УДК 517.51

С. Я. Янченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ З ІЗОТРОПНИХ КЛАСІВ НІКОЛЬСЬКОГО – БЄСОВА У РІВНОМІРНІЙ ТА ІНТЕГРАЛЬНІЙ МЕТРИКАХ*

We obtain the exact-order estimations for the approximation of the isotropic Nikol'skii–Besov classes functions of several variables by the de-la-Vallée-Poussin-type sums in metrics of the spaces $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ and $L_1(\mathbb{R}^d)$.

Получены точные по порядку оценки приближения изотропных классов Никольского – Бесова функций многих переменных суммами типа Валле Пуссена в метриках пространств $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ и $L_1(\mathbb{R}^d)$.

У статті досліджується питання найкращого наближення ізотропних класів О. В. Бєсова $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ [1] і С. М. Нікольського $H^r_p(\mathbb{R}^d)$ [2], а також їх аналогів, функцій багатьох змінних у просторах $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ та $L_1(\mathbb{R}^d)$. В якості апарату наближення використовуються цілі функції експоненціального типу (див., наприклад, [3], гл. 3).

1. Основні позначення та означення класів Нікольського – Бєсова. Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, — d-вимірний евклідів простір з елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$. $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, — простір вимірних на $\mathbb{R}^d$ функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_p := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|.$$

Для $k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^d$ та $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ позначимо через $\Delta^k_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x})$ кратну різницю

$$\Delta^k_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = \Delta_{\boldsymbol{h}} \Delta^{k-1}_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}),$$

де $\Delta_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})$ і $\Delta^0_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$.

Кратну різницю $\Delta^k_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x})$ також можна записати у вигляді

$$\Delta^k_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{l+k} C^l_k f(\boldsymbol{x} + l\boldsymbol{h}).$$

Означимо модуль гладкості k-го порядку функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, який будемо позначати $\omega_k(f,t)_p$, такою формулою:

$$\omega_k(f,t)_p = \sup_{|\boldsymbol{h}| \leq t} \left\| \Delta^k_{\boldsymbol{h}} f(\cdot) \right\|_p,$$

де $|\boldsymbol{h}| = \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_d^2}$ — евклідова норма вектора $\boldsymbol{h}$.

* Виконано за часткової підтримки FP7-People-2011-IRSES, проект № 295164 (EUMLS: EU-Ukrainian Mathematicians for Life Sciences).

Будемо говорити, що функція $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ належить ізотропному простору $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p, \theta \le \infty$, $r > 0$, якщо

$$\left(\int\limits_0^{\infty} \left(t^{-r}\omega_k(f,t)_p\right)^{\theta} \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta} < \infty \quad \text{при} \quad 1 \le \theta < \infty$$

і

$$\sup_{t>0} \omega_k(f,t)_p t^{-r} < \infty \quad \text{при} \quad \theta = \infty.$$

Зауважимо, що при цьому вимагається виконання умови $k > r$.

Якщо норму в просторі $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ задати формулами

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_p + \left(\int\limits_0^{\infty} (t^{-r}\omega_k(f,t)_p)^{\theta} \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

і

$$\|f\|_{B^r_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_p + \sup_{t>0} \omega_k(f,t)_p t^{-r},$$

то даний простір буде банаховим.

Простір $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ був уведений О. В. Бєсовим [1] і $B^r_{p,\infty}(\mathbb{R}^d) = H^r_p(\mathbb{R}^d)$, де $H^r_p(\mathbb{R}^d)$ – простір, який увів С. М. Нікольський [2]. Далі, якщо не стверджується інше, під терміном «класи $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$» будемо розуміти одиничні кулі у просторі $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, а саме

$$B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in L_p : \|f\|_{B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \le 1 \right\}.$$

Для спрощення записів замість $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ та $H^r_p(\mathbb{R}^d)$ будемо використовувати позначення $B^r_{p,\theta}$ та H^r_p.

О. В. Бєсов [1] та С. М. Нікольський [4] отримали низку результатів щодо вкладення відповідно просторів $B^r_{p,\theta}$ і H^r_p за параметрами p, θ і r, а також про продовження функцій із цих просторів.

Зазначимо, що важливим для встановлення результатів є той факт, що простори $B^r_{p,\theta}$ зі зростанням параметра θ розширюються (див., наприклад, [3, с. 277]), тобто

$$B^r_{p,1} \subset B^r_{p,\theta} \subset B^r_{p,\theta'} \subset B^r_{p,\infty} = H^r_p, \quad 1 \le \theta < \theta' \le \infty. \tag{1}$$

Наведемо результат П. І. Лізоркіна [5], який дає можливість означити норму функцій із просторів $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ в іншій формі, яка в подальшому зумовлює використання перетворення Фур'є в теорії даних просторів.

Теорема А. *Функція f належить простору $B^r_{p,\theta}$, $r > 0$, $1 \le p, \theta \le \infty$, тоді і тільки тоді, коли вона зображується збіжним у метриці L_p рядом*

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{s=0}^{\infty} P_{\boldsymbol{a}^s}(\boldsymbol{x}), \quad P_{\boldsymbol{a}^s}(\boldsymbol{x}) = P_{a^s_1,\ldots,a^s_1}(\boldsymbol{x}), \tag{2}$$

де $P_{\nu_1,\ldots,\nu_d}(\boldsymbol{x})$ *— цілі функції степеня не вищого за* $\nu_1,\ldots,\nu_d$ *по кожній змінній* $x_1,\ldots,x_d$ *відповідно, і виконується умова*

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta}\|P_{\boldsymbol{a}^s}\|_p^\theta\right)^{1/\theta} < \infty, \quad \text{де} \quad b = a_1^r > 1. \tag{3}$$

Окрім цього має місце оцінка

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}} \leq C_1 \left(\sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta}\|P_{\boldsymbol{a}^s}\|_p^\theta\right)^{1/\theta}. \tag{4}$$

Якщо, крім того, частинні суми n-го порядку ряду (2) *реалізують найкраще наближення або дають порядок найкращого наближення, то вираз у лівій частині* (3) *і* $\|f\|_{B^r_{p,\theta}}$ *еквівалентні, тобто разом із* (4) *справджується оцінка*

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} b^{s\theta}\|P_{\boldsymbol{a}^s}\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \leq C_2\|f\|_{B^r_{p,\theta}}.$$

Зауважимо, що П. І. Лізоркін дану теорему довів у більш загальному випадку, а саме коли параметр r в означенні просторів Нікольського – Бєсова є вектором з різними координатами, тобто коли розглядаються так звані анізотропні простори Нікольського – Бєсова.

На основі теореми А ми дамо еквівалентне означення ізотропних просторів $B^r_{p,\theta}$, яким будемо користуватися у подальших міркуваннях. Для цього нагадаємо означення перетворення Фур'є (див., наприклад, [6]) і сум Валле Пуссена [3] (гл. 8).

Нехай $S = S(\mathbb{R}^d)$ — простір Л. Шварца основних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^d$ комплекснозначних функцій φ, що спадають на нескінченності разом зі своїми похідними швидше за будь-який степінь функції $|\boldsymbol{x}|^{-1}$ (див., наприклад, [6], [7], гл. 2). Через S' позначимо простір лінійних неперервних функціоналів на S. Зазначимо, що елементами простору S' є узагальнені функції. Якщо $f \in S'$ і $\varphi \in S$, то $\langle f, \varphi\rangle$ позначає значення f на φ.

Перетворення Фур'є $\mathfrak{F}\varphi : S \to S$ визначається згідно з формулою

$$(\mathfrak{F}\varphi)(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{t})} d\boldsymbol{t} \equiv \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda}),$$

де $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_d)$, $\boldsymbol{t} = (t_1,\ldots,t_d)$.

Обернене перетворення Фур'є $\mathfrak{F}^{-1}\varphi : S \to S$ задається таким чином:

$$(\mathfrak{F}^{-1}\varphi)(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{t})} d\boldsymbol{\lambda} \equiv \widehat{\varphi}(\boldsymbol{t}).$$

Перетворення Фур'є узагальнених функцій $f \in S'$ (для нього ми зберігаємо те ж позначення) визначається згідно з формулою

$$\langle \mathfrak{F}f, \varphi\rangle = \langle f, \mathfrak{F}\varphi\rangle \quad (\langle \widetilde{f}, \varphi\rangle = \langle f, \widetilde{\varphi}\rangle),$$

де $\varphi \in S$.

Обернене перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in S'$ також позначимо $\mathfrak{F}^{-1}f$, і визначається воно аналогічно до прямого перетворення Фур'є згідно з формулою

$$\langle \mathfrak{F}^{-1}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathfrak{F}^{-1}\varphi \rangle \quad (\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle).$$

Зазначимо, що кожна функція $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$, визначає лінійний неперервний функціонал на S згідно з формулою

$$\langle f, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}, \quad \varphi \in S,$$

і, як наслідок, у цьому сенсі вона є елементом S'. Тому перетворення Фур'є функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$, можна розглядати як перетворення Фур'є узагальненої функції $\langle f, \varphi \rangle$.

Носієм узагальненої функції f будемо називати замикання $\overline{\mathfrak{N}}$ такої множини точок $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^d$, що для довільної $\varphi \in S$, яка дорівнює нулю в $\overline{\mathfrak{N}}$, виконується рівність $\langle f, \varphi \rangle = 0$. Носій узагальненої функції f будемо позначати через $\operatorname{supp} f$. Також будемо говорити, що функція f зосереджена на множині G, якщо $\operatorname{supp} f \subseteq G$.

Далі розглянемо неперіодичний аналог ядра Валле Пуссена

$$V_{2^s}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2^{sd}} \prod_{j=1}^{d} \frac{\cos 2^s x_j - \cos 2^{s+1} x_j}{x_j^2}, \quad j = \overline{1,d}, \quad s \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Дане ядро має такі властивості (див. [3, с. 358]):

1) $V_{2^s}(\boldsymbol{z}) = V_{2^s}(z_1, \ldots, z_d)$ — ціла функція експоненціального типу степеня 2^{s+1} за кожною змінною z_j, $j = \overline{1,d}$, обмежена і сумовна на $\mathbb{R}^d$;

2) $\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{d/2} \tilde{V}_{2^s} = \dfrac{1}{\pi^d} \displaystyle\int_{\square_{2^s}} V_{2^s}(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{t}$, де $\square_{2^s} = \left\{|x_j| \le 2^s, j = \overline{1,d}\right\}$;

3) $\dfrac{1}{\pi^d} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} V_{2^s}(\boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t} = 1$;

4) $\dfrac{1}{\pi^d} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |V_{2^s}(\boldsymbol{t})| d\boldsymbol{t} \le C_3 < \infty$.

Зазначимо, що для $\tilde{V}_{2^s}$ має місце рівність

$$\tilde{V}_{2^s} = \mu_{2^s}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \mu_{2^s}(x_j),$$

де

$$\mu_{2^s}(x_j) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \begin{cases} 1, & |x_j| < 2^s, \\ \dfrac{1}{2^s}(2^{s+1} - x_j), & 2^s < |x_j| < 2^{s+1}, \\ 0, & 2^{s+1} < |x_j|. \end{cases}$$

Для функцій $g_1 \in L_1(\mathbb{R}^d)$ та $g_2 \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$, означимо їх згортку згідно з формулою (див., наприклад, [3, с. 52])

$$(g_1 * g_2)(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int g_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}) g_2(\boldsymbol{u}) d\boldsymbol{u}.$$

При цьому виконується нерівність

$$\|g_1 * g_2\|_p \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|g_1\|_1 \|g_2\|_p. \tag{5}$$

Нехай $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$. В такому випадку покладемо

$$\sigma_{2^s}(f, \boldsymbol{x}) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{d/2} (V_{2^s} * f)(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\pi^d} \int V_{2^s}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}) f(\boldsymbol{u}) d\boldsymbol{u}. \tag{6}$$

Дана функція є аналогом періодичної суми Валле Пуссена порядку 2^s, крім цього $\sigma_{2^s}(f, \boldsymbol{x}) \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, є цілою функцією експоненціального типу 2^{s+1} по кожній змінній x_j, $j = \overline{1, d}$. У термінах перетворення Фур'є функцію $\sigma_{2^s}(f, \boldsymbol{x})$ можна подати у вигляді [3, с. 359]

$$\sigma_{2^s}(f, \boldsymbol{x}) = \sigma_{2^s}(f) = \mathfrak{F}^{-1}(\mu_{2^s} \cdot \mathfrak{F} f).$$

Далі, кожній функції $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, поставимо у відповідність ряд

$$f = \sigma_{2^0}(f) + \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sigma_{2^s}(f) - \sigma_{2^{s-1}}(f)\right), \tag{7}$$

який збігається до f у метриці простору L_p [8]. Даний ряд будемо називати розкладом функції f за сумами типу Валле Пуссена.

Введемо позначення

$$q_0(f) = \sigma_{2^0}(f), \quad q_s(f) = \sigma_{2^s}(f) - \sigma_{2^{s-1}}(f), \quad s \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Тоді згідно з співвідношенням (8) рівність (7) для f можемо записати у вигляді

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} q_s(f).$$

При цьому зауважимо, що носій перетворення Фур'є функції $q_s(f)$ зосереджено на множині

$$\left\{\boldsymbol{\lambda} : 2^{s-1} \leq \max_{j=\overline{1,d}} |\lambda_j| \leq 2^{s+1}\right\}.$$

Зауважимо, що наближення функції $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, за допомогою $\sigma_{2^s}(f)$ має такий же порядок, як і найкраще наближення цієї функції за допомогою функцій експоненціального типу 2^s.

Таким чином, на основі теореми А можна дати наступне означення просторів $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$.

Функція f належить простору $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, якщо для неї скінченними є величини

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sr\theta} \|q_s\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \quad \text{при} \quad 1 \leq \theta < \infty$$

та

$$\sup_{s\geq 0} 2^{sr}\|q_s\|_p \quad \text{при} \quad \theta=\infty.$$

При цьому норма $\|f\|_{B^r_{p,\theta}}$, $1\leq\theta\leq\infty$, функцій f, згідно з теоремою А, задовольняє співвідношення

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sr\theta}\|q_s\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta}, \tag{9}$$

якщо $1\leq\theta<\infty$, і

$$\|f\|_{B^r_{p,\infty}} \asymp \sup_{s\geq 0} 2^{sr}\|q_s\|_p. \tag{10}$$

Тут і далі по тексту для додатних величин A і B запис $A\asymp B$ означає, що існують такі додатні сталі C_4 та C_5, які не залежать від одного істотного параметра у величинах A і B (наприклад, у співвідношеннях (9) і (10) — від функції f), що $C_4A\leq B\leq C_5A$. Як тільки $B\leq C_5A$ $(B\geq C_5A)$, то пишемо $B\ll A$ $(B\gg A)$. Всі сталі C_i, $i=1,2,\ldots$, які зустрічаються у роботі, залежать, можливо, лише від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій оцінюється похибка наближення, та розмірності простору $\mathbb{R}^d$.

Тепер дамо означення апроксимативної характеристики, яка буде досліджуватися.

Для $f\in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1\leq q\leq\infty$, розглянемо частинну суму типу Валле Пуссена

$$\mathbf{V}_n(f)=\sum_{s=0}^{n} q_s(f)$$

і покладемо

$$\mathcal{E}_n(f)_q=\|f-\mathbf{V}_{n-1}(f)\|_q\,.$$

Величина $\mathcal{E}_n(f)_q$ називається наближенням функції f частинними сумами типу Валле Пуссена. Якщо $F\subset L_q(\mathbb{R}^d)$, то покладемо

$$\mathcal{E}_n(F)_q=\sup_{f\in F}\mathcal{E}_n(f)_q.$$

2. Наближення частинними сумами типу Валле Пуссена у рівномірній та інтегральній метриках. Попередньо сформулюємо твердження, яке буде істотно використовуватися при встановленні результатів.

Теорема Б [3, с. 150]**.** *Якщо $1\leq p_1\leq p_2\leq\infty$, то для цілої функції експоненціального типу $g=g_\nu\in L_{p_1}(\mathbb{R}^d)$ має місце „нерівність різних метрик"*

$$\|g_\nu\|_{L_{p_2}(\mathbb{R}^d)}\leq 2^d\left(\prod_{j=1}^{d}\nu_k\right)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}\|g_\nu\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^d)}. \tag{11}$$

Справджується наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $1\leq p<\infty$, $1\leq\theta\leq\infty$. Тоді якщо $r>\dfrac{d}{p}$, то має місце порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_n(B^r_{p,\theta})_\infty\asymp 2^{-n\left(r-\frac{d}{p}\right)}. \tag{12}$$

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху. Оскільки для $1 \le p < \infty$ має місце вкладення $B^r_{p,\theta} \subset H^r_p$, то шукану оцінку достатньо отримати для $\mathcal{E}_n \left(H^r_p\right)_\infty$. Далі для $f \in H^r_p$, згідно з (10), можемо записати $\|q_s\|_p \ll 2^{-sr}$. Тому, використавши нерівність Мінковського та (11), отримаємо

$$\left\| f - \sum_{s=0}^{n-1} q_s \right\|_\infty = \left\| \sum_{s=n}^{\infty} q_s \right\|_\infty \ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{\frac{sd}{p}} \|q_s\|_p \ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{\frac{sd}{p}} 2^{-sr} \le 2^{-n\left(r-\frac{d}{p}\right)}.$$

Оцінку зверху встановлено.

Перейдемо до встановлення в (12) оцінки знизу. Оскільки $B^r_{p,1} \subset B^r_{p,\theta}$, то шукану оцінку достатньо отримати для $\mathcal{E}_n \left(B^r_{p,1}\right)_\infty$.

Нехай

$$f_{n+1}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \left(V_{2^{n+1}}(x_j) - V_{2^n}(x_j)\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1,d}.$$

Оцінимо попередньо $\|f_{n+1}\|_\infty$. Маємо

$$\|f_{n+1}\|_\infty = \left\| \prod_{j=1}^{d} \left(V_{2^{n+1}}(x_j) - V_{2^n}(x_j)\right) \right\|_\infty = \prod_{j=1}^{d} \|V_{2^{n+1}}(x_j) - V_{2^n}(x_j)\|_\infty =$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \left\| \frac{\cos 2^{n+1}x_j - \cos 2^{n+2}x_j}{2^{n+1}x_j^2} - \frac{\cos 2^n x_j - \cos 2^{n+1}x_j}{2^n x_j^2} \right\|_\infty =$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \left\| \frac{\sin 3 \cdot 2^n x_j \sin 2^n x_j}{2^n x_j^2} - \frac{\sin 3 \cdot 2^{n-1} x_j \sin 2^{n-1} x_j}{2^{n-1} x_j^2} \right\|_\infty =$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \left\| \frac{\sin 3 \cdot 2^{n-1} x_j \sin 2^{n-1} x_j}{2^{n-1} x_j^2} \left(2 \cos 3 \cdot 2^{n-1} x_j \cos 2^{n-1} x_j - 1\right) \right\|_\infty =$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \sup_{x_j} \left| 2^{n-1} \frac{\sin 3x_j \sin x_j}{x_j^2} \left(2 \cos 3x_j \cos x_j - 1\right) \right| =$$

$$= 2^{(n-1)d} \prod_{j=1}^{d} \sup_{x_j} \left| \frac{\sin 3x_j \sin x_j}{x_j^2} \left(2 \cos 3x_j \cos x_j - 1\right) \right|. \tag{13}$$

Спочатку оцінимо $\sup\limits_{x_j}$ у (13) зверху. Маємо

$$\sup_{x_j} \left| \frac{\sin 3x_j \sin x_j}{x_j^2} \left(2 \cos 3x_j \cos x_j - 1\right) \right| \le \sup_{x_j} \left| 3 \frac{\sin 3x_j \sin x_j}{x_j^2} \right| \le$$

$$\leq 3 \sup_{x_j} \left| \frac{\sin 3x_j \sin x_j}{x_j^2} \right| \leq 9. \tag{14}$$

Тепер оцінимо $\sup_{x_j}$ в (13) знизу:

$$\sup_{x_j} \left| \frac{\sin 3x_j \sin x_j}{x_j^2} \left(2 \cos 3x_j \cos x_j - 1\right) \right| \geq$$

$$\geq \left| \frac{\sin 3\, \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \left(2 \cos 3 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - 1\right) \right| = \frac{4}{\pi^2}. \tag{15}$$

На підставі оцінок (13), (14) та (15) робимо висновок, що

$$\|f_{n+1}(\cdot)\|_\infty \asymp 2^{nd}. \tag{16}$$

Об'єднуючи дану оцінку з оцінкою для $\|f_{n+1}\|_p$ при $1 \leq p < \infty$, яку встановлено в [9], можемо записати

$$\|f_{n+1}\|_p \asymp 2^{nd\left(1 - \frac{1}{p}\right)}, \quad 1 \leq p \leq \infty. \tag{17}$$

Розглянемо функцію

$$F_1(\boldsymbol{x}) = C_6 2^{-nd\left(\frac{r}{d} + 1 - \frac{1}{p}\right)} f_{n+1}(\boldsymbol{x})$$

і переконаємося, що при певному виборі сталої C_6 вона належить класу $B^r_{p,1}$.

Оскільки носій перетворення Фур'є функції f_{n+1} міститься на множині

$$\left\{ \boldsymbol{\lambda} : 2^n \leq \max_{j=\overline{1,d}} |\lambda_j| \leq 2^{n+2} \right\},$$

то, згідно з зазначеним вище, щодо носія перетворення Фур'є функцій $q_s(f)$, $s = 0, 1, \ldots$, отримаємо, що всі функції $q_s(f_{n+1})$ окрім, можливо, $q_n(f_{n+1})$, $q_{n+1}(f_{n+1})$ та $q_{n+2}(f_{n+1})$, тотожно дорівнюють нулю.

Отже, згідно з (9) будемо мати

$$\|F_1\|_{B^r_{p,1}} \asymp \sum_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sr} \|q_s(F_1)\|_p = C_6 2^{-nd\left(\frac{r}{d} + 1 - \frac{1}{p}\right)} \sum_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sr} \|q_s(f_{n+1})\|_p =$$

$$= C_6 2^{-nd\left(\frac{r}{d} + 1 - \frac{1}{p}\right)} \left(2^{nr} \|q_n(f_{n+1})\|_p + 2^{(n+1)r} \|q_{n+1}(f_{n+1})\|_p + 2^{(n+2)r} \|q_{n+2}(f_{n+1})\|_p\right). \tag{18}$$

Оцінимо кожний із доданків у правій частині (18).

Виходячи з означення $q_s(f)$ та формули (6), враховуючи співвідношення (17), (5) і властивість 4 для V_{2^s}, одержуємо

$$\|q_n(f_{n+1})\|_p = \|\sigma_{2^n}(f_{n+1}) - \sigma_{2^{n-1}}(f_{n+1})\|_p = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{d/2} \|(V_{2^n} - V_{2^{n-1}}) * f_{n+1}\|_p \leq$$

$$\leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{d/2} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|V_{2^n} - V_{2^{n-1}}\|_1 \|f_{n+1}\|_p \leq C_7 2^{nd\left(1-\frac{1}{p}\right)}.$$

Аналогічні оцінки отримаємо і для $\|q_{n+1}(f_{n+1})\|_p$ та $\|q_{n+2}(f_{n+1})\|_p$.

Тоді (18) можна продовжити таким чином:

$$\|F_1\|_{B^r_{p,1}} \leq C_6 2^{-nd\left(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p}\right)} \left(C_7 2^{nr} 2^{nd\left(1-\frac{1}{p}\right)} + C_8 2^{(n+1)r} 2^{nd\left(1-\frac{1}{p}\right)} + \right.$$

$$\left. + C_9 2^{(n+2)r} 2^{nd\left(1-\frac{1}{p}\right)} \right) \leq C_{10}.$$

Отже, при відповідному виборі сталої C_6 функція F_1 належить класу $B^r_{p,1}$.

Далі, згідно з вибором функції F_1 і властивостями функції f_{n+1} маємо $\mathbf{V}_{n-1}(F_1, \cdot) = 0$. Тому, враховуючи (16), отримуємо

$$\mathcal{E}_n\left(B^r_{p,1}\right)_\infty \geq \mathcal{E}_n(F_1)_\infty = \|F_1 - \mathbf{V}_{n-1}(f_1)\|_\infty =$$

$$= \|F_1\|_\infty \asymp 2^{-nd\left(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p}\right)} \|f_{n+1}\|_\infty \asymp 2^{-n\left(r-\frac{d}{p}\right)}.$$

Оцінки знизу встановлено.

Теорему 1 доведено.

Розглянемо випадок, коли параметри p і q в задачі про оцінку величин $\mathcal{E}_n\left(B^r_{p,\theta}\right)_q$ набувають крайніх значень, тобто 1 або ∞.

Теорема 2. *Нехай $r > 0$, $1 \leq \theta \leq \infty$. Тоді для $(p,q) = \{(1,1),(\infty,\infty)\}$ має місце порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_n(B^r_{p,\theta})_q \asymp 2^{-nr}. \tag{19}$$

Доведення. Оскільки має місце вкладення (1), то оцінку зверху достатньо встановити для класів $B^r_{p,\infty} \equiv H^r_p$. Як зазначалося, для $f \in H^r_p$ з (10) випливає співвідношення $\|q_s\|_p \ll 2^{-sr}$. Тоді, використавши нерівність Мінковського, можемо записати

$$\mathcal{E}_n(f)_p \leq \left\| f - \sum_{s=0}^{n-1} q_s \right\|_p = \left\| \sum_{s=n}^{\infty} q_s \right\|_p \ll \sum_{s=n}^{\infty} \|q_s\|_p \leq \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-sr} \leq 2^{-nr}.$$

Оцінку зверху в (19) встановлено.

Оцінку знизу в (19) достатньо встановити для класу $B^r_{p,1}$. Розглянемо функції

$$F_2(\boldsymbol{x}) = C_{11} 2^{-nd\left(\frac{r}{d}+1\right)} f_{n+1}(\boldsymbol{x}) \quad \text{при} \quad p = \infty$$

і

$$F_3(\boldsymbol{x}) = C_{12} 2^{-nr} f_{n+1}(\boldsymbol{x}) \quad \text{при} \quad p = 1.$$

Як і при доведенні теореми 1, можна показати, що дані функції належать класу $B^r_{p,1}$ при певному виборі сталих C_{11} та C_{12}. Окрім того, $\mathbf{V}_{n-1}(F_2, \cdot) = 0$ і $\mathbf{V}_{n-1}(F_3, \cdot) = 0$. Тому, враховуючи (17), маємо

$$\mathcal{E}_n\left(B^r_{\infty,1}\right)_\infty \geq \mathcal{E}_n(F_2)_\infty = \|F_2 - \mathbf{V}_{n-1}(F_2)\|_\infty =$$

$$= \|F_2\|_\infty \asymp 2^{-nd\left(\frac{r}{d}+1\right)}\|f_{n+1}\|_\infty \asymp 2^{-nr}.$$

Аналогічно

$$\mathcal{E}_n\left(B^r_{1,1}\right)_1 \geq \mathcal{E}_n(F_3)_1 = \|F_3\|_1 \asymp 2^{-nr}.$$

Оцінки знизу встановлено.

Теорему 2 доведено.

Наведемо кілька коментарів щодо одержаних результатів.

***Зауваження* 1.** Класи $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, з точки зору знаходження точних за порядком оцінок деяких апроксимативних характеристик, розглядалися в [10] і, таким чином, теореми 1 та 2 є продовженням досліджень у цьому напрямку. Крім того, у випадку $d = 1$, $1 < p < \infty$, оцінку (12) було встановлено в [11].

***Зауваження* 2.** Ізотропні класи Нікольського – Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з точки зору знаходження точних за порядком оцінок деяких апроксимативних характеристик досліджувалися, зокрема, у роботах [12 – 14].

***Зауваження* 3.** Розв'язку ряду екстремальних проблем теорії апроксимації функцій на прямій $\mathbb{R}$ присвячено роботи С. Б. Вакарчука [15, 16], де також проведено достатньо повний порівняльний аналіз завершених результатів, які пов'язані з розв'язком екстремальних задач теорії наближення в періодичному випадку і випадку всієї дійсної осі.

Насамкінець наведемо кілька результатів щодо наближення класів типу Нікольського – Бєсова $B^\Omega_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, які визначаються за допомогою функції $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$ [9, 17], де Ω — функція типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови Барі – Стєчкіна (S) та (S_l). Якщо $\Omega(t) = t^r$, $0 < r < l$, то класи $B^\Omega_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ та $B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ збігаються. Зазначимо, що у згаданих роботах встановлено точні за порядком оцінки наближення даних класів за допомогою цілих функцій експоненціального типу для ряду співвідношень між параметрами p і q. Використовуючи методи, які були застосовані при доведенні теорем 1 та 2, з відповідною модифікацією до специфіки класів $B^\Omega_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, а також результати робіт [9, 17], отримуємо такі твердження.

Теорема 1$'$. *Нехай* $1 \leq p < \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, *де* $\alpha > \dfrac{d}{p}$, $l \in \mathbb{N}$. *Тоді для* $1 \leq \theta \leq \infty$ *має місце порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_n(B^\Omega_{p,\theta})_\infty \asymp \Omega(2^{-n})2^{\frac{nd}{p}}. \tag{20}$$

Теорема 2$'$. *Нехай* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, *де* $\alpha > 0$, $1 \leq \theta \leq \infty$. *Тоді, для* $(p,q) = \{(1,1),(\infty,\infty)\}$ *має місце порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_n(B^\Omega_{p,\theta})_q \asymp \Omega(2^{-n}). \tag{21}$$

***Зауваження* 4.** У зв'язку з оцінками (20) та (21) зазначимо, що ізотропні класи типу Нікольського – Бєсова $B^\Omega_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних, з точки зору знаходження точних за порядком оцінок деяких апроксимативних характеристик, розглядалися у роботах [18, 19].

1. *Бесов О. В.* Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1961. — **60**. — С. 42 – 81.
2. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1951. — **38**. — С. 244 – 278.
3. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969. — 480 с.
4. *Никольский С. М.* Об одном семействе функциональных пространств // Успехи мат. наук. — 1956. — **11**, вип. 6 (72). — С. 203 – 212.
5. *Лизоркин П. И.* Обобщенные гельдеровы пространства $B^{(r)}_{p,\theta}$ и их соотношения с пространствами Соболева $L^{(r)}_p$ // Сиб. мат. журн. — 1968. — **9**, № 5. — С. 1127 – 1152.
6. *Лизоркин П. И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1969. — **105**. — С. 89 – 167.
7. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1967. — 436 с.
8. *Никольский С. М.* Теоремы вложения для классов обобщенных функций // Сиб. мат. журн. — 1968. — **9**, № 5. — С. 1107 – 1126.
9. *Миронюк В. В.* Наближення функцій з ізотропних класів $B^{\Omega}_{1,\theta}(\mathbb{R}^d)$ цілими функціями експоненціального типу // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 1. — С. 169 – 183.
10. *Янченко С. Я.* Наближення функцій з класів Бєсова цілими функціями у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$ // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — **7**, № 1. — С. 380 – 391.
11. *Янченко С. Я.* Наближення функцій із класів $S^r_{p,\theta}B$ у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 5. — С. 698 – 705.
12. *Романюк А. С.* Приближение изотропных классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. — **5**, № 1. — С. 263 – 278.
13. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики изотропных классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 4. — С. 513 – 523.
14. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 10. — С. 1348 – 1366.
15. *Вакарчук С. Б.* О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации функций на вещественной оси. I // Укр. мат. вісн. — 2012. — **9**, № 3. — С. 401 – 429.
16. *Вакарчук С. Б.* О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации функций на вещественной оси. II // Укр. мат. вісн. — 2012. — **9**, № 4. — С. 578 – 602.
17. *Миронюк В. В.* Наближення функцій багатьох змінних із класів $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ цілими функціями експоненціального типу // Укр. мат. журн. — 2014. — **66**, № 2. — С. 244 – 258.
18. *Стасюк С. А.* Наближення класів $B^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних поліномами зі спектром в кубічних областях // Мат. студ. — 2011. — **35**, № 1. — С. 66 – 73.
19. *Дерев'янко Н. В.* Оцінки лінійних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q // Укр. мат. журн. — 2014. — **66**, № 7. — С. 909 – 921.

Одержано 03.10.14