УДК 517.547

М. З. Двейрин (Донец. нац. ун-т)

О СВЯЗИ СКОРОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ С ЕЕ ПОРЯДКОМ И ТИПОМ

We study the relationship between the order and type of an entire function and the rate of its best polynomial approximation for various Banach spaces of functions analytic in the unit disk. The relations specifying the order and type of the entire function via the sequence of its best approximations are deduced. The results are obtained by generalizingt the results obtained earlier by A. R. Reddy, I. I. Ibragimov and N. I. Shyhaliev, S. B. Vakarchyk, and R. Mamadov.

Досліджується зв'язок між порядком і типом цілої функції та швидкістю її найкращої поліноміальної апроксимації для широкого кола банахових просторів функцій, аналітичних в одиничному крузі. Знайдено співвідношення, що визначають порядок та тип цілої функції через послідовність її найкращих наближень. Отримані результати є узагальненням результатів А. Р. Редді, І. І. Ібрагімова та Н. І. Шихалієва, С. Б. Вакарчука, Р. Мамадова.

1. Введение. Рассмотрим банахово пространство X, образованное аналитическими в единичном круге $\mathbb{D}$ функциями, имеющими конечную норму $\|\cdot\|$. Будем считать, что $\|\cdot\|$ помимо обычных свойств нормы удовлетворяет также условиям

$$\|f(\cdot e^{it})\| \equiv \|f(\cdot)\| \tag{1}$$

для всех $t \in \mathbb{R}$ и $f \in X$,

$$\|f(\cdot)\| < \infty \tag{2}$$

для любой целой функции (т. е. пространство X содержит все целые функции),

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(ze^{it}) g(t)\, dt \right\| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |g(t)|\, dt\ \|f(\cdot)\| \tag{3}$$

для любых функций $f \in X$ и $g \in L[0;2\pi]$ (иначе говоря, $\|f * g\| \le \|f\|\, \|g\|_{L[0;2\pi]}$ для любых $f \in X$ и $g \in L[0;2\pi]$).

Этим требованиям удовлетворяет норма в ряде функциональных пространств, являющихся объектом многочисленных исследований (автору неизвестны примеры пространств, в которых выполняются условия (1), (2) и при этом не выполняется условие (3); в частности, оно выполняется для полиномов и потому верно в функциональных пространствах, где полиномы плотны). Приведем некоторые из них.

1. Пространство B функций, аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ и непрерывных на его замыкании $\overline{\mathbb{D}}$ с нормой

$$\|f\| = \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |f(z)| < \infty\,.$$

2. Пространства Харди H_p, $p \ge 1$, функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$ с нормой

$$\|f\| = \sup_{0<r<1} M_p\,(f,r), \qquad M_p\,(f,r) := \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p\, dt \right)^{1/p}, \qquad p \in [1;\infty),$$

$$\|f\| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|\,, \qquad p = \infty.$$

3. Пространства Бергмана H_p' функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$ при $p \in [1;\infty)$ с нормой

$$\|f\| = \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{z\in D}\int |f(x+iy)|^p\; dxdy \right)^{1/p},$$

и обобщенные (весовые) пространства Бергмана $H_{p,\,\rho}'$ функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$ при $p \in [1;\infty)$ с нормой

$$\|f\| = \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{z\in D}\int |f(x+iy)|^p\; \rho(|z|) dxdy \right)^{1/p}$$

и радиальным весом $\rho(|z|)$.

4. Пространства A_p, $p \in (0;1)$, функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$ с нормой

$$\|f\| = \int\limits_0^1 (1-r)^{1/p-2} M_1\,(f,r)\, dr\,,$$

впервые изучавшиеся Харди и Литтлвудом [1] и позднее Ромбергом, Дюреном и Шилдсом [2].

5. Пространства $\mathcal{B}_{p,\,q,\,\lambda}$, $0 < p < q \le \infty$, $\lambda > 0$, функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$ с нормой

$$\|f\| = \left\{ \int\limits_0^1 (1-r)^{\lambda(1/p-1/q)-1}\, M_q^\lambda(f,r)\, dr \right\}^{1/\lambda}, \qquad \lambda < \infty,$$

$$\|f\| = \sup_{0<r<1} \left\{ (1-r)^{(1/p-1/q)}\, M_q\,(f,r) \right\}, \qquad \lambda = \infty,$$

введенные Харди и Литтлвудом в работе [1] (см. также [3]). Известно [3], что в случае $\min(q,\,\lambda) \ge 1$ пространства $\mathcal{B}_{p,\,q,\,\lambda}$ являются банаховыми.

6. Пространства со смешанной нормой $H^{p,\,q,\,\alpha}$, $p, q \ge 1$, $\alpha > 0$, образованные функциями, аналитическими в круге $\mathbb{D}$ с конечной нормой

$$\|f\| = \left\{ \int\limits_0^1 (1-r)^{q\alpha-1} M_p^q(f,r)\, dr \right\}^{1/q}, \qquad q < \infty,$$

$$\|f\| = \sup_{0<r<1} \left\{(1-r)^{\alpha} M_p\,(f,r)\right\}, \qquad q=\infty,$$

введенные Харди и Литтлвудом в работе [1]. Заметим, что пространства $H^{p,\,q,\,\alpha}$ и $\mathcal{B}_{p,\,q,\,\lambda}$ отличаются лишь способом введения параметров.

7. Пространство $BMOA$ [4, с. 14], состоящее из функций $f \in H_1$ с нормой

$$\|f\| = \sup_{I} \int\limits_{I} |f(\zeta) - f_I| d\sigma(\zeta)\,,$$

где $f(\zeta)$ — граничные значения функции $f(z)$ на единичной окружности, а f_I — среднее арифметическое значение функции $f(\zeta)$ на дуге I.

8. Пространства типа Блоха $\mathcal{B}_{\alpha}$, $\alpha \in (0,\infty)$, состоящие из функций, аналитических в D с конечной нормой

$$\|f\| = |f(0)| + \sup_{z\in D}(1-|z|^2)^{\alpha}|f'(z)|\,.$$

Пространства $\mathcal{B}_{\alpha}$ являются банаховыми [5, с. 1144], при $\alpha=1$ $\mathcal{B}_{\alpha}$ совпадает с пространством Блоха $\mathcal{B}$.

9. Введенные Е. М. Дынькиным ([6, с. 56], см. также [4, с. 10]) пространства $\mathcal{A}^{s}_{p,q}(\mathbb{D})$, являющиеся аналогами классов О. В. Бесова $\mathcal{B}^{s}_{p,q}[-1;1]$. Эти пространства образованы функциями $f \in H_p$, $p\in[1;\infty]$, с нормой

$$\|f\| = \left\{ \int\limits_0^1 \left(\frac{\omega_m(f,\,t)_p}{t^s}\right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} + \sup_{0<r<1} M_p\,(f,r).$$

Здесь $q\in[1;\infty]$, $s>0$, $m>s$ — натуральное число, $\omega_m(f,\,t)_p$ — m-й модуль гладкости в пространстве L_p функции $f(e^{i\cdot})$, представляющей собой радиальные предельные значения f. Случай $q=\infty$ трактуется традиционно.

10. Обобщенные пространства Дирихле $\mathcal{D}_p(\alpha)$ функций, аналитических в $\mathbb{D}$ с нормой

$$\|f(z)\| = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^p\,\alpha_k\right)^{1/p},$$

где $c_k = c_k(f)$ — коэффициенты Тейлора функции f, $p\ge 1$, $\alpha=\{\alpha_k\}$ — фиксированная последовательность положительных чисел с условиями

$$\limsup_{k\to\infty}\,(\alpha_k)^{1/k} < \infty, \qquad \liminf_{k\to\infty}\,(\alpha_k)^{1/k} \ge 1.$$

Отметим, что приведенные выше примеры функциональных пространств со свойствами (1) – (3) не исчерпывают их многообразия.

Пусть $E_n(f) \equiv E_n(f,\,L_n)$ — наилучшее приближение функции $f\in X$ элементами линейного подпространства L_n:

$$E_n(f) := \inf_{p\in L_n} \|f-p\,\|\,.$$

В качестве аппроксимирующего подпространства L_n будем рассматривать совокупность $\mathcal{P}_n$ алгебраических полиномов комплексной переменной степени не выше $n-1$, p_n^* — полином наилучшего приближения степени не выше $n-1$ для функции f, т. е. такой, что $E_n(f) = \|f - p_n^*\|$. В статье [7] найдены соотношения, определяющие порядок и тип целой функции через последовательность $E_n(f)$ ее наилучших приближений в случае $X = H_2'$. В 1976 г. И. И. Ибрагимов и Н. И. Шихалиев получили подобные соотношения для пространств $X = H_p'$ с произвольным $p \geq 1$. Приведем формулировки теорем из их работы [8] (см. также [9]).

Теорема А. *Для того чтобы $f(z) \in H_p'$ ($p \geq 1$ любое) была целой функцией, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} (E_n(f))^{1/n} = 0. \tag{4}$$

Теорема Б. *Для того чтобы $f(z) \in H_p'$ ($p \geq 1$ любое) была целой функцией конечного порядка ρ, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{-\ln E_n(f)} = \rho. \tag{5}$$

Теорема В. *Для того чтобы $f(z) \in H_p'$ ($p \geq 1$ любое) была целой функцией конечного порядка ρ и нормального типа σ, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\limsup_{n\to\infty} n(E_n(f))^{\rho/n} = \sigma e \rho. \tag{6}$$

Аналогичные результаты были получены С. Б. Вакарчуком [10, 11] для пространств $\mathcal{B}_{p,q,\lambda}$. Р. Мамадов [12] распространил эти результаты на весовые пространства Бергмана с радиальным весом $\rho(|z|)$. В настоящей статье эти результаты распространяются на широкую совокупность нормированных пространств функций, аналитических в единичном круге, включающую среди прочих приведенные выше пространства 1 – 10. Метод доказательства фрагментами повторяет доказательства в указанных выше работах, но в целом не совпадает ни с одним из них.

2. Формулировки основных результатов. Основными результатами статьи являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $f \in X$. Условие*

$$\lim_{n\to\infty} (E_n(f))^{1/n} = 0 \tag{7}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы функция f была целой.

Теорема 2. *Для того чтобы функция $f \in X$ была целой конечного порядка $\rho \in (0;\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{\ln \dfrac{\|z^n\|}{E_n(f)}} = \rho. \tag{8}$$

Теорема 3. *Пусть существует конечный предел* $\lim_{n\to\infty}(\|z^n\|)^{1/n} = \mu$. *Для того чтобы функция* $f \in X$ *была целой функцией конечного порядка* $\rho \in (0;\infty)$ *и нормального типа* $\sigma \in (0;\infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{e\rho}\left(\frac{E_n(f)}{\|z^n\|}\right)^{\rho/n} = \sigma. \tag{9}$$

Теоремы 2 и 3 выражают порядок и тип целой функции через скорость ее аппроксимации по норме пространства X, которое может быть выбрано достаточно произвольно. Это наводит на мысль о справедливости следующего утверждения.

Теорема 4. *Для целой функции* f *положим* $f_r(z) := f(rz)$ (*здесь и всюду далее*). *Тогда порядок* ρ *и тип* σ *целой функции* f *удовлетворяют равенствам*

$$\rho := \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln\|f_r\|}{\ln r}, \tag{10}$$

$$\sigma := \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\|f_r\|}{r^\rho} \tag{11}$$

для любого вышеописанного банахова пространства X *со свойствами* (1) – (3).

В случае, когда $X = B$, соотношения (10) и (11) совпадают с обычным определением порядка и типа целой функции.

3. Применение к конкретным пространствам. Выполнение условий (1) и (2) во всех вышеприведенных примерах пространств очевидно. Покажем, что в приведенных выше функциональных пространствах выполняется также условие (3).

Лемма 1. *Условие* (3) *выполнено в пространствах* B; H_p, $p \geq 1$; $H'_{p,\rho}$, $p \geq 1$; A_p, $p \in (0;1)$; $H^{p,q,\alpha}$, $p,q \geq 1$, $\alpha > 0$; $BMOA$; $\mathcal{B}_\alpha$, $\alpha \in (0;\infty)$; $\mathcal{A}^s_{p,q}(\mathbb{D})$, $p,q \in [1;\infty]$, $s > 0$; $\mathcal{D}_p(\alpha)$, $p \geq 1$.

Доказательство. В пространствах B и A_p выполнение свойства (3) очевидно. В пространствах H_p, $H'_{p,\rho}$ при $p \geq 1$ свойство (3) очевидным образом следует из обобщенного неравенства Минковского для пространств L_p. В случае пространства $BMOA$

$$\left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(ze^{it})g(t)\,dt\right\| =$$

$$= \sup_I \int_I \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i(t+\varphi)})g(t)dt - \frac{1}{|I|}\int_I \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i(t+u)})g(t)dt\right)du\right| d\varphi =$$

$$= \sup_I \int_I \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i(t+\varphi)})g(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{|I|}\int_I f(e^{i(t+u)})g(t)du\right)dt\right| d\varphi =$$

$$= \sup_I \int\limits_I \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(t) \left(f(e^{i(t+\varphi)}) - \frac{1}{|I|} \int\limits_I f(e^{i(t+u)}) du \right) dt \right| d\varphi \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |g(t)|\, dt\, \|f(\cdot)\|$$

в силу свойства (1) нормы в пространстве X.

Убедимся в выполнении условия (3) в пространстве $\mathcal{B}_\alpha$:

$$\|f * g\| = \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(0) g(t)\, dt \right| + \sup_{z \in D} (1 - |z|^2)^\alpha \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f'(ze^{it}) g(t) e^{it}\, dt \right| \le$$

$$\le |f(0)|\, \|g(t)\|_L + \sup_{z \in D} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} (1 - |z|^2)^\alpha\, |f'(ze^{it}) g(t) e^{it}|\, dt \le$$

$$\le \|g(t)\|_L (|f(0)| + \sup_{z \in D} (1 - |z|^2)^\alpha\, |f'(ze^{it})|) = \|f\|\, \|g(t)\|_L.$$

Пусть теперь $f \in H^{p,\,q,\,\alpha}$, $g \in L_{[0;\,2\pi]}$, $z = re^{i\varphi}$. В пространстве $H^{p,\,q,\,\alpha}$, используя обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$\|f * g\| = \left\{ \int\limits_0^1 (1 - r)^{q\alpha - 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(re^{i(\varphi+t)}) g(t)\, dt \right|^p d\varphi \right)^{q/p} \right\}^{1/q} \le$$

$$\le \left\{ \int\limits_0^1 (1 - r)^{q\alpha - 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} dt \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i(\varphi+t)}) g(t)|^p d\varphi \right)^{1/p} \right)^q \right\}^{1/q} = \|f\|\, \|g\|_L.$$

Докажем, что свойство (3) выполнено и в пространстве $\mathcal{A}^s_{p,q}(\mathbb{D})$.

Из интегрального представления свертки

$$(f * g)\ \ (e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(e^{i(\varphi+t)}) g(t)\, dt,$$

вследствие линейности оператора m-й разности $\Delta^h_m(\cdot,\, \varphi)$

$$\Delta^h_m(f * g, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Delta^h_m(f(e^{i(\cdot\ +t)}), \varphi)\, g(t)\, dt,$$

используя обобщенное неравенство Минковского, получаем

$$\omega_m(f * g,\, h)_p \le \omega_m(f,\, h)_p\, \|g\|_L.$$

Из этого неравенства и отмеченной раньше справедливости свойства (3) в пространстве H_p следует справедливость свойства (3) в пространстве $\mathcal{A}^s_{p,q}(\mathbb{D})$.

Докажем выполнение свойства (3) в пространстве $\mathcal{D}_p(\alpha)$. Пусть c_k — коэффициенты Тейлора функции $f \in \mathcal{D}_p(\alpha)$, b_k — коэффициенты Фурье суммируемой функции g, $z \in \mathbb{D}$. Тогда

$$(f * g)(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(ze^{it}) g(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k b_{-k} z^k$$

и

$$\|f * g\| = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |c_k b_{-k}|^p \, \alpha_k \right)^{1/p} \leq \sup_k |b_k| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^p \, \alpha_k \right)^{1/p} \leq \|f\| \, \|g\|_L.$$

Лемма 1 доказана.

Убедимся, что в приведенных выше пространствах выполнено условие теоремы 3 на поведение последовательности $\|z^n\|$. Для этого покажем, что в этих пространствах $\lim_{n\to\infty}(\|z^n\|)^{1/n} = 1$. В пространствах B и H_p, $p \geq 1$, $\|z^n\| = 1$ при $n \geq 0$, и, следовательно, условия теоремы 3 в этих пространствах выполнены. В пространствах H_p' , $p \geq 1$, $\|z^n\| = (np+2)^{-1/p}$ при $n \geq 0$, и условия теоремы 3 в этих пространствах также выполняются, теоремы 1 – 3 совпадают с соответствующими теоремами из [8]. В пространствах $\mathcal{B}_p$ $\|z^n\| = (2\pi B(1/p-1,\, np+1))^{1/p}$ при $p \in (0;1)$, где $B(\cdot,\, \cdot)$ — бета-функция Эйлера. Из свойств бета-функции следует, что в этом пространстве $\lim_{n\to\infty}(\|z^n\|)^{1/n} = 1$ и к пространствам $\mathcal{B}_p$ теорема 3 применима. В пространствах $\mathcal{B}_{p,\,q,\,\lambda}$ $\|z^n\| = B(\lambda n+1,\, \lambda pq/(q-p)+1)$ при $\lambda < \infty$ и, как и в предыдущем случае, $\lim_{n\to\infty}(\|z^n\|)^{1/n} = 1$. При $\lambda = \infty$ $\|z^n\| = \sup_{0<r<1} r^n (1-r)^{pq/(q-p)}$. Поскольку $(1-1/n)^n \, n^{pq/(p-q)} \leq \|z^n\| < 1$, то $\lim_{n\to\infty}(\|z^n\|)^{1/n} = 1$ и теорема 3 применима к пространствам $\mathcal{B}_{p,\,q,\,\lambda}$. В этом случае теоремы 1 – 3 совпадают с результатами С. Б. Вакарчука [10]. В весовых пространствах Бергмана $H'_{p,\rho}$

$$\|z^n\| = \left(2 \int\limits_0^1 \, t^{pn+1} \, \rho(t) dt \right)^{1/p} \leq \left(2 \int\limits_0^1 \, t \, \rho(t) dt \right)^{1/p}$$

и $\limsup_{n\to\infty} (\|z^n\|)^{1/n} \leq 1$ в случае, когда функция $t\rho(t)$ суммируема на отрезке [0; 1]. С другой стороны, при $\varepsilon \in (0;1)$

$$\|z^n\| \geq \left(2 \int\limits_{1-\varepsilon}^1 \, t^{pn+1} \, \rho(t) dt \right)^{1/p} \geq (1-\varepsilon)^n \, \left(2 \int\limits_{1-\varepsilon}^1 \, t \, \rho(t) dt \right)^{1/p}$$

и $\liminf_{n\to\infty} (\|z^n\|)^{1/n} \geq 1-\varepsilon$, если вес $\rho(t)$ удовлетворяет естественному условию $\displaystyle\int_{1-\varepsilon}^1 t\,\rho(t)dt > 0$ при каждом $\varepsilon \in (0;1)$. Вследствие произвольности $\varepsilon \in (0;1)$ с учетом оценки $\limsup_{n\to\infty} (\|z^n\|)^{1/n} \leq 1$ имеем $\lim_{n\to\infty}(\|z^n\|)^{1/n} = 1$. Таким образом, теорема 3 применима и к пространствам $H'_{p,\rho}$. В этом случае мы получаем соответствующие результаты Р. Мамадова (см. [12]).

Проверим, что условия теоремы 3 выполнены также в пространстве $\mathcal{A}^s_{p,q}(\mathbb{D})$. Поскольку $|\Delta^h_m(e^{in\cdot})| = |(1-e^{inh})^m| = (2\sin nh/2)^m$, то

$$\|z^n\| = \left\{ \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} \left(\frac{(2\sin nt/2)^m}{t^s} \right)^q \frac{dt}{t} + \int\limits_{\frac{\pi}{n}}^1 2^{mq} t^{-sq-1} dt \right\}^{1/q} + 1 \leq$$

$$\leq \left\{ \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} n^{mq} t^{(m-s)q-1} dt + \int\limits_{\frac{\pi}{n}}^1 2^{mq} t^{-sq-1} dt \right\}^{1/q} + 1 \leq C\, n^q,$$

где C — положительное число, зависящее только от m, s, q. Из этой оценки следует, что в пространстве $\mathcal{A}^s_{p,q}(\mathbb{D})$ $\lim_{n\to\infty}(\|z^n\|)^{1/n} = 1$.

Перейдем теперь к пространству $BMOA$. Положим $f = z^n$, найдем f_I и оценим $\|z^n\|$ в $BMOA$. Пусть I — дуга единичной окружности с концами в точках e^{it_1} и e^{it_2}, $t_2 > t_1$, $x = \dfrac{t_1+t_2}{2}$, $h = \dfrac{t_2-t_1}{2}$. Тогда

$$f_I = \frac{1}{t_2 - t_1} \int\limits_{t_1}^{t_2} e^{int} dt = \frac{\sin nh}{nh}\, e^{inx}.$$

Положим

$$A = \frac{1}{t_2 - t_1} \int\limits_{t_1}^{t_2} \left| e^{int} - \frac{\sin nh}{nh}\, e^{inx} \right| dt = \frac{1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} \left| e^{int} - \frac{\sin nh}{nh} \right| dt.$$

Поскольку $A \leq 2$, то $\|z^n\| = \sup_{h\in[0;\,\pi]} A \leq 2$. Оценим теперь $\|z^n\|$ снизу:

$$\|z^n\| \geq \sup_{h=\frac{\pi}{2n}} A = \sup_n \frac{n}{\pi} \int\limits_{\frac{-\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} \left(1 - \frac{2}{\pi}\cos nt + \frac{4}{\pi^2}\right)^{1/2} dt \geq \sup_n \frac{2n}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}.$$

Из полученных оценок $\|z^n\|$ следует, что в пространстве $BMOA$ $\lim_{n\to\infty}(\|z^n\|)^{1/n} = 1$.

В пространствах $\mathcal{B}_\alpha$ при $n \geq 1$

$$\|z^n\| = \sup_{z\in D} |z^n|(1-|z|^2)^\alpha = \left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{n/2} \left(\frac{2\alpha}{n+2\alpha}\right)^\alpha,$$

откуда следует, что $\lim_{n\to\infty}(\|z^n\|)^{1/n} = 1$.

В пространстве $\mathcal{D}_p(\alpha)$ $\|z^n\| = (\alpha_n)^{1/p}$ и условие теоремы В выполнено в случае, когда $\lim_{n\to\infty}(\alpha_n)^{1/n} = 1$.

Таким образом, условия теорем 1 – 3 выполнены во всех приведенных выше пространствах. Для пространств $BMOA$, $\mathcal{B}_\alpha$, $\mathcal{D}_p(\alpha)$, $\mathcal{A}^s_{p,q}(\mathbb{D})$ теоремы 1 – 3 являются новыми.

4. Доказательства основных результатов. Нам понадобятся следующие две леммы. Первая из них является естественным обобщением неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора.

Лемма 2. *Пусть $f \in X$ и $f(z) = \sum_{k=0}^\infty c_k z^k$ в $\mathbb{D}$. Тогда*

$$|c_n|\,\|z^n\| \leq E_n(f) \leq \|f\|.$$

Доказательство. Воспользовавшись формулой для коэффициентов ряда Тейлора, запишем равенство

$$c_n z^n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(z\zeta) - P_n(z\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta,$$

где P_n — полином наилучшего приближения для $f(z)$ степени не выше $n-1$. Отсюда $|c_n|\|z^n\| \leq \leq E_n(f) \leq \|f(z)\|$ в силу свойств (3) и (1) нормы в пространстве X.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\mu_1 := \liminf_{n\to\infty} (\|z^n\|)^{1/n}$, $\mu_2 := \limsup_{n\to\infty} (\|z^n\|)^{1/n}$. *Тогда* $\mu_1 \geq 1$, $\mu_2 < \infty$.

Доказательство. Обозначим $\beta_n = (\|z^n\|)^{1/n}$. Докажем, что $\mu_2 < \infty$. Предположим противное, тогда существует подпоследовательность β_{n_k} такая, что $\lim_{k\to\infty} \beta_{n_k} = \infty$. Рассмотрим функцию f_0, определяемую степенным рядом

$$f_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\beta_{n_k})^{-n_k/2} z^{n_k}.$$

Она является целой и поэтому должна принадлежать X. Но тогда согласно лемме 2 при каждом натуральном k $(\beta_{n_k})^{-n_k/2}\|z^{n_k}\| \leq \|f_0\| < \infty$, что невозможно. Для доказательства того, что $\mu_1 \geq 1$, допустим противное, т. е. что $\mu_1 < 1$. Зафиксируем $\varrho \in (\mu_1;\, 1)$ и рассмотрим функцию, определяемую рядом Тейлора

$$f_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varrho^{-n_k} z^{n_k}, \tag{12}$$

где n_k — последовательность, для которой $\liminf_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{k\to\infty} \beta_{n_k} = \mu_1$.

Функция f_0 аналитична в круге $|z| < \rho$, но неаналитична в $\mathbb{D}$. Нетрудно проверить, что последовательность частных сумм $S_{n,f_0}(z)$ ряда (12) фундаментальна в банаховом пространстве X и, следовательно, сходится в нем к некоторой функции $f_1 \in X$. Покажем, что тейлоровские коэффициенты функций f_0 и f_1 равны. Для произвольно фиксированного $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $n > k$

$$c_k(f_1) = c_k(S_{n,f_0}) + c_k(f_1 - S_{n,f_0}) = c_k(f_0) + c_k(f_1 - S_{n,f_0}).$$

Устремляя в этом равенстве n к ∞ и учитывая лемму 2, получаем $c_k(f_1) = c_k(f_0)$. Таким образом, функция f_1 принадлежит X, но не является аналитической в $\mathbb{D}$, что противоречит характеристике пространства X. Следовательно, предположение о том, что $\mu_1 < 1$, было неверным.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть* $f \in X$, K — *компакт,* $K \subset \mathbb{D}$. *Тогда при* $z \in K$

$$|f(z)| \leq C\,\|f\|,$$

где C — *постоянная, не зависящая от* f *и* z.

Доказательство. Положим $d := \sup\{|z|\colon z \in K\}$, $d < 1$. Запишем разложение функции f в ряд Тейлора и оценим ее модуль, использовав лемму 2 в предположении, что $z \in K$. Тогда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

$$|f(z)| \le \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|\, |z^k| \;\le\; \|f(z)\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k}{\|z^k\|} \;\le C\,\|f\|$$

в силу сходимости ряда, легко проверяемой с помощью признака Коши с учетом леммы 3.

Лемма 4 доказана.

***Замечание* 1.** Из леммы 4 следует, что при выполнении ее условий значение функции в точке $z \in K$ представляет собой ограниченный линейный функционал и из сходимости в пространстве X следует равномерная сходимость на компактах $K \subset \mathbb{D}$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что при любом натуральном n и $z \in K$ значение $f^{(n)}(z)$ является ограниченным линейным функционалом в X.

***Доказательство теоремы* 1.** *Достаточность.* Пусть $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ при $z \in \mathbb{D}$. Согласно лемме 2 $|c_n|\,\|z^n\| \le E_n(f)$. Отсюда

$$|c_n| \le \frac{E_n(f)}{\|z^n\|} \qquad \text{и} \qquad \lim_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} \le \lim_{n\to\infty} \left(\frac{E_n(f)}{\|z^n\|}\right)^{1/n} = 0,$$

т. е. функция f является целой.

Необходимость. Для функции $f \in X$ положим $f_\zeta(z) := f(z\zeta)$. Поскольку f — целая, то $f_R \in X$ при любом $R > 1$ и в силу следствия 2 теоремы 2 [13] (см. также [14], теорема 2.3)

$$E_n(f) \le R^{-n} E_n(f_R) \le R^{-n} \|f_R\|.$$

Поэтому с учетом леммы 3

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \left(\frac{E_n(f)}{\|z^n\|}\right)^{1/n} \le \frac{1}{R}\, \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\|z^n\|}\right)^{1/n} \le \frac{1}{R}.$$

В силу леммы 3 и произвольности $R > 1$ это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} (E_n(f))^{1/n} = 0.$$

Теорема 1 доказана.

***Замечание* 2.** В работах [13, 14] в условиях полученных там теорем пропущено условие (3), без которого они, вообще говоря, неверны. В данной статье условие (3) предполагается выполненным, и в этом случае используемое нами следствие 2 теоремы 2 работы [13] справедливо.

***Доказательство теоремы* 2.** *Достаточность.* Из условия (8) следует, что выполнено условие теоремы 1 и, следовательно, функция f является целой. Обозначим ее порядок α. Тогда

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{-\ln |c_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{\ln \dfrac{\|z^n\|}{E_n(f)}} = \rho \tag{13}$$

в силу леммы 2. Покажем теперь, что в условиях теоремы $\alpha > 0$. Предположим противное, т. е. что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{-\ln |c_n|} = 0.$$

Тогда для произвольного положительного $\varepsilon \in (0,\, 1)$ найдется N_ε такое, что при $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $n \ln n < -\varepsilon \ln |c_n|$ и равносильное ему неравенство

$$|c_n| < n^{-n/\varepsilon}.$$

Использовав последнее неравенство, оценим $E_n(f)$ при $n > N_\varepsilon$. Будем считать N_ε столь большим, что $\|z^n\| \le (\mu_2+\varepsilon)^n$ и $\|z^n\| \ge (1-\varepsilon)^n$ при $n \ge N_\varepsilon$. Тогда

$$E_n(f) \le \left\|\sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k\right\| \le \sum_{k=n}^{\infty} k^{-k/\varepsilon}(\mu_2+\varepsilon)^k \le \sum_{k=n}^{\infty} n^{-k/\varepsilon}\ (\mu_2+\varepsilon)^k =$$

$$= n^{-n/\varepsilon}(\mu_2+\varepsilon)^n\left(1-\frac{\mu_2+\varepsilon}{n^{1/\varepsilon}}\right)^{-1} \tag{14}$$

при дополнительном условии $n > (\mu_2+\varepsilon)^\varepsilon$. Из (14) получаем

$$\frac{\|z^n\|}{E_n(f)} \ge \left(\frac{1-\varepsilon}{\mu_2+\varepsilon}\right)^n n^{n/\varepsilon}\left(1-\frac{\mu_2+\varepsilon}{n^{1/\varepsilon}}\right),$$

$$\ln\left(\frac{\|z^n\|}{E_n(f)}\right)^{1/n} \ge \ln\frac{1-\varepsilon}{\mu_2+\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\ln n + \frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{\mu_2+\varepsilon}{n^{1/\varepsilon}}\right).$$

Отсюда

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{\|z^n\|}{E_n(f)}\right)^{1/n}}{\ln n} \ge \frac{1}{\varepsilon},$$

$$\rho = \limsup_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{\ln\dfrac{\|z^n\|}{E_n(f)}} \le \varepsilon,$$

что противоречит условию теоремы.

Выберем $\varepsilon \in (0;1/2)\cap(0;\alpha)$. Из того, что

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{-\ln|c_n|},$$

следует, что существует $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, зависящее только от ε и такое, что $|c_n| \le n^{-\frac{n}{\alpha+\varepsilon}}$ при всех $n \ge N_\varepsilon$. Будем считать N_ε столь большим, что $\|z^n\| \le (\mu_2+\varepsilon)^n$ и $\|z^n\| \ge (1-\varepsilon)^n$ при $n \ge N_\varepsilon$. Тогда при $n > N_\varepsilon$

$$E_n(f) \le \left\|\sum_{k=n}^{\propto} c_k z^k\right\| \le \sum_{k=n}^{\propto}|c_k|\,\|z^k\| \le \sum_{k=n}^{\propto} k^{\frac{-k}{\alpha+\varepsilon}}\,\|z^k\| \le$$

$$\le \sum_{k=n}^{\propto} n^{\frac{-k}{\alpha+\varepsilon}}(\mu_2+\varepsilon)^k = \frac{(\mu_2+\varepsilon)^n}{n^{\frac{n}{\alpha+\varepsilon}}}\left(1-\frac{\mu_2+\varepsilon}{n^{\frac{1}{\alpha+\varepsilon}}}\right)^{-1}. \tag{15}$$

Следовательно,

$$\frac{\|z^n\|}{E_n(f)} \geq \frac{\|z^n\|}{(\mu_2+\varepsilon)^n}\, n^{\frac{n}{\alpha+\varepsilon}} \left(1 - \frac{\mu_2+\varepsilon}{n^{\frac{1}{\alpha+\varepsilon}}}\right),$$

$$\alpha+\varepsilon \geq \frac{n\ln n}{\ln\dfrac{\|z^n\|}{E_n(f)}} \left(1 + \frac{\alpha+\varepsilon}{n\ln n}\ln\left(1 - \frac{\mu_2+\varepsilon}{n^{\frac{1}{\alpha+\varepsilon}}}\right) + \frac{\alpha+\varepsilon}{n\ln n}\ln\frac{\|z^n\|}{(\mu_2+\varepsilon)^n}\right). \tag{16}$$

Устремляя в (16) n к ∞, получаем $\alpha+\varepsilon \geq \rho$, что вследствие произвольности выбора $\varepsilon > 0$ означает, что $\alpha \geq \rho$. Таким образом, с учетом (13) получаем $\alpha = \rho$ и достаточность доказана.

Необходимость. Пусть $f \in X$ — целая функция конечного порядка ρ, т. е.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{-\ln|c_n|} = \rho. \tag{17}$$

Положим

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{\ln\dfrac{\|z^n\|}{E_n(f)}}$$

(α и ρ в обозначениях по сравнению с доказательством достаточности поменялись местами) и покажем, что $\alpha = \rho$. Из леммы 2 аналогично (13) следует, что $\alpha \geq \rho$. Рассуждая, как при доказательстве достаточности, можем утверждать, что для произвольного ε, $0 < \varepsilon < 1$, найдется N_ε такое, что $|c_n| \leq n^{-\frac{n}{\rho+\varepsilon}}$ и $(1-\varepsilon)^n \leq \|z^n\| \leq (\mu_2+\varepsilon)^n$ при $n > N_\varepsilon$. Аналогично (15) и (16) (с заменой α на ρ) получим

$$\rho+\varepsilon \geq \frac{n\ln n}{\ln\dfrac{\|z^n\|}{E_n(f)}} \left(1 + \frac{\rho+\varepsilon}{n\ln n}\ln\left(1 - \frac{\mu_2+\varepsilon}{n^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}}\right) + \frac{\rho+\varepsilon}{n\ln n}\ln\frac{\|z^n\|}{(\mu_2+\varepsilon)^n}\right),$$

откуда предельным переходом находим $\rho+\varepsilon \geq \alpha$ и, следовательно, $\rho \geq \alpha$.

Теорема 2 доказана.

***Доказательство теоремы* 3.** *Достаточность.* Пусть f принадлежит X и удовлетворяет условию теоремы 3 с некоторыми положительными ρ и σ. Тогда из (9) следует справедливость условия (8), поэтому f является целой и имеет порядок ρ. Пусть тип f равен α. Докажем, что $\alpha = \sigma$. Из формулы для определения типа целой функции

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{e\rho}|c_n|^{\rho/n} \tag{18}$$

с учетом леммы 2 имеем $\alpha \leq \sigma$. Докажем обратное неравенство. Из (18) следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что при $n > N_\varepsilon$

$$|c_n| < \left(\frac{\rho e(\alpha+\varepsilon)}{n}\right)^{n/\rho}. \tag{19}$$

С учетом (19) аналогично (15), (16) находим

$$E_n(f) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\rho e(\alpha+\varepsilon)}{k}\right)^{k/\rho} \|z^k\| \leq \left(\frac{\rho e(\alpha+\varepsilon)}{n}\right)^{n/\rho} (\mu+\varepsilon)^n \left(1 - \frac{C}{n^{1/\rho}}\right)^{-1}, \tag{20}$$

где $C = (\mu + \varepsilon)(\rho e(\alpha + \varepsilon))^{1/\rho}$. Из (20) получаем

$$\alpha + \varepsilon \geq \frac{n}{e\rho} \left(\frac{E_n(f)}{\|z^n\|} \right)^{\rho/n} \frac{\|z^n\|^{\rho/n}}{(\mu + \varepsilon)^\rho} \left(1 - \frac{c}{n^{1/\rho}} \right)^{\rho/n}. \tag{21}$$

Вычисляя верхний предел в (21), имеем

$$\alpha + \varepsilon \geq \sigma \left(\frac{\mu}{\mu + \varepsilon} \right)^\rho, \tag{22}$$

откуда, устремляя ε к нулю, находим $\alpha \geq \sigma$, что завершает доказательство достаточности.

Необходимость. Пусть функция $f \in X$ является целой, конечного порядка и нормального типа. Обозначим ее порядок через ρ (он удовлетворяет в силу теоремы 2 равенству (8)), а ее тип — α. Покажем, что $\alpha = \sigma$. Согласно (18) и лемме 2 $\alpha \leq \sigma$. Далее для доказательства неравенства $\alpha \geq \sigma$ нужно полностью повторить соответствующие рассуждения из доказательства достаточности.

Теорема 3 доказана.

Доказательству теоремы 4 предпошлем две леммы.

Лемма 5. *Пусть $f \in X$ и $\|f_r\| < e^{ar^k}$ для некоторых положительных a и k и всех достаточно больших r. Тогда начиная с некоторого номера тейлоровские коэффициенты функции f удовлетворяют неравенству*

$$|c_n| < \left(\frac{eak}{n} \right)^{n/k}.$$

Лемма 6. *Пусть начиная с некоторого номера тейлоровские коэффициенты функции $f \in$ $\in X$ удовлетворяют неравенству*

$$|c_n| < \left(\frac{eak}{n} \right)^{n/k}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших r $\|f_r\| < e^{(a+\varepsilon)r^k}$.

Доказательство. Справедливость теоремы 4 непосредственно следует из лемм 5 и 6. Доказательство самих лемм 5 и 6 может быть получено дословным повторением рассуждений из [16, с. 5] (леммы 1 и 2) с использованием леммы 2 вместо неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора.

В теоремах 1 – 3 предполагается, что функция $f \in X$ является аналитической в единичном круге. Если это требование снять, то ситуация изменится. Полиномы наилучшего приближения в пространстве X при соответствующем выборе нормы со свойствами (1) – (3) могут сходиться и к функции, которая не является аналитической и, тем более, целой. Тем не менее, как показывает следующая теорема, для последовательности полиномов наилучшего приближения аналитичность предельной функции и даже теорема 1 в некотором роде сохраняются.

Теорема 5. *Пусть X — банахово пространство комплекснозначных функций, определенных в круге $\mathbb{D}$, норма в котором удовлетворяет условиям* (1) – (3), *функция $f \in X$ и* $\liminf_{n\to\infty} (\|z^n\|)^{1/n} = \mu_1 > 0$. *Если функция f является целой, то*

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{E_n(f)}{\|z^n\|} \right\}^{1/n} = 0. \tag{23}$$

Обратно, если выполнено условие (23), *то последовательность* $\{p_n^*\}$ *полиномов наилучшего приближения функции* f *по норме пространства* X *равномерно сходится в каждом круге* $|z| < \rho$, $\rho \in (0; \infty)$, *к некоторой целой функции.*

Доказательство. Первое утверждение доказано в теореме 1. Докажем второе. Пусть для $f \in X$ выполнено условие (23). Из него следует, что $E_n(f) \to 0$ при $n \to \infty$. Кроме того, для любых натуральных m и n, $m \geq n$, и последовательности $\{P_n^*(z)\}$ полиномов наилучшего приближения $\|P_n^*(z) - P_m^*(z)\| \leq 2E_n(f)$. Из леммы 4 следует, что последовательность полиномов наилучшего приближения фундаментальна по sup-норме в каждом круге $|z| \leq r$ при $r \in (0; \mu_1)$ и справедлива оценка $|P_n^*(z) - P_m^*(z)| \leq 2CE_n(f)$ с постоянной C, зависящей только от r и μ_1. Поэтому последовательность $\{P_n^*(z)\}$ сходится равномерно на компактах в круге $|z| < \mu_1$ к некоторой функции $g(z)$, аналитической в круге $|z| < \mu_1$, причем $|P_n^*(z) - g(z)| \leq 2CE_n(f)$ при $|z| \leq r$. Из неравенств Коши для коэффициентов γ_n ряда Тейлора функции $g(z)$ следует оценка $|\gamma_n| \leq 2Cr^{-n}E_n(f)$. Для доказательства аналитичности функции $g(z)$ во всей плоскости достаточно воспользоваться формулой Коши – Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.

Докажем теперь равномерную сходимость последовательности $\{P_n^*(z)\}$ в круге $|z| < \rho$ с произвольно выбранным $\rho \in (0; \infty)$ к функции $g(z)$. Зафиксируем некоторое значение $r \in \in (0; \mu_1)$. Из неравенства С. Н. Бернштейна для роста полиномов следует, что в круге $|z| < \rho$ имеет место оценка

$$|P_{n+1}^*(z) - P_n^*(z)| \leq 2C \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1} E_n(f),$$

поэтому в силу признака Вейерштрасса ряд

$$P_1^*(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(P_{n+1}^*(z) - P_n^*(z)\right)$$

сходится равномерно в этом круге. А в силу теоремы единственности сходится он именно к $g(z)$.

Теорема 5 доказана.

Замечание **3.** Полученные в статье утверждения остаются справедливыми и в случае, если условие (3) заменить более слабым условием

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(ze^{it}) g(t)\, dt \right\| \leq C \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(t)|\, dt\, \|f(\cdot)\|,$$

где постоянная C не зависит от $f \in X$ и $g \in L_{[0;\, 2\pi]}$.

1. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some properties of fractional integrals. II // Math. Z. – 1931. – **34**, № 3. – S. 403 – 439.
2. *Duren P. L., Romberg B. W., Shields A. L.* Linear functionals in H_p spaces with $0 < p < 1$ // J. reine und angew. Math. – 1969. – **238**. – S. 4 – 60.
3. *Гварадзе М. И.* Об одном классе пространств аналитических функций // Мат. заметки. – 1977. – **21**, № 2. – С. 141 – 150.
4. *Шведенко С. В.* Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге и шаре // Итоги науки и техники. Сер. мат. анализ / ВИНИТИ. – 1985. – **23**. – С. 3 – 124.
5. *Zhu K.* Bloch type spaces of analytic functions // Rocky Mountain J. Math. – 1993. – **23**, № 3. – P. 1143 – 1177.
6. *Дынькин Е. М.* Конструктивная характеристика классов С.Л. Соболева и О.В. Бесова // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1981. – **155**. – С. 41–76.

7. *Reddy A. R.* A Constribution to best approximation in the L^2 norm // J. Approxim. Theory. – 1974. – **11**, № 11. – P. 110 – 117.
8. *Ибрагимов И. И., Шихалиев Н. И.* О наилучшем полиномиальном приближении в одном пространстве аналитических функций // Докл. АН СССР. – 1976. – **227**, № 2. – С. 280 – 283.
9. *Ибрагимов И. И., Шихалиев Н. И.* О наилучшем приближении в среднем аналитических функций в пространстве $A_p(|z| < 1)$ // Спец. вопросы теории функций. – 1977. – № 1. – С. 84 – 96.
10. *Вакарчук С. Б.* О наилучшем полиномиальном приближении аналитических функций в пространстве $\mathcal{B}_{p,\,q,\,\lambda}$ // Докл. АН УССР. Сер. физ.-мат. и техн. науки. – 1989. – № 8. – С. 6 – 9.
11. *Вакарчук С. Б.* О наилучшем полиномиальном приближении аналитических в единичном круге функций // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 6. – С. 838 – 843.
12. *Мамадов Р.* Некоторые вопросы приближения целыми функциями: Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Душанбе, 2009. – 14 с.
13. *Двейрин М. З., Чебаненко И. В.* О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций // Теория отображений и приближение функций. – Киев: Наук. думка, 1983. – С. 63 – 73.
14. *Двейрин М. З.* Неравенство Адамара и наилучшее приближение функций, аналитических в единичном круге // Укр. мат. вестн. – 2006. – **3**, № 3. – С. 315 – 330.
15. *Вакарчук С. Б., Жир С. И.* Найкращі поліноміальні наближення цілих трансцендентних функцій узагальненого порядку зростання в банахових просторах $\mathcal{E}'_p(G)$ та $\mathcal{E}_p(G),\ p \geq 1$ // Укр. мат. вестн. -– 2011. – **8**, № 2. – С. 255 – 291.
16. *Levin B. Ya.* Lectures on entire functions // Transl. Math. Monogr. – Providence: Amer. Math. Soc., 1996. – Vol. 150. – 248 p.

Получено 06.08.14