *сходится в* $L^p(\Omega^\varepsilon, \Omega)$ $\left(p \leq \dfrac{2n}{n-2}\right)$ *к функции $u(x)$, являющейся обобщенным решением краевой задачи* (1.2).

***Замечание* 2.2.** Поскольку мезоскопические характеристики $a_{ik}(x,\varepsilon,h)$ и $c(x,s;\varepsilon,h)$ зависят от параметра штрафа τ, то предельные функции $a_{ik}(x)$ и $c(x,s)$ формально также должны зависеть от τ. Однако в теореме 2.1 утверждается, что если условия 1, 2 выполняются при некотором $\tau \in (0, 2)$, то решение $u^\varepsilon(x)$ задачи (1.1) сходится к решению $u(x)$ предельной задачи (1.2) при любой правой части $f(x)$. Это решение не должно зависеть от τ, как предел исходных решений $u^\varepsilon(x)$, не зависящих от τ. Учитывая этот факт, можно показать, что предельные коэффициенты $a_{ik}(x)$ и $c(x,s)$ также не зависят от τ. Это подтверждается конкретными примерами, которые будут рассмотрены в следующей работе.

Доказательство теоремы 2.1 приведено в пп. 3, 4.

3. Вспомогательные утверждения. Для доказательства основной теоремы нам потребуются следующие вспомогательные леммы. В этих леммах рассматривается „мезокуб” K^α_h с центром в точке x^α и сторонами длиной h, параллельными координатным осям, и концентрический с ним куб $K^\alpha_{h_1}$ со сторонами длиной $h_1 = h - 2r$ $\left(r = h^{1+\tau/2}\right)$.

Лемма 3.1. *Пусть выполняется условие* 2 *теоремы* 2.1. *Тогда последовательность $\{w^{\varepsilon\alpha}_h\}_\varepsilon$ минимизантов функционала* (2.6) *при любом $s = \hat{s}$ удовлетворяют следующим оценкам*:

1) $\forall\, x \in K^\alpha_h \cap \Omega^\varepsilon : |w^{\varepsilon\alpha}_h(x)| \leq |\hat{s}|$;

2) $\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \displaystyle\int_{(K^\alpha_h \setminus K^\alpha_{h_1})\cap\Omega^\varepsilon} |\nabla w^{\varepsilon\alpha}_h|^2 \, dx = o(h^n)$;

3) $\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \int_{(K_h^\alpha \setminus K_{h_1}^\alpha)\cap\Omega^\varepsilon} |w_h^{\varepsilon\alpha} - \hat{s}|^2\,dx = o(h^{n+2+\tau})$;

4) $\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \int_{(K_h^\alpha \setminus K_{h_1}^\alpha)\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w_h^{\varepsilon\alpha})\,d\Gamma = o(h^n)$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что при любом $\hat{s}$ существует единственная функция, минимизирующая функционал (2.6). Это следует из того, что такая функция является решением краевой задачи

$$-\Delta w_h^{\varepsilon\alpha} + h^{-2-\tau} w_h^{\varepsilon\alpha} = h^{-2-\tau} s, \quad x \in K_h^\alpha \cap \Omega^\varepsilon,$$

$$\frac{\partial w_h^{\varepsilon\alpha}}{\partial\nu} + \sigma^\varepsilon(x, w_h^{\varepsilon\alpha}) = 0, \quad x \in K_h^\alpha \cap \partial F^\varepsilon,$$

$$\frac{\partial w_h^{\varepsilon\alpha}}{\partial\nu} = 0, \quad x \in \partial K_h^\alpha \cap \Omega^\varepsilon,$$

существование и единственность которого доказаны в [20].

Докажем оценку 1 леммы. Для простоты положим $\hat{s} > 0$. Пусть $w_h^{\varepsilon\alpha}$ минимизирует функционал (2.6) при $s = \hat{s}$. Предположим, что оценка 1 не выполняется. Тогда в области $K_h^\alpha \cap \Omega^\varepsilon$ существует множество E, на котором $w_h^{\varepsilon\alpha} > \hat{s}$. Построим функцию-срезку $\hat{w}_h^{\varepsilon\alpha}$ такую, что $\hat{w}_h^{\varepsilon\alpha} = \hat{s}$ при $x \in E$ и $\hat{w}_h^{\varepsilon\alpha} = w_h^{\varepsilon\alpha}$ при $x \in (K_h^\alpha \cap \Omega^\varepsilon) \setminus E$. Как известно [22], эта функция принадлежит классу $H^1(\Omega^\varepsilon)$ и, как следует из ее конструкции, доставляет функционалу (2.6) меньшее значение, чем функция $w_h^{\varepsilon\alpha}$, что противоречит тому, что $w_h^{\varepsilon\alpha}$ — минимизант этого функционала.

Согласно (2.6) и условию 2 теоремы 2.1 при достаточно малых ε $\big(0 < \varepsilon \le \varepsilon_0(h)\big)$ имеем

$$\int\limits_{K_h^\alpha\cap\Omega^\varepsilon} \left\{|\nabla w_h^{\varepsilon\alpha}|^2 + h^{-2-\tau}|w_h^{\varepsilon\alpha} - \hat{s}|^2\right\} dx + \int\limits_{K_h^\alpha\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w_h^{\varepsilon\alpha}) d\Gamma = h^n c(x,\hat{s}) + o(h^n) \le Ch^n.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{K_h^\alpha\cap\Omega^\varepsilon} |\nabla w_h^{\varepsilon\alpha}|^2\,dx + \int\limits_{K_h^\alpha\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w_h^{\varepsilon\alpha}) d\Gamma \le h^n c(x,\hat{s}) + o(h^n), \tag{3.1}$$

$$\int\limits_{K_h^\alpha\cap\Omega^\varepsilon} |w_h^{\varepsilon\alpha} - \hat{s}|^2\,dx \le Ch^{n+2+\tau}. \tag{3.2}$$

Учитывая оценку (3.2), при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0(h)$ получаем

$$\int\limits_{(K_h^\alpha\setminus K_{h_1}^\alpha)\cap\Omega^\varepsilon} \left\{|\nabla w_h^{\varepsilon\alpha}|^2 + h^{-2-\tau}|w_h^{\varepsilon\alpha} - \hat{s}|^2\right\} dx + \int\limits_{(K_h^\alpha\setminus K_{h_1}^\alpha)\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w_h^{\varepsilon\alpha}) d\Gamma =$$

$$= \int\limits_{K_h^\alpha\cap\Omega^\varepsilon} \left\{|\nabla w_h^{\varepsilon\alpha}|^2 + h^{-2-\tau}|w_h^{\varepsilon\alpha} - \hat{s}|^2\right\} dx + \int\limits_{K_h^\alpha\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w_h^{\varepsilon\alpha}) d\Gamma -$$

$$-\int\limits_{K_{h_1}^{\alpha}\cap\Omega^{\varepsilon}} \left\{|\nabla w_h^{\varepsilon\alpha}|^2 + h_1^{-2-\tau}|w_h^{\varepsilon\alpha}-\hat{s}|^2\right\} dx - \int\limits_{K_{h_1}^{\alpha}\cap\partial F^{\varepsilon}} g^{\varepsilon}(x, w_h^{\varepsilon\alpha})d\Gamma + O(rh^{n-1}),$$

откуда, согласно определению функционала $c(x,s;\varepsilon,h)$,

$$\int\limits_{(K_h^{\alpha}\setminus K_{h_1}^{\alpha})\cap\Omega^{\varepsilon}} \left\{|\nabla w_h^{\varepsilon\alpha}|^2 + h^{-2-\tau}|w_h^{\varepsilon\alpha}-\hat{s}|^2\right\} dx + \int\limits_{(K_h^{\alpha}\setminus K_{h_1}^{\alpha})\cap\partial F^{\varepsilon}} g^{\varepsilon}(x, w_h^{\varepsilon\alpha})d\Gamma \le$$

$$\le c(x,s;h,\varepsilon) - c(x,s;h_1,\varepsilon) + O(rh^{n-1}).$$

Тогда, учитывая, что $r = h^{1+\tau/2} = o(h)$, в силу условия 2 теоремы 2.1 имеем

$$\int\limits_{(K_h^{\alpha}\setminus K_{h_1}^{\alpha})\cap\Omega^{\varepsilon}} |\nabla w_h^{\varepsilon\alpha}|^2\, dx = o(h^n), \quad 0<\varepsilon\le\varepsilon_0(h), \tag{3.3}$$

$$\int\limits_{(K_h^{\alpha}\setminus K_{h_1}^{\alpha})\cap\Omega^{\varepsilon}} |w_h^{\varepsilon\alpha}-\hat{s}|^2\, dx = o(h^{n+2+\tau}), \quad 0<\varepsilon\le\varepsilon_0(h), \tag{3.4}$$

$$\int\limits_{(K_h^{\alpha}\setminus K_{h_1}^{\alpha})\cap\partial F^{\varepsilon}} g^{\varepsilon}(x, w_h^{\varepsilon\alpha})d\Gamma = o(h^n), \quad 0<\varepsilon\le\varepsilon_0(h). \tag{3.5}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ в (3.1), (3.3) – (3.5), получаем оценки из пп. 2 – 4 леммы.

Лемма доказана.

Пусть $w_h^{\varepsilon\alpha}$ минимизирует функционал (2.6) при $s=\hat{s}$. В кубе K_h^{α} определим множества

$$B_h^{\varepsilon\alpha} = \{x\in K_h^{\alpha}\cap\Omega^{\varepsilon} : |w_h^{\varepsilon\alpha}-\hat{s}| \ge h^{1+\tau/3}\} \tag{3.6}$$

и функции

$$\hat{w}_h^{\varepsilon\alpha} = \begin{cases} w_h^{\varepsilon\alpha}, \quad x\in B_h^{\varepsilon\alpha}, \\ \hat{s}-h^{1+\tau/3}, \quad \hat{s}\ge 0, \quad x\in (K_h^{\alpha}\cap\Omega^{\varepsilon})\setminus B_h^{\varepsilon\alpha}, \\ \hat{s}+h^{1+\tau/3}, \quad \hat{s}\le 0, \quad x\in (K_h^{\alpha}\cap\Omega^{\varepsilon})\setminus B_h^{\varepsilon\alpha}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Для последовательности множеств $\{B_h^{\varepsilon\alpha}\}_{\alpha}$ и функций $\{\hat{w}_h^{\varepsilon\alpha}\}_{\alpha}$ справедлива следующая лемма.

Лемма 3.2. *Пусть выполняется условие* 2 *теоремы* 2.1. *Тогда для любого $\hat{s}$ в каждом кубе K_h^{α} существуют последовательности множеств $\{B_h^{\varepsilon\alpha}\}_{\alpha} \in K_h^{\alpha}\cap\Omega^{\varepsilon}$ и функций $\{\hat{w}_h^{\varepsilon\alpha}\}_{\alpha} \in H^1(K_h^{\alpha}\cap\Omega^{\varepsilon})$, определенных формулами* (3.6) *и* (3.7) *и удовлетворяющих следующим оценкам*:

1) $\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\ \mathrm{mes}\, B_h^{\varepsilon\alpha} = o(h^n)$;

2) $\forall\, x\in K_h^{\alpha}\cap\Omega^{\varepsilon} : |\hat{w}_h^{\varepsilon\alpha}(x)| \le |\hat{s}|$;

3) $\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \displaystyle\int_{(K_h^{\alpha}\setminus K_{h_1}^{\alpha})\cap\Omega^{\varepsilon}} |\nabla\hat{w}_h^{\varepsilon\alpha}|^2\, dx = o(h^n)$;

4) $\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \displaystyle\int_{(K_h^\alpha \setminus K_{h_1}^\alpha)\cap\Omega^\varepsilon} |\hat{w}_h^{\varepsilon\alpha} - \hat{s}|^2\,dx = o(h^{n+2+\tau})$;

5) $\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \displaystyle\int_{(K_h^\alpha \setminus K_{h_1}^\alpha)\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, \hat{w}_h^{\varepsilon\alpha})\,d\Gamma = o(h^n)$;

6) $\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \left\{ \displaystyle\int_{K_h^\alpha\cap\Omega^\varepsilon} |\nabla \hat{w}_h^{\varepsilon\alpha}|^2\,dx + \int_{K_h^\alpha\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, \hat{w}_h^{\varepsilon\alpha})\,d\Gamma \right\} \le h^n c(x,\hat{s}) + o(h^n)$.

Доказательство. Мера множеств $B_h^{\varepsilon\alpha}$ в силу определения (3.6), (2.6) и оценки 3 из леммы 3.1 удовлетворяет первому заключению леммы.

Не ограничивая общности, с учетом малости h будем полагать, что $\hat{s} \ge h^{1+\tau/3} > 0$.

С помощью определения (3.7) и оценок из леммы 3.1 легко убедиться, что функция $\hat{w}_h^{\varepsilon\alpha}$ удовлетворяет оценкам 2 – 5 из леммы.

Аналогичным образом рассматривается случай $\hat{s} < 0$.

Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть в областях Ω^ε при любом $h > 0$ заданы множества B_h^ε такие, что*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \operatorname{mes} B_h^\varepsilon = o(1), \quad h\to 0,$$

и выполняется условие 1 *теоремы* 2.1.

Тогда существуют множества $\hat{B}_h^\varepsilon \subset \Omega^\varepsilon$ и функции $\hat{v}_{ih}^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon)$, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяющие следующим оценкам:

1) $B_h^\varepsilon \subset \hat{B}_h^\varepsilon$; $\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\ \operatorname{mes} \hat{B}_h^\varepsilon = o(1)$, $h\to 0$;

2) $\max_{x\in\Omega^\varepsilon} |\hat{v}_{ih}^\varepsilon - x_i| \le Ch$;

3) $\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \displaystyle\int_{\hat{B}_h^\varepsilon} |\nabla \hat{v}_{ih}^\varepsilon|^2\,dx = o(1)$, $h \to 0$;

4) *для любой вектор-функции* $\ell(x) = \big(\ell_1(x),\ldots,\ell_n(x)\big) \in \big(C(\overline{\Omega})\big)^n$

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \sum_{i,j=1}^n (\nabla \hat{v}_{ih}^\varepsilon, \nabla \hat{v}_{ih}^\varepsilon)\,\ell_i(x)\ell_j(x)\,dx \le \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\ell_i(x)\ell_j(x)\,dx + o(1),\ \ h\to 0.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.1 [11] (гл. 4).

4. Доказательство основной теоремы. Как известно, решение задачи (1.1) минимизирует энергетический функционал

$$J^\varepsilon[u] = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u|^2\,dx + \int\limits_{\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x,u)\,d\Gamma - 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon u\,dx \tag{4.1}$$

в классе функций $u(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon, \partial\Omega)$. Здесь $g^\varepsilon(x,u) = 2\displaystyle\int_0^u \sigma^\varepsilon(x,s)ds \ge 0$.

Поскольку $J^\varepsilon[u^\varepsilon] \le J^\varepsilon[0] = 0$, то выполняется неравенство

$$0 \le \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2\,dx + \int\limits_{\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x,u^\varepsilon)\,d\Gamma \le 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon u^\varepsilon\,dx.$$

Применяя неравенство Коши – Буняковского и учитывая неотрицательность функции $g^\varepsilon(x,u^\varepsilon)$, получаем

$$\|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \le 2\,\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\,\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\,. \tag{4.2}$$

В силу сильной связности областей Ω^ε и неравенства Фридрихса существует функция $\tilde u^\varepsilon(x) \in \in \mathring{H}^1(\Omega)$ такая, что $\tilde u^\varepsilon(x) = u^\varepsilon(x)$ при $x \in \Omega^\varepsilon$ и

$$\|\tilde u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \le C_1\,\|\nabla \tilde u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le C_2\,\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\,, \tag{4.3}$$

где постоянные C_1, C_2 не зависят от ε.

Из (4.2) и (4.3) получаем оценку

$$\|\tilde u^\varepsilon\|_{\mathring{H}^1(\Omega)} \le C\,\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\,,$$

из которой, в силу равномерной по ε ограниченности норм $\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$, следует слабая компактность в $\mathring{H}^1(\Omega)$ последовательности функций $\{\tilde u^\varepsilon(x)\}$. Значит, можно выделить подпоследовательность $\{\tilde u^{\varepsilon_k}(x)\}_{k=1}^\infty$, слабо сходящуюся в $\mathring{H}^1(\Omega)$, а в силу компактности вложения $\mathring{H}^1(\Omega) \subset \subset L^p(\Omega)$ $\left(p < \dfrac{2n}{n-2}\right)$ — сильно сходящуюся в $L^p(\Omega)$ к некоторой функции $u(x) \in \mathring{H}^1(\Omega)$.

Покажем, что функция $u(x)$ является обобщенным решением задачи (1.2). Совместно с задачей (1.2) рассмотрим энергетический функционал

$$J[w] = \int\limits_\Omega \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_k}\,dx + \int\limits_\Omega c(x,w(x))\,dx - 2\int\limits_\Omega f(x)w(x)\,dx. \tag{4.4}$$

Доказательство проведем в два этапа. Вначале для произвольной функции $w(x) \in \mathring{H}^1(\Omega)$ получим неравенство

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} J^\varepsilon[u^\varepsilon] \le J[w]. \tag{4.5}$$

Затем покажем, что если решения $u^\varepsilon(x)$ задачи (1.1) по некоторой подпоследовательности $\{\varepsilon = \varepsilon_k \to 0\}$ сходятся в $L^p(\Omega^\varepsilon,\Omega)$ к функции $u(x)$, то имеет место обратное неравенство

$$\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, J^\varepsilon[u^\varepsilon] \ge J[u]. \tag{4.6}$$

Таким образом, предельная функция $u(x)$ будет удовлетворять неравенству $J[u] \le J[w]$ для произвольной функции $w(x) \in \mathring{H}^1(\Omega)$. Следовательно, $u(x)$ минимизирует функционал $J[w]$ в классе $\mathring{H}^1(\Omega)$.

Докажем неравенство (4.5) сначала для $w(x)$ из $C_0^2(\Omega)$. Покроем область Ω пересекающимися кубами $K_h^\alpha = K(x^\alpha, h)$ с центрами в точках x^α и сторонами длиной h, ориентированными по координатным осям. Кубы образуют периодическую решетку с периодом $h - r$ $(0 < r = h^{1+\tau/2})$. С этим покрытием свяжем разбиение единицы $\{\varphi_{\alpha h}(x)\}$ — набор дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям

$$0 \le \varphi_{\alpha h}(x) \le 1, \quad \varphi_{\alpha h}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \notin K_h^\alpha, \qquad \varphi_{\alpha h}(x) = 1 \quad \text{при} \quad x \in K_h^\alpha \setminus \bigcup_{\beta\ne\alpha} K_h^\beta,$$
$$\forall x \in \Omega\colon\ \sum_\alpha \varphi_{\alpha h}(x) = 1, \qquad |D\varphi_{\alpha h}(x)| < Cr^{-1}. \tag{4.7}$$

Пусть $\hat{w}_h^{\varepsilon\alpha}$ и $B_h^{\varepsilon\alpha}$ — функции и множества, построенные в лемме 3.2 при $\hat{s} = w(x^\alpha)$ по формулам (3.6) и (3.7), $\hat{v}_{ih}^\varepsilon$ и $\hat{B}_h^\varepsilon$ — функции и множества, построенные в лемме 3.3 для $B_h^\varepsilon = \bigcup_\alpha B_h^{\varepsilon\alpha}$. Рассмотрим функцию

$$w_h^\varepsilon(x) = w(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\left[\hat{v}_{ih}^\varepsilon(x) - x_i\right] + \sum_\alpha \left[\hat{w}_h^{\varepsilon\alpha}(x) - w(x^\alpha)\right]\varphi_{\alpha h}(x). \tag{4.8}$$

При достаточно малых h функция $w_h^\varepsilon(x)$ принадлежит $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^\varepsilon)$, и так как решение задачи (1.1) $u^\varepsilon(x)$ минимизирует функционал $J^\varepsilon[u]$ (4.1) в классе функций $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^\varepsilon)$, то

$$J^\varepsilon[u^\varepsilon] \le J^\varepsilon[w_h^\varepsilon]. \tag{4.9}$$

Оценим $J^\varepsilon[w_h^\varepsilon]$ сверху. Продифференцировав функцию $w_h^\varepsilon(x)$, определенную формулой (4.8), получим

$$\frac{\partial w_h^\varepsilon}{\partial x_j} = \sum_\alpha \frac{\partial \hat{w}_h^{\varepsilon\alpha}}{\partial x_j}\cdot\varphi_{\alpha h}(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{v}_{ih}^\varepsilon}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^2 A_k(x), \tag{4.10}$$

где

$$A_1(x) = \sum_\alpha \left[\hat{w}_h^{\varepsilon\alpha}(x) - w(x^\alpha)\right]\frac{\partial\varphi_{\alpha h}(x)}{\partial x_j}, \qquad A_2(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}[\hat{v}_{ih}^\varepsilon(x) - x_i].$$

Выделенные в (4.10) слагаемые дают конечный вклад в функционал $J^\varepsilon[w_h^\varepsilon]$, вклады же от слагаемых $A_1(x)$, $A_2(x)$ малы в силу оценок, полученных в леммах 3.2, 3.3.

Действительно, для первого слагаемого функционала $J^\varepsilon[w_h^\varepsilon]$ справедлива оценка

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla w_h^\varepsilon|^2\,dx \le \sum_\alpha \int\limits_{K^\alpha\cap\Omega^\varepsilon} |\nabla \hat{w}_h^{\varepsilon\alpha}|^2\,dx +$$

$$+ \sum_{i,k=1}^n \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_k}(\nabla\hat{v}_{ih}^\varepsilon\cdot\nabla\hat{v}_{kh}^\varepsilon)\,dx + \sum_\alpha E^\alpha(\varepsilon,h,r), \tag{4.11}$$

в которой через $E^\alpha(\varepsilon,h,r)$ обозначена сумма интегралов по множествам $(K_h^\alpha \setminus K_{h1}^\alpha)\cap\Omega^\varepsilon$ и $K_h^\alpha \cap B_h^{\varepsilon\alpha}$ от квадратичных и линейных комбинаций функций $\left[\hat{w}_h^{\varepsilon\alpha}(x) - w(x^\alpha)\right]\dfrac{\partial\varphi_{\alpha h}(x)}{\partial x_j}$ и $[\hat{v}_{ih}^\varepsilon(x) - x_i]$ с ограниченными коэффициентами, которые зависят от $w \in C_0^2(\Omega)$ в квадратичных слагаемых и от $\dfrac{\partial \hat{w}_h^{\varepsilon\alpha}}{\partial x_j}\varphi_{\alpha h}$, $\dfrac{\partial \hat{v}_h^{\varepsilon\alpha}}{\partial x_j}$ в линейных.

При оценке $E^\alpha(\varepsilon,h,r)$ воспользуемся свойствами функций $\varphi_{\alpha h}$, а также оценками из лемм 3.2 и 3.3. В результате получим

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to0}}\sum_\alpha E^\alpha(\varepsilon,h,r) = \sum_\alpha o(h^n) = o(1). \tag{4.12}$$

Здесь суммирование по α проводится в пределах от 1 до $M = O(h^{-n})$.

Оценим поверхностный интеграл в функционале $J^\varepsilon[w_h^\varepsilon]$. Для этого запишем $w_h^\varepsilon(x)$ в виде

$$w_h^\varepsilon(x) = \sum_\alpha \Big[\hat{w}_h^{\varepsilon\alpha}(x) + \big(w(x) - w(x^\alpha)\big)\Big]\varphi_{\alpha h}(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\,[\hat{v}_{ih}^\varepsilon(x) - x_i].$$

Учитывая свойства $\mathrm{a}_1)$ – $\mathrm{a}_4)$ функции $\sigma^\varepsilon(x,s)$ и определение функции $g^\varepsilon(x,s)$ (2.7), получаем оценку второго слагаемого

$$\int\limits_{\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w_h^\varepsilon)\,d\Gamma \le \sum_\alpha \int\limits_{K^\alpha\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w_h^\varepsilon)\,d\Gamma \le \sum_\alpha \int\limits_{K^\alpha\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, \hat{w}_h^{\varepsilon\alpha})\,d\Gamma + o(1). \tag{4.13}$$

Для третьего слагаемого при малых ε $\big(0 < \varepsilon < \varepsilon_0(h)\big)$ справедлива оценка

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon w_h^\varepsilon\,dx = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon w\,dx + o(1). \tag{4.14}$$

Тогда в силу (4.11) – (4.14) функционал $J^\varepsilon[w_h^\varepsilon]$ оценивается следующим образом:

$$J^\varepsilon[w_h^\varepsilon] \le \sum_\alpha \left[\int\limits_{K^\alpha\cap\Omega^\varepsilon} |\nabla\hat{w}_h^{\varepsilon\alpha}|^2\,dx + \int\limits_{K^\alpha\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x,\hat{w}_h^{\varepsilon\alpha})\,d\Gamma + E^\alpha(\varepsilon,h,r)\right] +$$

$$+ \sum_{i,k=1}^n \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_k}(\nabla\hat{v}_{ih}^\varepsilon\cdot\nabla\hat{v}_{kh}^\varepsilon)\,dx - 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon w\,dx + o(1).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, учитывая условия теоремы 2.1 и оценки из лемм 3.2, 3.3 и (4.12), получаем

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, J^\varepsilon[w_h^\varepsilon] \le \int\limits_\Omega \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_k}\,dx + \sum_\alpha \Big[c\big(x, w(x^\alpha)\big)h^n + o(h^n)\Big] -$$

$$-2\int\limits_\Omega f(x)w(x)\,dx + o(1).$$

Теперь перейдем к пределу при $h \to 0$. Учитывая, что $\alpha = \overline{1, M}$, где $M = O(h^{-n})$, имеем

$$\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} J^\varepsilon[w_h^\varepsilon] \le \int\limits_\Omega \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_k}\,dx - \int\limits_\Omega c(x, w(x))\,dx - 2\int\limits_\Omega f(x)w(x)\,dx. \tag{4.15}$$

Объединяя (4.9) и (4.15), получаем

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} J^\varepsilon[u^\varepsilon] \le \lim_{h\to 0}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} J^\varepsilon[w_h^\varepsilon] \le J[w],$$

где $J[w]$ — энергетический функционал задачи (1.2), определенный формулой (4.4).

Таким образом, для любой функции $w(x) \in C_0^2(\Omega)$ выполняется неравенство (4.5). Поскольку $C_0^2(\Omega)$ плотно в $\mathring{H}^1(\Omega)$, функции $a_{ik}(x)$ кусочно-непрерывны по x, функция $c(x,s)$ ограничена по x и дифференцируема по s, $f(x) \in L^2(\Omega)$, то это неравенство выполняется для любой функции $w(x) \in \mathring{H}^1(\Omega)$.

Покажем, что для функции $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, являющейся пределом в $L^p(\Omega)$ $\left(p \le \dfrac{2n}{n-2}\right)$ подпоследовательности $\left\{\tilde{u}^{\varepsilon_k}(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ продолженных решений $\tilde{u}^{\varepsilon}(x)$ задачи (1.1), справедлива обратная оценка (4.6).

Пусть $u_\delta(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая в Ω функция такая, что

$$\|u_\delta - u\|_{H^1(\Omega)} < \delta. \tag{4.16}$$

В областях Ω^ε рассмотрим функции

$$\tilde{u}^\varepsilon_\delta(x) = \tilde{u}^\varepsilon(x) + u_\delta(x) - u(x),$$

$$u^\varepsilon_\delta(x) = \tilde{u}^\varepsilon_\delta(x)|_{\Omega^\varepsilon} = u^\varepsilon(x) + u_\delta(x) - u(x).$$

В силу (4.16) имеем

$$\|\tilde{u}^\varepsilon_\delta - \tilde{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} < \delta, \qquad \|u^\varepsilon_\delta - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} < \delta, \tag{4.17}$$

кроме того, при $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$

$$\tilde{u}^\varepsilon_\delta(x) \to u_\delta(x) \text{ в } L^p(\Omega), \qquad u^\varepsilon_\delta(x) \to u_\delta(x) \quad \text{в} \quad L^p(\Omega^\varepsilon, \Omega). \tag{4.18}$$

Определим функции

$$v^\varepsilon_\delta = \tilde{u}^\varepsilon_\delta - u_\delta.$$

Поскольку при $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$ функции v^ε_δ сходятся к нулю сильно в $L^p(\Omega)$ $\left(p \le \dfrac{2n}{n-2}\right)$ и слабо в $H^1(\Omega)$, отсюда следует, что $\|v^\varepsilon_\delta\|_{H^1(\Omega)} \le C$ и функции v^ε_δ сходятся к нулю по мере, т. е. существуют множества $G^\varepsilon \subset \Omega$ и числа $\beta(\varepsilon)$ такие, что

$$\forall\, x \in \Omega \setminus G^\varepsilon : |v^\varepsilon_\delta(x)| < \beta(\varepsilon), \qquad \lim_{\varepsilon=\varepsilon_k \to 0} \beta(\varepsilon) = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k \to 0} \operatorname{mes}\{G^\varepsilon\} = 0.$$

В силу лемм 1.3, 1.4 [11] (глава 3) по функциям v^ε_δ и множествам G^ε можно построить функции $\hat{v}^\varepsilon_\delta$ и множества $\hat{G}^\varepsilon \subset \Omega$ такие, что $\hat{G}^\varepsilon \supset G^\varepsilon$, $\hat{v}^\varepsilon_\delta = v^\varepsilon_\delta$ при $x \in \Omega \setminus \hat{G}^\varepsilon$ и

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k \to 0} \operatorname{mes}\{\hat{G}^\varepsilon\} = 0, \qquad \max_{\Omega} |\hat{v}^\varepsilon_\delta(x)| \le C \max_{\Omega \setminus G^\varepsilon} |v^\varepsilon_\delta(x)| < C\beta(\varepsilon), \qquad \lim_{\varepsilon=\varepsilon_k \to 0} \|\hat{v}^\varepsilon_\delta\|_{H^1(\hat{G}^\varepsilon)} = 0. \tag{4.19}$$

Положим

$$\hat{u}^\varepsilon_\delta = u^\varepsilon_\delta + \hat{v}^\varepsilon_\delta. \tag{4.20}$$

Разобьем пространство R^n на непересекающиеся (во внутренних точках) кубы $K^\alpha_h = K(x^\alpha, h)$ с центрами в точках x^α и со сторонами длиной h, ориентированными по координатным осям. Будем рассматривать те кубы K^α_h $\left(\alpha = \overline{1, N},\, N = O(h^n)\right)$, которые полностью лежат в области Ω, и на пересечении каждого из них с областью Ω^ε рассмотрим функцию

$$w^{\varepsilon\alpha}_{1\delta}(x) = \hat{u}^\varepsilon_\delta(x) - u_\delta(x^\alpha). \tag{4.21}$$

Поскольку $u_\delta(x) \in C_0^2(\Omega)$, в силу определений (4.20), (4.21) для любого вектора $\ell \in R^n$ и для любого фиксированного числа $\delta > 0$ выполняется

$$\int\limits_{K_h^\alpha \cap \Omega^\varepsilon} |w_{1\delta}^{\varepsilon\alpha}(x) - (x - x^\alpha, \ell)|^2\, dx \le 3 \int\limits_{K_h^\alpha \cap \Omega^\varepsilon} [(\nabla u_\delta(x^\alpha), x - x^\alpha) - (x - x^\alpha, \ell)]^2\, dx +$$

$$+3 \int\limits_{K_h^\alpha \cap \Omega^\varepsilon} |\hat{u}_\delta^\varepsilon(x) - u_\delta(x)|^2\, dx + O(h^{n+4}) \le 6 \int\limits_{K_h^\alpha \cap \Omega^\varepsilon} |u_\delta^\varepsilon(x) - u_\delta(x)|^2\, dx + 6 \int\limits_{K_h^\alpha \cap \Omega^\varepsilon} |\hat{v}_\delta^\varepsilon(x)|^2\, dx +$$

$$+3 \int\limits_{K_h^\alpha \cap \Omega^\varepsilon} [(\nabla u_\delta(x^\alpha), x - x^\alpha) - (x - x^\alpha, \ell)]^2\, dx + O(h^{n+4}).$$

Положим здесь $\ell = \ell^\alpha = \nabla u_\delta(x^\alpha)$. Тогда, учитывая (4.18), (4.19), получаем

$$\lim_{\varepsilon = \varepsilon_k \to 0} \int\limits_{K_h^\alpha \cap \Omega^\varepsilon} |w_{1\delta}^{\varepsilon\alpha}(x) - (x - x^\alpha, \ell^\alpha)|^2\, dx = O(h^{n+4}). \tag{4.22}$$

Согласно определению функционала $T_{h,z}^\varepsilon(\ell)$ (2.3) и его представлению (2.4), при $\ell^\alpha = = \nabla u_\delta(x^\alpha)$ имеем

$$\int\limits_{K_h^\alpha \cap \Omega^\varepsilon} |\nabla w_{1\delta}^{\varepsilon\alpha}(x)|^2 + h^{-2-\tau} |w_{1\delta}^{\varepsilon\alpha}(x) - (x - x^\alpha, \ell^\alpha)|^2\, dx \ge$$

$$\ge \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^\alpha, \varepsilon, h) \frac{\partial u_\delta}{\partial x_i}(x^\alpha) \frac{\partial u_\delta}{\partial x_j}(x^\alpha). \tag{4.23}$$

Из (4.19) – (4.23) следует

$$\int\limits_{K_h^\alpha \cap \Omega^\varepsilon \setminus G^\varepsilon} |\nabla u_\delta^\varepsilon(x)|^2\, dx \ge \int\limits_{K_h^\alpha \cap \Omega^\varepsilon} |\nabla u_\delta^\varepsilon(x)|^2\, dx - o(1) \ge$$

$$\ge \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^\alpha, \varepsilon, h) \frac{\partial u_\delta}{\partial x_i}(x^\alpha) \frac{\partial u_\delta}{\partial x_j}(x^\alpha) - O(h^{n+2-\tau}) - o(1), \quad \varepsilon = \varepsilon_k \to 0. \tag{4.24}$$

Теперь на пересечении куба K_h^α и области Ω^ε рассмотрим функцию

$$w_{2\delta}^{\varepsilon\alpha}(x) = u_\delta(x^\alpha) + u_\delta^\varepsilon(x) - \hat{u}_\delta^\varepsilon(x). \tag{4.25}$$

Согласно определению функционала $c(x, s; \varepsilon, h)$ (2.6)

$$c(x^\alpha, u_\delta(x^\alpha); \varepsilon, h) \le \int\limits_{K_h^\alpha \cap \Omega^\varepsilon} |\nabla w_{2\delta}^{\varepsilon\alpha}(x)|^2\, dx +$$

$$+h^{-\tau-2} \int\limits_{K_h^\alpha \cap \Omega^\varepsilon} |w_{2\delta}^{\varepsilon\alpha} - u_\delta(x^\alpha)|^2\, dx + \int\limits_{K_h^\alpha \cap \partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w_{2\delta}^{\varepsilon\alpha})\, d\Gamma. \tag{4.26}$$

Оценим каждое из слагаемых правой части (4.26). Из определения функции $w_{2\delta}^{\varepsilon\alpha}$ (4.25) для первого и второго слагаемых получаем

$$\int\limits_{K_h^\alpha\cap\Omega^\varepsilon} |\nabla w_{2\delta}^{\varepsilon\alpha}(x)|^2\,dx = \int\limits_{K_h^\alpha\cap\hat{G}^\varepsilon} |\nabla u_\delta^\varepsilon(x)|^2\,dx + o(1), \quad \varepsilon=\varepsilon_k\to 0, \tag{4.27}$$

$$\int\limits_{K_h^\alpha\cap\Omega^\varepsilon} |w_{2\delta}^{\varepsilon\alpha} - u_\delta(x^\alpha)|^2\,dx = o(1), \quad \varepsilon=\varepsilon_k\to 0. \tag{4.28}$$

При оценке поверхностного интеграла учитываем, что в силу (4.18), (4.19) $w_{2\delta}^{\varepsilon\alpha} = u_\delta^\varepsilon(x) - O(\varepsilon) - O(h)$, а также свойств $\mathrm{a}_1)-\mathrm{a}_4)$ функции $\sigma^\varepsilon(x,s)$

$$\int\limits_{K_h^\alpha\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, w_{2\delta}^{\varepsilon\alpha})\,d\Gamma = \int\limits_{K_h^\alpha\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, u_\delta^\varepsilon)\,d\Gamma +$$

$$+O(h)\int\limits_{K_h^\alpha\cap\partial F^\varepsilon} \hat{\sigma}^\varepsilon(x)\,d\Gamma + o(1), \quad \varepsilon=\varepsilon_k\to 0. \tag{4.29}$$

В силу (4.27) – (4.29) из (4.26) следует, что

$$c(x^\alpha, u_\delta(x^\alpha); \varepsilon, h) \le \int\limits_{K_h^\alpha\cap\hat{G}^\varepsilon} |\nabla u_\delta^\varepsilon(x)|^2\,dx + \int\limits_{K_h^\alpha\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, u_\delta^\varepsilon)\,d\Gamma +$$

$$+O(h)\int\limits_{K_h^\alpha\cap\partial F^\varepsilon} \hat{\sigma}^\varepsilon(x)\,d\Gamma + o(1), \quad \varepsilon=\varepsilon_k\to 0. \tag{4.30}$$

Таким образом, согласно (4.24), (4.30)

$$J^\varepsilon[u_\delta^\varepsilon] = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u_\delta^\varepsilon|^2\,dx + \int\limits_{\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, u_\delta^\varepsilon)\,d\Gamma - 2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon u_\delta^\varepsilon\,dx \ge$$

$$\ge \sum_\alpha \int\limits_{K_h^\alpha\cap\Omega^\varepsilon\setminus\hat{G}^\varepsilon} |\nabla u_\delta^\varepsilon|^2\,dx + \sum_\alpha \left[\int\limits_{K_h^\alpha\cap\hat{G}^\varepsilon} |\nabla u_\delta^\varepsilon|^2\,dx + \int\limits_{K_h^\alpha\cap\partial F^\varepsilon} g^\varepsilon(x, u_\delta^\varepsilon)\,d\Gamma\right] -$$

$$-2\int\limits_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon u_\delta^\varepsilon\,dx \ge \sum_\alpha \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^\alpha, \varepsilon, h)\frac{\partial u_\delta}{\partial x_i}(x^\alpha)\frac{\partial u_\delta}{\partial x_j}(x^\alpha) +$$

$$+\sum_\alpha \left[c(x^\alpha, u_\delta(x^\alpha); \varepsilon, h) - O(h)\int\limits_{K_h^\alpha\cap\partial F^\varepsilon} \hat{\sigma}^\varepsilon(x)\,d\Gamma + o(1)\right] - 2\int\limits_\Omega \tilde{f}^\varepsilon \tilde{u}_\delta^\varepsilon\,dx,$$

где $\tilde{f}^\varepsilon(x) = \chi^\varepsilon(x) f^\varepsilon(x)$, $\chi^\varepsilon(x)$ — характеристическая функция области Ω^ε. Перейдем в этом неравенстве к пределу сначала по $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$, а затем по $h \to 0$ при фиксированном δ. Учитывая условия теоремы 2.1 и сходимость $u_\delta^\varepsilon(x)$ к $u_\delta(x)$ в $L^p(\Omega)$, получаем

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k \to 0} J^\varepsilon[u_\delta^\varepsilon] \geq J[u_\delta].$$

Перейдем теперь к пределу по $\delta \to 0$. В правой части, в силу гладкости функции $u_\delta(x)$ и неравенства (4.16), имеем $\lim_{\delta\to 0} J[u_\delta] = J[u]$. В левой части при переходе к пределу в поверхностном интеграле воспользуемся определением функции $g^\varepsilon(x,s)$, свойствами a$_3$), a$_4$) функции $\sigma^\varepsilon(x,s)$, обобщенной теоремой Соболева [23, с. 58] о вложении пространства $H^1(\Omega^\varepsilon)$ в пространство $L^p(\Omega^\varepsilon, \mu^\varepsilon)$ с мерой $d\mu^\varepsilon = \hat{\sigma}^\varepsilon(x) d\Gamma$, а также неравенствами (4.17). В результате получим требуемое неравенство (4.6). Из (4.5), (4.6) следует, что для любой функции $w(x) \in \in \mathring{H}^1(\Omega)$

$$J[u] \leq J[w],$$

т. е. $u(x)$ минимизирует функционал (4.4) и, следовательно, является обобщенным решением задачи (1.2).

Докажем единственность обобщенного решения (1.2). Доказательство проведем от противного. Предположим, что задача (1.2) имеет два обобщенных решения u_1, u_2, тогда для произвольной функции $\varphi \in \mathring{H}^1(\Omega^\varepsilon)$ будут справедливы следующие тождества:

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\, dx + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega c_u(x, u_1)\varphi(x)\, dx = \int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx, \tag{4.31}$$

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\, dx + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega c_u(x, u_2)\varphi(x)\, dx = \int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx. \tag{4.32}$$

Вычтем из (4.31) тождество (4.32) и возьмем тестовую функцию $\varphi = u_1 - u_2$. В результате получим

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial x_i} \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial x_k}\, dx + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega (c_u(x, u_1) - c_u(x, u_2))(u_1 - u_2)\, dx = 0. \tag{4.33}$$

В силу положительной определенности тензора $a_{ik}(x)$ и монотонности функции $c_u(x,u)$ из (4.33) следует

$$u_1 = u_2 \quad \text{п. в. в} \quad \Omega^\varepsilon.$$

Таким образом, единственность обобщенного решения усредненной задачи (1.2) доказана, а значит, вся последовательность $\{\tilde{u}^\varepsilon(x)\}$ слабо сходится в $\mathring{H}^1(\Omega)$ и сильно сходится в $L^p(\Omega)$ к функции $u(x)$.

Теорема доказана.

***Замечание* 4.1.** Теорема 2.1 выполняется при условии существования плотности в любой точке области, но она справедлива и при более общих условиях:

1) $\lim_{h\to 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \displaystyle\int_\Omega \left| \frac{a_{ik}(x,\varepsilon,h)}{h^n} - a_{ik}(x) \right| dx = 0;$

2) $\lim_{h\to 0}\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\displaystyle\int_\Omega\left|\frac{c(x,s,\varepsilon,h)}{h^n}-c(x,s)\right|dx=0\ \forall s\in R^1.$

1. *Берлянд Л. В., Гончаренко М. В.* Осреднение уравнения диффузии в пористой среде со слабым поглощением // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1989. – **52**. – С. 113 – 122.
2. *Conca C., Diaz J., Timofte C.* Effective chemical processes in porous media // Math. Models. Methods Appl. Sci. – 2003. – **13**, № 10. – P. 1437 – 1462.
3. *Conca C., Diaz J., Linan A., Timofte C.* Homogenization in chemical reactive floes // Electron. J. Different. Equat. – 2004. – № 40. – P. 1 – 22.
4. *Conca C., Diaz J., Linan A., Timofte C.* Homogenization results for chemical reactive flows through porous media // New Trends Contin. Mech. – 2005. – **6**. – P. 99 – 107.
5. *Cioranescu D., Donato P., Zaki R.* Asymptotic behaviour of elliptic problems in perforated domains with nonlinear boundary conditions // Asymptot. Anal. – 2007. – **53**. – P. 209 – 235.
6. *Timofte C.* Homogenization in nonlinear chemical reactive flows // Proc. 9th WSEAS Int. Conf. Appl. Math., Istambul, Turkey, May 27 – 29, 2006. – P. 250 – 255.
7. *Mel'nyk T. A., Sivak O. A.* Asymptotic analysis of a boundary-value problem with the nonlinean multiphase interactions in a perforated domain // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 4. – С. 494 – 512.
8. *Mel'nyk T. A., Sivak O. A.* Asymptotic expansion for the solution of an elliptic problem with boundary multiphase interactions of the Dirichle and Neumann types in a perforated domain // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2010. – **3**. – С. 63 – 67.
9. *Mel'nyk T. A., Sivak O. A.* Asymptotic approximations for solutions to quasilinear and linear parabolic problems with different perturbed boundary conditions in perforated domains // J. Math. Sci. – 2011. – **177**, № 1. – P. 50 – 70.
10. *Mel'nyk T. A., Sivak O. A.* Asymptotic approximations for solutions to quasilinear and linear elliptic problems with different perturbed boundary conditions in perforated domains // Asymptot. Anal. – 2011. – **75**. – P. 79 – 92.
11. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Усредненные модели микронеоднородных сред. – Киев: Наук. думка, 2005. – 551 с.
12. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Ха Тьен Нгоан.* Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов // Успехи мат. наук. – 1979. – **34**, вып. 5. – С. 65 – 133.
13. *Dal Maso G.* An introduction to Γ-convergence. – Boston: Birkhäuser, 1993. – xiv+340 p.
14. *Braides A.* Γ-convergence for beginners. – Oxford Univ. Press, 2002. – 230 p.
15. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. – М.: Мир, 1984. – 472 с.
16. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
17. *Tartar L.* Compensated compactness and applications to partial differential equations in non-linear analysis and mechanics // Heriot-Watt Symp. IV / Ed. R.S. Knops. – London: Pitman, 1979.
18. *Nguetseng G.* Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics // SIAM J. Math. Anal. – 1990. – **21**, № 6. – P. 1394 – 1414.
19. *Cioranescu D., Damlamian A., Griso G.* The periodic unfolding method in homogenization // SIAM J. Math. Anal. – 2008. – **40**, № 4. – P. 1585 – 1620.
20. *Cabarrubias B., Donato P.* Existence and uniqueness for a quasilinear Elliptic problem with nonlinear robin condition // Carpath. J. Math. – 2011. – **27**, № 2. – P. 173 – 184.
21. *Хруслов Е. Я.* Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Мат. сб. – 1978. – **106(148)**, № 4(8). – С. 604 – 621.
22. *Ладыженская О, А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
23. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. – Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1985. – 416 с.

Получено 14.09.14,
после доработки — 26.12.14