УДК 517.925.44

О. Р. Шлепаков (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

We establish asymptotic representations for the solutions of one class of nonlinear differential equations of the second order with rapidly and regularly varying nonlinearities.

Встановлено асимптотичні зображення розв'язків двочленних диференціальних рівнянь другого порядку зі швидко та правильно мінливими нелінійностями.

1. Постановка задачи. Рассматривается уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_1(y)\varphi_2(y'), \tag{1.1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p\colon [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная функция, $\varphi_i\colon \Delta(Y_i^0) \to]0; +\infty[$, $i = 1, 2$, — дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_1'(z) \neq 0 \text{ при } z \in \Delta(Y_1^0), \qquad \lim_{\substack{z\to Y_1^0\\ z\in\Delta(Y_1^0)}} \varphi_1(z) = \Phi_1^0, \qquad \Phi_1^0 \in \{0, +\infty\},$$
$$\lim_{\substack{z\to Y_1^0\\ z\in\Delta(Y_1^0)}} \frac{\varphi_1''(z)\varphi_1(z)}{[\varphi_1'(z)]^2} = 1, \tag{1.2}$$

$$\lim_{\substack{z\to Y_2^0\\ z\in\Delta(Y_2^0)}} \frac{z\varphi_2'(z)}{\varphi_2(z)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

где $\Delta(Y_i^0)$ — некоторая односторонняя окрестность точки Y_i^0, Y_i^0 равно либо 0, либо $\pm\infty$.

Из условий (1.2), (1.3) следует, что функция $\varphi_1(z)$ является быстро меняющейся при $z \to \to Y_1^0$, а функция $\varphi_2(z)$ — правильно или медленно меняющейся при $z \to Y_2^0$ (см. [15]).

Данное уравнение рассматривалось в работах [1 – 4, 11] для случаев, когда функции $\varphi_i(z)$ являются степенными либо правильно или медленно меняющимися при $z \to Y_i^0$, $i = \overline{1, 2}$.

В работе [8] рассматривалось уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_1(y), \tag{1.4}$$

в котором функция $\varphi_1(z)$ являлась быстро либо правильно меняющейся при $z \to Y_1^0$. Уравнение (1.4) является частным случаем уравнения (1.1), когда $\varphi_2(z) \equiv 1$. В работе вводился класс решений, для которого устанавливались необходимые и достаточные условия существования, а также асимптотические представления этих решений.

В работах [5, 6, 11] рассматривался частный случай уравнения (1.1), а именно уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t) e^{\sigma y} \left|y'\right|^{\lambda}. \tag{1.5}$$

Уравнение (1.1), когда функция $\varphi_1(z)$ является быстро меняющейся при $z \to Y_1^0$, а функция $\varphi_2(z)$ — медленно или правильно меняющейся при $z \to Y_2^0$, и, в частности, уравнение (1.5) широко применяются при описании различных физических процессов. Например, дифференциальные уравнения, возникающие в задаче Линана из теории горения, сводятся к уравнению (1.1), и нелинейные дифференциальные уравнения Пуассона для цилиндрически симметричной плазмы продуктов сгорания сводятся с помощью замен к уравнению (1.1) (см. [7, 12, 13]).

Целью данной работы является установление асимптотических свойств решений уравнения (1.1) в случае, когда функция $\varphi_1(z)$ является быстро меняющейся при $z \to Y_1^0$, а функция $\varphi_2(z)$ — медленно или правильно меняющейся при $z \to Y_2^0$. При таких условиях на функции $\varphi_i(z)$, $i = 1, 2$, уравнение (1.1) будет обобщением как уравнения (1.4), так и уравнения (1.5).

Решение y уравнения (1.1) будем называть $P_\omega(\Lambda_0)$-решением, где $-\infty \leq \Lambda_0 \leq +\infty$, если оно определено на некотором промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{t\uparrow\omega} \varphi_1(y(t)) = \Phi_1^0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = Y_2^0,$$
$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\varphi_1(y(t))}{\varphi_1'(y(t))} \frac{y''(t)}{[y'(t)]^2} = \Lambda_0. \tag{1.6}$$

Отметим, что класс $P_\omega(\Lambda_0)$-решений соответствует введенному в работе [8] для уравнения (1.4) классу $\widetilde{P}_\omega(\tilde{\Lambda}_0)$-решений при условии, что $\Lambda_0 = \tilde{\Lambda}_0 - 1$.

2. Вспомогательные результаты. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$u_i' = \alpha_i p_i(t) \psi_{i+1}(u_{i+1}), \quad i = \overline{1, n}\,^1, \tag{2.1}$$

в которой $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $i = \overline{1, n}$, $p_i \colon [a, \omega[\to]0, +\infty[$, $i = \overline{1, n}$, — непрерывные функции, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\psi_i \colon \Delta(U_i^0) \to]0; +\infty[$, $i = \overline{1, n}$ $\big(\Delta(U_i^0)$ — некоторая односторонняя окрестность точки $U_i^0 \in \{0, \pm\infty\}\big)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\psi_i'(z) \neq 0 \text{ при } z \in \Delta(U_i^0), \qquad \lim_{\substack{z \to U_i^0 \\ z \in \Delta(U_i^0)}} \psi_i(z) = \Psi_i^0, \quad \Psi_i^0 \in \{0, +\infty\},$$
$$\lim_{\substack{z \to U_i^0 \\ z \in \Delta(U_i^0)}} \frac{\psi_i''(z) \psi_i(z)}{[\psi_i'(z)]^2} = \gamma_i, \tag{2.2}$$

где

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - \gamma_i) \neq 1. \tag{2.3}$$

Решение $(u_i)_{i=1}^n$ *системы* (2.1), *заданное на промежутке* $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, *будем называть* $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$*-решением, если функции* $v_i(t) = \psi_i(u_i(t))$ *удовлетворяют условиям*

[1] Здесь и далее для всех функций и параметров с индексом $n+1$ будем полагать их взаимно однозначное соответствие с соответствующими величинами с индексом 1.

$$\lim_{t\uparrow\omega} v_i(t) = \Psi_i^0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{v_i(t)v'_{i+1}(t)}{v'_i(t)v_{i+1}(t)} = \Lambda_i, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

В работе [10] для системы (2.1) получены необходимые и достаточные условия существования $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$-решений для $\Lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = \overline{1, n-1}$.

Для формулировки установленных в этой работе результатов введем следующие обозначения:

$$\rho_i = \operatorname{sign} \psi'_i(z) \quad \text{при} \quad z \in \Delta(U_i^0), \quad i = \overline{1, n}, \qquad \Lambda_n = \frac{1}{\Lambda_1 \ldots \Lambda_{n-1}},$$

$$\mathfrak{I} = \{i \in \{1, \ldots, n\} : 1 - \Lambda_i - \gamma_i \neq 0\}, \qquad \bar{\mathfrak{I}} = \{1, \ldots, n\} \backslash \mathfrak{I}, \quad l = \min \mathfrak{I},$$

$$I_i(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{A_i}^t p_i(\tau)\, d\tau & \text{при} \quad i \in \mathfrak{I}, \\ \displaystyle\int_{A_i}^t I_l(\tau) p_i(\tau)\, d\tau & \text{при} \quad i \in \bar{\mathfrak{I}}, \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} 1 - \Lambda_i - \gamma_i, & \text{если} \quad i \in \mathfrak{I}, \\ \dfrac{\beta_l}{\Lambda_l \ldots \Lambda_{i-1}}, & \text{если} \quad i \in \{l+1, \ldots, n\} \backslash \mathfrak{I}, \\ \dfrac{\beta_l}{\Lambda_l \ldots \Lambda_n \Lambda_1 \ldots \Lambda_{i-1}}, & \text{если} \quad i \in \{1, \ldots, l-1\} \backslash \mathfrak{I}, \end{cases}$$

где каждый из пределов интегрирования A_i принадлежит $\{\omega, a\}$ и выбран так, чтобы соответствующий ему интеграл I_i стремился либо к нулю, либо к ∞ при $t \uparrow \omega$.

Кроме того, положим

$$A_i^* = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad A_i = a, \\ -1, & \text{если} \quad A_i = \omega, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Теорема 2.1. *Пусть* $\Lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = \overline{1, n-1}$, *и* $l = \min \mathfrak{I}$. *Тогда для существования* $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$-*решений системы дифференциальных уравнений* (2.1) *необходимо, а если алгебраическое уравнение*

$$\prod_{i=1}^n \left((1 - \gamma_i) \prod_{j=1}^{i-1} \Lambda_j + \nu \right) - \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{i-1} \Lambda_j = 0 \tag{2.4}$$

не имеет корней с нулевой действительной частью, то и достаточно, чтобы для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{I_i(t) I'_{i+1}(t)}{I'_i(t) I_{i+1}(t)} = \Lambda_i \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} \tag{2.5}$$

и выполнялись знаковые условия

$$A_i^*\beta_i > 0 \quad \textit{при} \quad \Psi_i^0 = +\infty, \qquad A_i^*\beta_i < 0 \quad \textit{при} \quad \Psi_i^0 = 0, \tag{2.6}$$

$$\operatorname{sign}\left[\alpha_i A_i^*\beta_i\right] = \rho_i. \tag{2.7}$$

Более того, каждое такое решение допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\frac{\psi_i(u_i(t))}{\psi_i'(u_i(t))\psi_{i+1}(u_{i+1}(t))} = \alpha_i\beta_i I_i(t)[1+o(1)], \quad \textit{если} \quad i \in \mathfrak{I}, \tag{2.8}$$

$$\frac{\psi_i(u_i(t))}{\psi_i'(u_i(t))\psi_{i+1}(u_{i+1}(t))} = \alpha_i\beta_i \frac{I_i(t)}{I_l(t)}[1+o(1)], \quad \textit{если} \quad i \in \bar{\mathfrak{I}}, \tag{2.9}$$

причем существует k-параметрическое семейство таких решений в случае, когда среди корней алгебраического уравнения (2.4) *имеется k корней* (*с учетом кратных*), *знаки действительных частей которых противоположны знаку числа $A_l^*\beta_l$.*

Кроме того, в работе [9] получены более простые асимптотические формулы для $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots$ $\ldots,\Lambda_{n-1})$-решений при некоторых дополнительных условиях.

Следствие (см. [4]). *Будем говорить, что функция $\theta\colon \Delta(U^0) \longrightarrow]0,+\infty[$, $U^0 \in \{0,\pm\infty\}$, удовлетворяет условию S, если для любой непрерывно дифференцируемой функции $l\colon \Delta(U^0) \to$ $\to\,]0,+\infty[$ такой, что*

$$\lim_{\substack{z\to U^0\\ z\in\Delta(U^0)}} \frac{z\,l'(z)}{l(z)} = 0,$$

имеет место асимптотическое соотношение

$$\theta(zl(z)) = \theta(z)[1+o(1)] \quad \textit{при} \quad z \to U^0 \quad \big(z\in\Delta(U^0)\big).$$

Теорема 2.2. *Пусть $\Lambda_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $i=\overline{1,n-1}$, $l=\min\mathfrak{I}$ и все функции $\theta_i(z) = \dfrac{\psi_i'\left(\psi_i^{-1}(z)\right)}{\psi_i(z)}$, $i=\overline{1,n}$, удовлетворяют условию S. Тогда каждое $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решение* (*в случае их существования*) *системы дифференциальных уравнений* (2.1) *допускает при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления*

$$\psi_i\left(u_i(t)\right) = \prod_{k=1}^{n}\left|Q_k(t)\theta_k\left(|I_k(t)|^{\frac{1}{\beta_k}}\right)\right|^{\delta_{ik}}[1+o(1)], \quad i=\overline{1,n}, \tag{2.10}$$

где

$$Q_k(t) = \begin{cases} \alpha_k\beta_k I_k(t), & \textit{если} \quad k\in\mathfrak{I},\\[2mm] \alpha_k\beta_k\dfrac{I_k(t)}{I_l(t)}, & \textit{если} \quad k\in\overline{\mathfrak{I}}, \end{cases}$$

$$\delta_{ik} = \begin{cases} \dfrac{\prod_{j=k+1}^{i-1}(1-\gamma_j)}{\prod_{j=1}^{n}(1-\gamma_j)-1} & \textit{при} \quad k=\overline{1,i-1},\\[4mm] \dfrac{\prod_{j=k+1}^{n}(1-\gamma_j)\prod_{j=1}^{i-1}(1-\gamma_j)}{\prod_{j=1}^{n}(1-\gamma_j)-1} & \textit{при} \ \ k=\overline{i,n}. \end{cases}$$

Отметим, что функции $\psi_i(z)$, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяющие предельному соотношению (2.2), являются либо быстро меняющимися при $\gamma_i = 1$, либо правильно меняющимися порядка $\dfrac{1}{1-\gamma_i}$ при $\gamma_i \neq 1$. Более того, в [11, 14] показано, что предельное соотношение (2.2) эквивалентно

$$\lim_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta(Y_i^0)}} \frac{z\psi_i'(z)}{\psi_i(z)} = \sigma_i = \frac{1}{1-\gamma_i} \quad \text{при} \quad \gamma_i \neq 1, \tag{2.11}$$

$$\lim_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta(Y_i^0)}} \frac{z\psi_i'(z)}{\psi_i(z)} = \infty \quad \text{при} \quad \gamma_i = 1, \tag{2.12}$$

если в (2.2), (2.11), (2.12) пределы существуют.

3. Основной результат. Для формулировки результатов для уравнения (1.1) введем вспомогательные функции и обозначения.

Введем функцию

$$\psi(z) = \int\limits_B^z \frac{ds}{\varphi_2(s)}, \quad \text{где} \quad B = \begin{cases} Y_2^0, & \text{если} \quad \displaystyle\int_b^{Y_2^0} \frac{ds}{\varphi_2(s)} \quad \text{сходится}, \\ b, & \text{если} \quad \displaystyle\int_b^{Y_2^0} \frac{ds}{\varphi_2(s)} \quad \text{расходится}, \end{cases} \tag{3.1}$$

и b — любое число из промежутка $\Delta(Y_2^0)$.

Поскольку $\psi'(z) > 0$ при $z \in \Delta(Y_2^0)$, то $\psi\colon \Delta(Y_2^0) \longrightarrow \Delta(\Phi_2^0)$ — возрастающая функция, где $\Phi_2^0 = \lim_{z\to Y_2^0} \psi(z)$, и, следовательно, Φ_2^0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, $\Delta(\Phi_2^0)$ — односторонняя окрестность Φ_2^0.

Введем обозначение для знака окрестности $\Delta(Y_2^0)$:

$$\mu = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad Y_2^0 = +\infty \quad \text{либо} \quad Y_2^0 = 0 \quad \text{и} \quad \Delta(Y_2^0) - \text{правая окрестность } 0, \\ -1, & \text{если} \quad Y_2^0 = -\infty \quad \text{либо} \quad Y_2^0 = 0 \quad \text{и} \quad \Delta(Y_2^0) - \text{левая окрестность } 0. \end{cases}$$

Из определения функции $\varphi_1(z)$ следует, что $\varphi_1'(z)$ сохраняет знак. Следовательно, можем ввести обозначение

$$\rho = \operatorname{sign} \varphi_1'(z).$$

Также определим

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

$$J(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_A^t p(\tau)\,d\tau, & \text{если} \quad (1-\lambda)\Lambda_0 \neq 1, \\ \displaystyle\int_A^t \pi_\omega(\tau)p(\tau)\,d\tau, & \text{если} \quad (1-\lambda)\Lambda_0 = 1, \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 1 - \lambda - \Lambda_0^{-1}, & \text{если} \quad (1-\lambda)\Lambda_0 \neq 1, \\ -1, & \text{если} \quad (1-\lambda)\Lambda_0 = 1, \end{cases}$$

где предел интегрирования A принадлежит $\{\omega, a\}$ и выбран так, чтобы интеграл J стремился либо к нулю, либо к ∞ при $t \uparrow \omega$.

Кроме того, положим

$$A_1^* = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \omega = \infty, \\ -1, & \text{если} \quad \omega < \infty, \end{cases} \qquad A_2^* = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad A = a, \\ -1, & \text{если} \quad A = \omega. \end{cases}$$

С помощью введенных обозначений сформулируем необходимые и достаточные условия существования $P_\omega(\Lambda_0)$-решений уравнения (1.1).

Теорема 3.1. *Пусть* $\Lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Тогда для существования* $P_\omega(\Lambda_0)$*-решений дифференциального уравнения* (1.1) *необходимо*, *а если*

$$\lambda \neq 1, \quad \textit{либо} \quad \lambda = 1 \qquad \textit{и} \qquad \Lambda_0 > 0, \tag{3.2}$$

то и достаточно, *чтобы*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'(t)}{J(t)} = -\beta \tag{3.3}$$

и выполнялись знаковые условия

$$\begin{gathered} -A_1^*\Lambda_0 > 0 \quad \textit{при} \quad \Phi_1^0 = +\infty, \qquad -A_1^*\Lambda_0 < 0 \quad \textit{при} \quad \Phi_1^0 = 0, \\ A_2^*\beta > 0 \quad \textit{при} \quad \Phi_2^0 = +\infty, \qquad A_2^*\beta < 0 \quad \textit{при} \quad \Phi_2^0 = 0, \end{gathered} \tag{3.4}$$

$$\operatorname{sign}\,[\mu A_1^* \Lambda_0] = -\rho \qquad \textit{и} \qquad \operatorname{sign}\,[\alpha_0 A_2^* \beta] = 1. \tag{3.5}$$

Более того, *каждое такое решение допускает при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{\varphi_1(y(t))}{\varphi_1'(y(t)) y'(t)} = -\Lambda_0 \pi_\omega(t)[1 + o(1)], \tag{3.6}$$

$$\frac{y'(t)}{\varphi_1(y(t))\varphi_2(y'(t))} = -\alpha \pi_\omega(t) p(t)[1 + o(1)], \tag{3.7}$$

причем при $\Lambda_0 > 0$ *существует однопараметрическое семейство таких решений*, *а при* $\Lambda_0 < 0$ *— двупараметрическое семейство таких решений*, *если* $\omega = +\infty$ *и* $\lambda > 1$ *либо если* $\omega < +\infty$ *и* $\lambda < 1$.

Доказательство. Покажем, что уравнение (1.1) сводится к системе (2.1). Вначале отметим, что ψ — правильно меняющаяся при $z \to Y_2^0$ функция порядка $1 - \lambda$, если $\lambda \neq 1$, и медленно меняющаяся, если $\lambda = 1$.

Действительно, с использованием свойств правильно меняющихся функций и правила Лопиталя имеем

$$\lim_{z\to Y_2^0}\frac{z\psi'(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to Y_2^0}\frac{z}{\psi(z)\varphi_2(z)}=\lim_{z\to Y_2^0}\frac{\left(\dfrac{z}{\varphi_2(z)}\right)'}{\psi'(z)}=1-\lim_{z\to Y_2^0}\frac{z\varphi_2'(z)}{\varphi_2(z)}=1-\lambda. \tag{3.8}$$

Как было отмечено ранее, функция $\psi(z)$ является возрастающей, а значит, и обратимой. Более того, в силу свойств медленно, быстро и правильно меняющихся функций, $\psi^{-1}(z)\colon \Delta(\Phi_2^0)\longrightarrow\Delta(Y_2^0)$ — правильно меняющаяся при $z\to\Phi_2^0$ функция порядка $\dfrac{1}{1-\lambda}$, если $\lambda\neq 1$, и быстро меняющаяся, если $\lambda=1$.

Кроме того, для нее имеем

$$\lim_{z\to\Phi_2^0}\frac{\psi^{-1}(z)\left(\psi^{-1}(z)\right)''}{\left[(\psi^{-1}(y_2))'\right]^2}=\lim_{z\to\Phi_2^0}\frac{-\psi^{-1}(z)\psi''\left(\psi^{-1}(z)\right)}{\psi'\left(\psi^{-1}(z)\right)}=$$

$$=\lim_{z\to\Phi_2^0}\frac{\psi^{-1}(z)\varphi_2'\left(\psi^{-1}(z)\right)}{\varphi_2\left(\psi^{-1}(z)\right)}=\lim_{u\to Y_2^0}\frac{u\varphi_2'(u)}{\varphi_2(u)}=\lambda. \tag{3.9}$$

Сведем уравнение (1.1) с помощью преобразования

$$y=u_1,\qquad \psi(y')=u_2 \tag{3.10}$$

к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} u_1'&=\mu\left|\psi^{-1}(u_2)\right|,\\ u_2'&=\alpha_0 p(t)\varphi_1(u_1). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Поскольку функция $\varphi_1\colon\Delta(Y_1)\to\,]0,+\infty[$ удовлетворяет условию (1.4), а функция $\left|\psi^{-1}(z)\right|\colon \Delta(\Phi_2^0)\to\,]0,+\infty[$ — условию (3.9), получаем, что система (3.11) является системой типа (2.1) (при $n=2$).

Более того, несложно заметить, что y будет $P_\omega(\Lambda_0)$-решением уравнения (1.1) тогда и только тогда, когда соответствующее ему в силу замен (3.10) решение (u_1,u_2) системы (3.11) будет $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_0)$-решением. Кроме того, отметим, что так как функция $\varphi_1(z)$ является быстро меняющейся, то для системы (3.11) заведомо выполнено условие (2.3), а значит, для системы (3.11) справедлива теорема 2.1.

Следовательно, необходимые и достаточные условия существования $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_0)$-решений для системы (3.11), сформулированные в теореме 2.1, будут необходимыми и достаточными условиями существования $P_\omega(\Lambda_0)$-решений уравнения (1.1).

Конкретизируем обозначения в теореме 2.1 для системы (3.11):

$$\alpha_1=\mu,\qquad p_1(t)\equiv 1,\qquad \alpha_2=\alpha_0,\qquad p_2(t)=p(t),\qquad \rho_1=\rho,\qquad \rho_2=\operatorname{sign}\left(\psi^{-1}(z)\right)'=1,$$

$$I_1(t)=\pi_\omega(t),\qquad \beta_1=-\Lambda_0,\qquad I_2(t)=J(t),\qquad \beta_2=\beta.$$

Записав условия (2.4) – (2.7) для системы (3.11), получим условия (3.2) – (3.5).

Для получения асимптотических представлений (3.6), (3.7) достаточно записать асимптотические представления (2.8), (2.9) для системы (3.11) и воспользоваться заменой (3.10).

Теорема доказана.

В силу свойств правильно меняющихся функций справедливы представления

$$\begin{aligned} \varphi_1'(\varphi_1^{-1}(z)) &= |z|\theta_1(z), \\ \varphi_2(z) &= |z|^\lambda \theta_2(z), \end{aligned} \tag{3.12}$$

в которых функции $\theta_i(z)$, $i = 1, 2$, являются медленно меняющимися.

Пусть функции $\theta_1(z)$, $\theta_2(z)$ удовлетворяют условию S. Тогда, воспользовавшись теоремой 2.2, можем записать более простые асимптотические формулы для $P_\omega(\Lambda_0)$-решений уравнения (1.1).

Теорема 3.2. *Пусть* $\Lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *и функции* $\theta_i(z)$, $i \in \{1, 2\}$, *удовлетворяют условию* S. *Тогда каждое* $P_\omega(\Lambda_0)$*-решение* (*в случае их существования*) *дифференциального уравнения* (1.1) *допускает при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$\varphi_1(y(t)) = \left|\Lambda_0 \pi_\omega(t) \theta_1\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{-1}{\Lambda_0}}\right)\right|^{\lambda - 1} \left|\pi_\omega(t) p(t) \theta_2\left(|J(t)|^{\frac{1}{\beta}}\right)\right|^{-1} [1 + o(1)],$$

$$y'(t) = \mu \left|\Lambda_0 \pi_\omega(t) \theta_1\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{-1}{\Lambda_0}}\right)\right|^{-1} [1 + o(1)].$$

4. Приложение основных результатов. Рассмотрим уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t) e^{\sigma |y|^\delta} \left|y'\right|^\lambda \ln^\gamma \left|y'\right|, \tag{4.1}$$

где $\alpha_0 \in \{1, -1\}$, $\delta, \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, λ, $\gamma \in \mathbb{R}$, $p\colon [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная функция.

Уравнение (4.1) является уравнением вида (1.1), в котором $\varphi_1(z) = e^{\sigma |z|^\delta}$, $\varphi_2(z) = |z|^\lambda \ln^\gamma |z|$. Более того, уравнение (4.1) при $\delta = 1$, $\gamma = 0$ является уравнением (1.3). Функция $\varphi_1(z)$ в случае, когда $\delta > 0$, является быстро меняющейся при $z \to \pm\infty$, в случае, когда $\delta < 0$, — быстро меняющейся при $z \to 0$, а функция $\varphi_2(z)$ — правильно меняющейся порядка λ при $z \to Y_2^0$.

Для данных функций $\varphi_i(z)$, $i = \overline{1, 2}$, функции $\theta_i(z)$, определенные в (3.11), принимают вид

$$\theta_1(z) = \delta \sigma^{\frac{1}{\delta}} \left[\ln z\right]^{\frac{\delta - 1}{\delta}}, \qquad \theta_2(z) = \ln^\gamma |z|$$

и удовлетворяют условию S.

Для уравнения (4.1) условие (1.6) в определении $P_\omega(\Lambda_0)$-решения примет вид

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{1}{\sigma \delta |y|^\delta} \frac{y y''(t)}{[y'(t)]^2} = \Lambda_0.$$

Для уравнения (4.1) на основании теорем 3.1 и 3.2 можно сформулировать следующее утверждение.

***Следствие* 4.1.** *Пусть* $\Lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Тогда для существования* $P_\omega(\Lambda_0)$*-решения дифференциального уравнения* (4.1) *необходимо, а если выполнено условие* (3.2), *то и достаточно, чтобы выполнялись условия* (3.3) – (3.5), *причем каждое такое решение допускает при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$\left|y(t)\right|^\delta = \frac{1}{\sigma} \left[(\lambda - 1) \ln \left| \Lambda_0 \delta \sigma^{\frac{1}{\delta}} \pi_\omega(t) \left[-\frac{1}{\Lambda_0} \ln |\pi_\omega(t)| \right]^{\frac{\delta - 1}{\delta}} \right| - \right.$$

$$- \ln\left|\pi_\omega(t)p(t)\left[\frac{1}{\delta}\ln|J(t)|\right]^\gamma\right|\Bigg] + o(1),$$

$$y'(t) = \mu\left|\Lambda_0\delta\sigma^{\frac{1}{\delta}}\pi_\omega(t)\left[-\frac{1}{\Lambda_0}\ln|\pi_\omega(t)|\right]^{\frac{\delta-1}{\delta}}\right|^{-1}\big[1+o(1)\big].$$

При этом при $\Lambda_0 > 0$ *существует однопараметрическое семейство таких решений, а при* $\Lambda_0 < 0$ *— двупараметрическое семейство таких решений, если* $\omega = +\infty$ *и* $\lambda > 1$ *либо если* $\omega < +\infty$ *и* $\lambda < 1$.

Для уравнения (1.3), как частный случай уравнения (4.1) при $\delta = 1$ и $\gamma = 0$, также можно записать явные асимптотические формулы для $P_\omega(\Lambda_0)$-решений.

1. *Белозерова М. А.* Асимптотические свойства одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Мат. студ. – 2008. – **29**, № 1. – С. 52 – 62.
2. *Білозерова М. О.* Асимптотичні зображення розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями у деякому сенсі близькими до степеневих // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. – 2008. – Вип. 374. – С. 34 – 43.
3. *Белозерова М. А.* Асимптотические представления решений неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, близкими к степенным // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 1. – С. 3 – 15.
4. *Евтухов В. М., Белозерова М. А.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 3. – С. 310 – 331.
5. *Евтухов В. М., Дрик Н. Г.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Сообщ. АН ГССР. – 1989. – **133**, № 1. – С. 29 – 32.
6. *Evtukhov V. M., Drik N. G.* Asymptotic behavior of solutions of a second order nonlinear differential equation // Georg. Math. J. – 1996. – **3**, № 2. – P. 101 – 120.
7. *Evtukhov V. M., Vishnyakov V. I., Dragan G. S.* Nonlinear Poisson – Boltzmann equation in spherical symmetry // Phys. Rev. – 2007. – **76**, № 3. – P. 1 – 5.
8. *Евтухов В. М., Харьков В. М.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 2007. – **43**, № 9. – С. 1311 – 1323.
9. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. – 2011. – **47**, № 5. – С. 628 – 650.
10. *Евтухов В. М., Шлепаков О. Р.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно и быстро меняющимися нелинейностями // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 9. – С. 1165 – 1185.
11. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1998. – 295 с.
12. *Hastings S. P., Poor A. B.* A nonlinear problem from combustion theory: Linan's problem // SIAM J. Math. Anal. – 1983. – **14**, № 3. – P. 425 – 430.
13. *Hastings S. P., Poor A. B.* Linan's problem from combustion theory. Pt II // SIAM J. Math. Anal. – 1985. – **16**, № 2. – P. 331 – 340.
14. *Maric V.* Regular variation and differential equations. – Springer, 2000. – 127 p.
15. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.

Получено 11.09.14