УДК 517.98+517.954

**Ю. В. Богданский** (Ин-т прикл. систем. анализа Нац. техн. ун-та Украины „КПИ“, Киев)

# ГРАНИЧНЫЙ ОПЕРАТОР СЛЕДА В ОБЛАСТИ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ЕГО ЯДРА

We prove the infinite-dimensional analog of the classical theorem on density of the set $C_0^1(G)$ of finite smooth functions in the kernel of the boundary restriction operator $\gamma\colon H^1(G) \to L_2(\partial G)$.

Доведено нескінченновимірний аналог класичної теореми про щільність множини $C_0^1(G)$ фінітних гладких функцій в ядрі граничного оператора сліду $\gamma\colon H^1(G) \to L_2(\partial G)$.

В работах [1, 2] предложена методика построения поверхностного интеграла на бесконечномерных линейных пространствах и нелинейных многообразиях. Предложенный подход принципиально отличается от технически обременительной конструкции А. В. Угланова [3] и дает надежду на перенос ряда классических результатов теории краевых задач математической физики на случай бесконечномерного пространства аргумента. Результат данной работы — очередная ступенька в построении соответствующей теории.

**1. Предварительные сведения. Постановка задачи.** Пусть $H$ — сепарабельное вещественное гильбертово пространство $(\dim H \le \infty)$, $\mu$ — конечная неотрицательная борелевская мера на $H$.

Обозначим через $C_b = C_b(H)$ пространство всех непрерывных и ограниченных на $H$ функций $f\colon H \to \mathbb{R}$, через $C_b(H;H)$ пространство всех непрерывных и ограниченных на $H$ векторных полей $\mathbf{X}: H \to H$, через $C_b^1 = C_b^1(H)$ (соответственно $C_b^1(H;H)$) пространство всех функций $f \in C_b$ (соответственно, векторных полей $\mathbf{X} \in C_b(H;H)$), дифференцируемых по Фреше в каждой точке $x \in H$ с ограниченной и непрерывной на $H$ производной $f'(\cdot)$ (соответственно $\mathbf{X}'(\cdot)$).

Через $\Phi_t = \Phi_t^{\mathbf{Z}}$ обозначим поток векторного поля $\mathbf{Z} \in C_b^1(H;\, H)$. Сдвиги меры $\mu$ вдоль векторного поля $\mathbf{Z}$ обозначим через $\mu_t$ ($\mu_t(A) = \mu(\Phi_t A)$ для каждого $A \in \mathfrak{B}(H)$, $\mathfrak{B}(H)$ — борелевская $\sigma$-алгебра в $H$). Напомним, что дифференцируемость меры $\mu$ вдоль поля $\mathbf{Z}$ в сильном смысле (по Фомину) означает существование предела $\vartheta(A) = \lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t}\big(\mu_t(A) - \mu(A)\big)$ для каждого борелевского множества $A$. При этом $\vartheta = \mathrm{d}_{\mathbf{Z}}\, \mu$ (производная меры $\mu$ вдоль поля $\mathbf{Z}$) является борелевской (знакопеременной) мерой, абсолютно непрерывной относительно меры $\mu$. Соответствующую плотность $\dfrac{d\vartheta}{d\mu}$ принято называть логарифмической производной меры $\mu$ вдоль поля $\mathbf{Z}$ или дивергенцией поля $\mathbf{Z}$ (относительно меры $\mu$): $\operatorname{div} \mathbf{Z} = \underset{\mu}{\operatorname{div}} \mathbf{Z} = \dfrac{d\vartheta}{d\mu}$.

Сильная дифференцируемость меры $\mu$ вдоль поля $\mathbf{Z}$ равносильна существованию функции $\rho = \rho_\mu^{\mathbf{Z}} \in L_1(H,\, \mu)$, которая для всех функций $u \in C_b^1(H)$ удовлетворяет равенству

$$\int\limits_H u \cdot \rho \, d\mu = -\int\limits_H \big(\, \mathbf{grad}\, u,\, \mathbf{Z} \,\big)\, d\mu.$$

При этом $\rho = \operatorname{div}_\mu \mathbf{Z}$.

Пусть $G$ — ограниченная область в $H$ с границей $S = \partial G$. Через $C^1(\overline{G})$ обозначим семейство всех функций на $\overline{G}$, допускающих продолжение на $H$ до функций класса $C^1_b$; через $C^1_0(G)$ — семейство функций из $C^1(\overline{G})$, которые равны нулю в некоторой $\varepsilon$-окрестности границы $S$. Аналогично определяем $C(\overline{G})$; $C(\overline{G}; H)$; $C^1(\overline{G}; H)$.

Через $L_2(G) = L_2(G, \mu)$ обозначим пространство интегрируемых с квадратом измеримых функций на $G$ по отношению к мере $\mu|_G$. Аналогично через $L_2(G; H) = L_2(G; H, \mu)$ обозначим пространство квадратично интегрируемых векторных полей на $G$. Норму в $L_2(G; H)$ задаем формулой $|||\,\mathbf{Z}\,|||^2 = \int_G \|\,\mathbf{Z}\,(x)\|^2\, d\mu$ (интегрируемость векторного поля понимаем в смысле конструкции Бохнера).

Граница $S$ области $G$ предполагается гладким вложенным в $H$ подмногообразием коразмерности 1; поле единичной внешней нормали границы $S$ предполагается продолжимым до векторного поля $\mathbf{n} \in C^1_b(H; H)$.

Дополнительно предполагаем также, что мера $\mu$ дифференцируема вдоль поля $\mathbf{n}$. Существование поля $\mathbf{n}$ с указанными выше свойствами постулируем и говорим о „согласованности $S$ (или $G$) с мерой $\mu$" (см. [1]).

Для $\varepsilon > 0$ символом $S_\varepsilon$ обозначим $\varepsilon$-окрестность множества $S$. В работе [2] (формула (13)) доказано, что при согласовании $S$ с мерой $\mu$ имеет место равенство $\mu(S_\varepsilon) = O(\varepsilon)$ $(\varepsilon \to 0)$, поэтому (см. [1], предложение 1) $C^1_0(G)$ плотно в $L_2(G)$.

Согласованная с $S$ мера $\mu$ индуцирует на $S$ поверхностную меру [1, 2], которую обозначим $\mu_S$. Если $u$ — ограниченная непрерывная функция на $S$ и $\hat{u}$ — ее продолжение до непрерывной ограниченной на $H$ функции, постоянной на траекториях поля $\mathbf{n}$, то поверхностная мера $\sigma$ корректно определяется следующей формулой, которая должна выполняться для всех ограниченных непрерывных функций на $S$:

$$\int\limits_S u\, d\sigma = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi^{\mathbf{n}}_t G} \hat{u}\, d\mu = \int\limits_G \hat{u} \cdot \rho^{\mathbf{n}}_\mu\, d\mu \tag{1}$$

(см. [1]). При этом для функций $v \in C_b(H)$ имеет место равенство

$$\int\limits_S v\, d\sigma = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi^{\mathbf{n}}_t G} v\, d\mu \tag{2}$$

(см. лемму 4 ниже).

Если $u \in C^1_b(H)$, то имеет место следующая формула (см. [1], формула (14)):

$$\int\limits_S u\, d\sigma = \int\limits_G \big(\, \mathbf{grad}\, u,\, \mathbf{n}\,\big)\, d\mu + \int\limits_G u \cdot \rho^{\mathbf{n}}_\mu\, d\mu. \tag{3}$$

Из результатов работы [2] (модификация предложения 2) следует возможность определения $\mu_S$ и в случае, когда мера $\mu$ дифференцируема не вдоль поля $\mathbf{n}$, а вдоль поля $\mathbf{Z} \in C^1_b(H; H)$, строго трансверсального к поверхности $S$. Последнее условие в терминах скалярного произведения означает, что

$$\inf \Big\{ \big| \big(\, \mathbf{Z}\,(x),\, \mathbf{n}\,(x) \big) \big| \,\Big|\, x \in S \Big\} > 0.$$

В этом случае равенство (3) для $u \in C_b^1(H)$ переходит в следующее:

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{Z}} G} u\, d\mu = \int\limits_S (\,\mathbf{Z}\,,\, \mathbf{n}\,) u\, d\sigma = \int\limits_G (\,\mathbf{grad}\, u,\, \mathbf{Z}\,)\, d\mu + \int\limits_G u \cdot \rho_\mu^{\mathbf{Z}}\, d\mu. \tag{4}$$

Рассмотрим оператор $\mathbf{grad}\colon L_2(G) \to L_2(G; H)$ с естественной областью определения $C^1(\overline{G})$ ($C^1(\overline{G}) \ni u \mapsto \mathbf{grad}\, u \in C(\overline{G}; H)$). Для корректного задания этого оператора следует проверить, что условия $u,\, v \in C^1(\overline{G})$, $u = v (\mathrm{mod}\ \mu)$ влекут за собой равенство $\mathbf{grad}\, u = \mathbf{grad}\, v (\mathrm{mod}\ \mu)$. Данное требование выполнено для тех мер $\mu$, для которых неравенство $\mu(U) > 0$ имеет место для любого непустого открытого множества $U \subset H$. Последнее условие выполнено для квазиинвариантной меры $\mu$, т. е. такой меры, для которой множество квазиинвариантных сдвигов $h$ $\big(\mu_h(A) := \mu(A + h);\ \mu_h \sim \mu\big)$ содержит плотное в $H$ линейное подмногообразие. Примером такой меры является гауссова мера, ядерный корреляционный оператор которой имеет плотный образ в $H$.

Дальнейшие построения предполагают выполнение следующих двух дополнительных условий на меру $\mu$ и область $G$:

а) оператор $\mathbf{grad}\colon L_2(G) \supset C^1(\overline{G}) \ni u \mapsto \mathbf{grad}\, u \in L_2(G; H)$ корректно определен и допускает замыкание;

б) $\rho_\mu^{\mathbf{n}}\,|_G \in L_\infty(G)$.

Модельный пример меры, согласованной с поверхностью $S$, для которой выполняются одновременно условия а) и б), предложен в работе [4]. Примером такой меры является мера $\mu_\varphi$, определенная формулой

$$\mu_\varphi(A) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, \mu\big(\Phi_t^{\mathbf{n}} A\big)\, dt,$$

где $\mu$ — гауссова мера с невырожденным ядерным корреляционным оператором, $A \in \mathfrak{B}(H)$, $\varphi \in C_b^1(\mathbb{R})$, $\varphi \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt < \infty$; существует константа $C$, для которой при всех $s \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\big|\varphi'(s)\big| \leq C\, \varphi(s)$.

Совместное выполнение условий а) и б) позволяет корректно ввести оператор следа $\gamma\colon L_2(G) \to L_2(S) = L_2(S, \mu_S)$ с областью определения $D(\,\overline{\mathbf{grad}}\,)$ (см. [1]). При этом для функций $u \in C^1(\overline{G})$ $\gamma(u) = u|_S$; в силу неравенства $\|u|_S\|_{L_2(S)} \leq C(\|u\|_{L_2(G)} + |\!|\!|\,\mathbf{grad}\, u|\!|\!|)$ ([1], формула (16)) оператор $C^1(\overline{G}) \ni u \mapsto u|_S \in L_2(S)$ корректно продолжим на $D(\,\overline{\mathbf{grad}}\,)$ до оператора $\gamma$, который представляет собой ограниченный оператор из банахова в норме графика пространства $D(\,\overline{\mathbf{grad}}\,)$ в $L_2(S)$.

Очевидно, $C_0^1(G) \subset \mathrm{Ker}\,\gamma$. В классической конечномерной теории краевых задач известно совпадение $\mathrm{Ker}\,\gamma$ с замыканием $C_0^1(G)$ по норме графика оператора $\overline{\mathbf{grad}}$. Известные автору доказательства этого факта основаны по существу на конечномерности пространства аргумента (применение свойств компактов). В данной работе приводится обобщение указанного классического результата на случай пространства $H$ с $\dim H \leq \infty$.

**2. Вспомогательные леммы.** Всюду в дальнейшем $S = \partial G$ согласована с мерой $\mu$, а также выполнены дополнительные условия а) и б) на меру $\mu$. Также полагаем $\Phi_t = \Phi_t^{\mathbf{n}}$.

**Лемма 1.** *Пусть* $u \in D(\overline{\mathbf{grad}})$. *Тогда для* $k = 1; 2$ *и* $t \leq 0$ *существуют производные* $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\Phi_t G} u^k \, d\mu$ *и выполнены равенства*

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{0-0} \int\limits_{\Phi_t G} u^k \, d\mu = \int\limits_{S} \big(\gamma(u)\big)^k \, d\sigma. \tag{5}$$

***Доказательство.*** Рассмотрим сначала случай $k = 1$. Существует последовательность функций $u_m \in C^1(\overline{G})$ такая, что $u_m \to u$ в $L_2(G)$, $\mathbf{grad}\, u_m \to \overline{\mathbf{grad}}\, u$ в $L_2(G; H)$. Рассмотрим функции $f_m(t) = \displaystyle\int_{\Phi_t G} u_m \, d\mu$, $t \in (-\infty; 0]$. Из неравенства $\left| \displaystyle\int_{\Phi_t G} u_m \, d\mu - \int_{\Phi_t G} u \, d\mu \right| \leq$ $\leq \displaystyle\int_G |u_m - u| \, d\mu$ следует равномерная сходимость на $(-\infty; 0]$ последовательности функций $f_m$ к функции $f(t) = \displaystyle\int_{\Phi_t G} u \, d\mu$. При этом в силу (4) существует $f_m'(t)$ и имеет место равенство

$$f_m'(t) = \int\limits_{\Phi_t G} \big(\mathbf{grad}\, u_m, \, \mathbf{n}\big) \, d\mu + \int\limits_{\Phi_t G} u_m \cdot \rho_\mu^{\mathbf{n}} \, d\mu$$

(здесь можно сослаться и на предложение 2 из работы [1], которое справедливо и в случае, если поле $\mathbf{n}$ не нормально к поверхности $S$).

Поэтому $f_m'(\cdot)$ непрерывны и равномерно на $(-\infty; 0]$ сходятся к функции

$$\int\limits_{\Phi_t G} \big(\overline{\mathbf{grad}}\, u, \, \mathbf{n}\big) \, d\mu + \int\limits_{\Phi_t G} u \cdot \rho_\mu^{\mathbf{n}} \, d\mu.$$

Теперь, в силу классической теоремы анализа, существует $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\Phi_t G} u \, d\mu = \lim_{m\to\infty} f_m'(t)$ и имеют место равенства

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t G} u \, d\mu = \int\limits_{S} \gamma(u) \, d\sigma = \int\limits_{G} \Big(\big(\overline{\mathbf{grad}}\, u, \, \mathbf{n}\big) + u \cdot \rho_\mu^{\mathbf{n}}\Big) \, d\mu.$$

Далее рассмотрим случай $k = 2$. Пусть последовательность функций $u_m \in C^1(\overline{G})$ та же, что и выше. Из неравенства $\displaystyle\int_G |u_m^2 - u^2| \, d\mu \leq \|u_m - u\|_{L_2(G)} \cdot \|u_m + u\|_{L_2(G)}$ следует сходимость $u_m^2 \to u^2$ в $L_1(G)$. Аналогично

$$\int\limits_{G} \big\| u_m \, \mathbf{grad}\, u_m - u \, \overline{\mathbf{grad}}\, u \big\| \, d\mu \leq$$

$$\leq \int\limits_{G} \big\| (u_m - u) \, \mathbf{grad}\, u_m \big\| \, d\mu + \int\limits_{G} \big\| u \, \mathbf{grad}\, u_m - u \, \overline{\mathbf{grad}}\, u \big\| \, d\mu \leq$$

$$\leq \|u_m - u\|_{L_2(G)} \big\| \mathbf{grad}\, u_m \big\|_{L_2(G;H)} + \|u\|_{L_2(G)} \big\| \mathbf{grad}\, u_m - \overline{\mathbf{grad}}\, u \big\|_{L_2(G;H)},$$

откуда следует сходимость в $L_1(G; H)$:

$$\mathbf{grad}\,(u_m^2) \to 2u \cdot \overline{\mathbf{grad}}\, u \in L_1(G; H). \tag{6}$$

Обозначим $g_m(t) = \int_{\Phi_t G} u_m^2\, d\mu$, $g(t) = \int_{\Phi_t G} u^2\, d\mu$. Поскольку $\left|g_m(t) - g(t)\right| \leq \leq \int_G \left|u_m^2\, d\mu - u^2\right| d\mu$, то последовательность функций $g_m(\cdot)$ равномерно на $(-\infty; 0]$ сходится к функции $g(\cdot)$.

Поскольку $\rho_\mu^{\mathbf{n}} \in L_\infty(G)$, то $u_m^2 \rho_\mu^{\mathbf{n}} \to u^2 \rho_\mu^{\mathbf{n}}$ в $L_1(G)$. Учитывая (6), получаем, что последовательность непрерывных функций $g'_m(\cdot)$ равномерно на $(-\infty; 0]$ сходится к функции $\int_{\Phi_t G} \left((2u\,\overline{\mathbf{grad}}\, u,\ \mathbf{n}\,) + u^2 \cdot \rho_\mu^{\mathbf{n}}\right) d\mu$. И снова из классической теоремы анализа делаем вывод о существовании $\dfrac{d}{dt} \int_{\Phi_t G} u^2\, d\mu = \lim_{m\to\infty} g'_m(t)$. При этом имеет место равенство

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Phi_t G} u^2\, d\mu = \int\limits_{\Phi_t G} \left((2u\,\overline{\mathbf{grad}}\, u,\ \mathbf{n}\,) + u^2 \cdot \rho_\mu^{\mathbf{n}}\right)\, d\mu.$$

Поскольку последовательность функций $\gamma(u_m) = u_m|_S$ в $L_2(S, \sigma)$ сходится к $\gamma(u)$, то $\left(\gamma(u_m)\right)^2 = u_m^2|_S$ в $L_1(S, \sigma)$ сходится к $\left(\gamma(u)\right)^2$. Заметив, что $\int_S \left(\gamma(u_m)\right)^2 d\sigma = g'_m(0)$, получим $\int_S \left(\gamma(u)\right)^2 d\sigma = \lim_{m\to\infty} g'_m(0) = \dfrac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int_{\Phi_t G} u^2\, d\mu.$

Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Пусть* $\|\mathrm{div}\ \mathbf{n}\,|_G\|_{L_\infty(G)} = C$. *Тогда* $\mu_t|_G \prec \mu|_G$ *для всех* $t \leq 0$ (*здесь* $\mu_t = \mu \circ \Phi_t$), *при этом* $\dfrac{d\mu_t}{d\mu} \in L_\infty(G)$, $\dfrac{d\mu_t}{d\mu} \leq e^{-C\,t}$ $(\mathrm{mod}\ \mu|_G)$ *и* $\left\|\dfrac{d\mu_t}{d\mu} - 1\right\|_{L_\infty(G)} \to 0$, $t \to 0$.

***Доказательство.*** Для $A \in \mathfrak{B}(G)$, $t \leq 0$ имеет место равенство $\mu_t(A) - \mu(A) = = \int_0^t \dfrac{d}{ds}\mu_s(A)\, ds = \int_0^t ds \int\limits_{\Phi_s A} \mathrm{div}\ \mathbf{n}\ d\mu$, откуда $\left|\mu_t(A) - \mu(A)\right| \leq C \int_t^0 \mu_s(A)\, ds$. Полагая $h(-t) = \mu_t(A)$, приходим к неравенству $h(-t) \leq h(0) + C \int_0^{-t} h(s)\, ds$ (здесь $-t \geq 0$) и применяем лемму Гронуолла. Получим $\mu_t(A) = h(-t) \leq \mu(A) \cdot e^{-tC}$, откуда и следуют утверждения леммы.

***Замечание* 1.** При $t < 0$ для $x \in \Phi_t G$ определено $\Phi_s x$ для $s \in (-\infty; -t]$. По аналогии с леммой 2 для $s \in [t; -t]$ проверяется неравенство $\left\|\dfrac{d\mu_s}{d\mu} - 1\right\|_{L_2(\Phi_t G)} \leq e^{C|t|} - 1$.

**Лемма 3.** *Пусть* $t \leq 0$, $u \in D(\,\overline{\mathbf{grad}}\,)$. *Тогда* $u \circ \Phi_t \in D(\,\overline{\mathbf{grad}}\,)$.

***Доказательство.*** Пусть $u_m \in C^1(\overline{G})$ — последовательность функций, для которых $u_m \to u$ в $L_2(G)$, $\mathbf{grad}\, u_m \to \overline{\mathbf{grad}}\, u$ в $L_2(G; H)$. Прежде всего заметим, что $u_m \circ \Phi_t \in C^1(\overline{G})$ для каждого $m$. Покажем, что $u_m \circ \Phi_t \to u \circ \Phi_t$ в $L_2(G)$. Действительно, в силу леммы 2 существует число $\widetilde{C} > 0$, для которого выполнена оценка

$$\int\limits_G (u_m - u)^2 \circ \Phi_t\, d\mu = \int\limits_{\Phi_t G} (u_m - u)^2\, d\mu_{-t} = \int\limits_{\Phi_t G} (u_m - u)^2 \frac{d\mu_{-t}}{d\mu}\, d\mu \leq$$

$$\leq \widetilde{C} \|u_m - u\|_{L_2(G)}^2 \to 0, \quad m \to \infty.$$

Далее, $\mathbf{grad}\,(u_m \circ \Phi_t) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\Phi_t x\right)^* (\,\mathbf{grad}\,u_m)(\Phi_t x)$, $\left\|\dfrac{\partial}{\partial x}(\Phi_t x)\right\| \le e^{|t|C_1}$, где $C_1 = \sup_H \left\|\,\mathbf{n}'(\cdot)\right\|$ (см., например, [4]).

Поэтому

$$\left|\!\left|\!\left|\mathbf{grad}\,(u_m \circ \Phi_t) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi_t x\right)^* \overline{\mathbf{grad}}\,u(\Phi_t x)\right|\!\right|\!\right|^2 =$$

$$= \int\limits_{\Phi_t G} \left\|\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi_t x\right)^* \big((\,\mathbf{grad}\,u_m) \circ \Phi_t - (\,\overline{\mathbf{grad}}\,u) \circ \Phi_t\big)\right\|^2 d\mu \le$$

$$\le e^{|t|C_1} \cdot \widetilde{C} \big|\!\big|\!\big|\,\mathbf{grad}\,u_m - \overline{\mathbf{grad}}\,u\big|\!\big|\!\big|^2,$$

откуда следует утверждение леммы и формула

$$\overline{\mathbf{grad}}\,(u \circ \Phi_t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_t x)\right)^* \big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,u\big) \circ \Phi_t.$$

Поверхностная мера $\sigma$ на $\big(S, \mathfrak{B}(S)\big)$ может быть построена по следующему алгоритму. Для каждого $A \in \mathfrak{B}(S)$ положим $W(A) = \big\{\Phi_t x \,\big|\, x \in A;\ t \in (-\infty; 0]\big\} \in \mathfrak{B}(H)$; для каждого $t \in \mathbb{R}$ получим меру $w_t$ на $\big(S, \mathfrak{B}(S)\big)$, определенную формулой $w_t(A) = \dfrac{1}{t}\left(\mu\big(\Phi_t(W(A))\big) - \mu\big(W(A)\big)\right)$, а в силу сильной дифференцируемости $\mu$ вдоль поля $\mathbf{n}$ получим меру $\sigma_1$ на $\big(S, \mathfrak{B}(S)\big)$, определенную формулой $\sigma_1(A) = \lim_{t\to 0} w_t(A)$. Тогда для любой ограниченной борелевской функции $f$ на $S$ имеет место равенство

$$\int\limits_S f\,d\sigma_1 = \lim_{t\to 0}\int\limits_S f\,dw_t = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\int\limits_{\Phi_t G}\hat f\,d\mu - \int\limits_G \hat f\,d\mu\right),$$

где $\hat f$ — продолжение функции $f$ на $H$, для которой $\hat f(\Phi_t x) = f(x)$ при $x \in S$, $t \in (-\delta; \delta)$ для некоторого $\delta > 0$. Потому меры $\sigma$ и $\sigma_1$ совпадают на $\big(S, \mathfrak{B}(S)\big)$.

**Лемма 4.** *Пусть $u \in C_b(H)$. Тогда существует $\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0}\displaystyle\int_{\Phi_t G} u\,d\mu$, и при этом*

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\int\limits_{\Phi_t G} u\,d\mu = \int\limits_S u|_S d\sigma\ \left(= \int\limits_S u\,d\sigma\right).$$

***Доказательство.*** Пусть $S$ — полное сепарабельное метрическое пространство, поэтому $\sigma$ — радонова мера. Обозначим $v = u|_S$. Для доказательства леммы достаточно проверить равенство

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int\limits_{\Phi_t G}(u - \hat v)\,d\mu = 0, \tag{7}$$

в котором функция $\hat v \in C_b(H)$, постоянна на траекториях поля $\mathbf{n}$ (в окрестности $S$) и совпадает с $v$ на $S$.

Положим $C = \sup_H |u|$. Поскольку $\mu(\Phi_t G \triangle G) = O(t)$, то существуют $\delta_1 > 0$ и $C_1 > 0$ такие, что $\mu(\Phi_t G \triangle G) \le C_1 \cdot |t|$ при $|t| < \delta_1$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и пусть $K_\varepsilon$ — компакт в $S$, для которого $\sigma(S \backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$. Для каждой точки $x \in K_\varepsilon$ существует окрестность $U_x$ точки $x$ вида $U_x = \left\{\Phi_t z \;\middle|\; z \in V_x \subset S;\ t \in \bigl(-\alpha(x); \alpha(x)\bigr)\right\}$ (здесь $\alpha(x) > 0$, $V_x$ — окрестность $x$ в $S$) такая, что для каждой точки $y \in U_x$ выполнено неравенство $|u(y) - u(x)| < \varepsilon$, поэтому $|u(y) - \hat v(y)| < 2\varepsilon$. Пусть $V_{x_1}, \ldots, V_{x_m}$ — конечное подпокрытие $K_\varepsilon$ и $\delta_2 = \min\bigl\{\alpha(x_1), \alpha(x_2), \ldots, \alpha(x_m)\bigr\}$. Тогда для каждой точки $x \in K_\varepsilon$ и любого $t \in (-\delta_2; \delta_2)$ выполнено неравенство $\bigl|u(\Phi_t x) - \hat v(\Phi_t x)\bigr| = \bigl|u(\Phi_t x) - u(x)\bigr| < \varepsilon$.

Положим $A_\varepsilon = S \setminus K_\varepsilon$. Поскольку $\sigma(A_\varepsilon) = \dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mu\bigl(\Phi_t(W(A_\varepsilon))\bigr)$, то существует $\delta_3 > 0$ такое, что при каждом $t \in (-\delta_3, \delta_3)$

$$\mu\bigl(\Phi_t(W(A_\varepsilon)) \triangle W(A_\varepsilon)\bigr) < 2|t|\sigma(A_\varepsilon) < 2\varepsilon\,|t|.$$

Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Тогда для $t \in (-\delta; \delta)$ получим неравенства

$$\left|\int\limits_{\Phi_t G \triangle G} (u - \hat v)\, d\mu\right| \le \int\limits_{\Phi_t(W(K_\varepsilon)) \triangle W(K_\varepsilon)} |u - \hat v|\, d\mu + \int\limits_{\Phi_t(W(A_\varepsilon)) \triangle W(A_\varepsilon)} (|u| + |\hat v|)\, d\mu \le$$

$$\le 2\varepsilon \cdot \mu(\Phi_t G \triangle G) + 2C \cdot \mu\bigl(\Phi_t(W(A_\varepsilon)) \triangle W(A_\varepsilon)\bigr) \le$$

$$\le 2\varepsilon \cdot C_1 \cdot |t| + 2C \cdot 2\varepsilon\,|t| = (2C_1 + 4C)\varepsilon\,|t|.$$

Тем самым доказано равенство (7), а вместе с ним и лемма 4.

**Лемма 5.** *Пусть* $u \in D(\,\overline{\mathbf{grad}}\,)$, $\gamma(u) = 0$. *Тогда* $\displaystyle\int_{G \backslash \Phi_t G} u^2\, d\mu = o(t^2)$, $t \le 0$.

***Доказательство.*** В силу леммы 1 следующие преобразования обоснованны:

$$\int\limits_{G \backslash \Phi_t G} u^2\, d\mu = \int\limits_t^0 ds \left(\frac{d}{ds} \int\limits_{\Phi_s G} u^2\, d\mu\right) = \int\limits_t^0 ds \left(\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \int\limits_{\Phi_{s+\tau} G} u^2\, d\mu\right) =$$

$$= \int\limits_t^0 ds \left(\frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \int\limits_{\Phi_\tau G} (u^2 \circ \Phi_s) d\mu_s\right). \tag{8}$$

Пусть $u_m \in C^1(\overline{G})$ — последовательность функций, аппроксимирующая функцию $u \in D(\,\overline{\mathbf{grad}}\,)$. Положим также $\bigl\|\,\mathbf{n}\,(\cdot)\bigr\|_{L_\infty(G;H)} = C_2$. Для $x \in \overline{G}$ имеем

$$u_m(\Phi_t x) - u_m(x) = \int\limits_0^t \bigl(\mathbf{grad}\, u_m(\Phi_s x),\, \mathbf{n}\,(\Phi_s x)\bigr)\, ds,$$

откуда

$$\big(u_m(\Phi_t x) - u_m(x)\big)^2 \le C_2^2\,|t| \int\limits_t^0 \big\|\big(\,\mathbf{grad}\,u_m\big)(\Phi_s x)\big\|^2\,ds,$$

$$\int\limits_S (u_m\circ\Phi_t - u_m)^2\,d\sigma \le |t|\,C_2^2 \int\limits_S d\sigma \int\limits_t^0 \big\|\big(\,\mathbf{grad}\,u_m\big)(\Phi_s x)\big\|^2\,ds = [\text{в силу леммы 4}$$

$$\text{и формулы (2)}] = |t|\,C_2^2 \frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} \int\limits_{\Phi_\tau G} d\mu \int\limits_t^0 \big\|\big(\,\mathbf{grad}\,u_m\big)(\Phi_s x)\big\|^2\,ds =$$

$$= |t|\,C_2^2 \frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} \int\limits_G \left(\int\limits_t^0 \big\|\big(\,\mathbf{grad}\,u_m\big)(\Phi_{s+\tau} x)\big\|^2\,ds\right) d\mu_\tau =$$

$$= |t|\,C_2^2 \frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} \int\limits_t^0 ds \int\limits_G \big\|\,\mathbf{grad}\,u_m(\Phi_{s+\tau} x)\big\|^2 \frac{d\mu_\tau}{d\mu}\,d\mu =$$

$$= |t|\,C_2^2 \frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} \int\limits_{t+\tau}^{\tau} ds \int\limits_G \big\|\,\mathbf{grad}\,u_m(\Phi_s x)\big\|^2 \frac{d\mu_\tau}{d\mu}\,d\mu =$$

$$= |t|\,C_2^2 \left[\int\limits_G \big\|\,\mathbf{grad}\,u_m\big\|^2\,d\mu - \int\limits_G \big\|\,\mathbf{grad}\,u_m(\Phi_t x)\big\|^2 \frac{d\mu_t}{d\mu}\,d\mu + \right.$$

$$\left. + \int\limits_t^0 ds \int\limits_G \big\|\,\mathbf{grad}\,u_m(\Phi_s x)\big\|^2 \operatorname{div}\,\mathbf{n}\,d\mu\right].$$

Здесь использовано тождество

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\left(\int\limits_G f d\mu_\tau - \int\limits_G f\,d\mu\right) = \int\limits_G f\cdot \operatorname{div}\,\mathbf{n}\,d\mu,$$

справедливое для любой ограниченной борелевской функции на $G$.

Теперь на основании лемм 1–3 и теоремы Лебега предельным переходом $m\to\infty$ получим

$$\int\limits_S \big(\gamma(u\circ\Phi_t) - \gamma(u)\big)^2\,d\sigma \le |t|\,C_2^2 \left[\int\limits_G \big\|\,\overline{\mathbf{grad}}\,u\big\|^2\,d\mu - \right.$$

$$\left. - \int\limits_G \big\|\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,u\big)(\Phi_t x)\big\|^2 \frac{d\mu_t}{d\mu}\,d\mu + \int\limits_t^0 ds \int\limits_G \big\|\,\overline{\mathbf{grad}}\,u(\Phi_s x)\big\|^2 \operatorname{div}\,\mathbf{n}\,d\mu\right], \tag{9}$$

$$\int\limits_G \|\,\overline{\mathbf{grad}}\,u\|^2\,d\mu - \int\limits_G \|\big(\overline{\mathbf{grad}}\,u\big)\circ\Phi_t\|^2\frac{d\mu_t}{d\mu}\,d\mu =$$

$$= \int\limits_{G\setminus\Phi_t G} \|\,\overline{\mathbf{grad}}\,u\|^2\,d\mu + \int\limits_{\Phi_t G}\|\,\overline{\mathbf{grad}}\,u\|^2\left(1-\left(\frac{d\mu_t}{d\mu}\circ\Phi_{-t}\right)\frac{d\mu_{-t}}{d\mu}\right)d\mu \to 0, \quad t\to 0.$$

Здесь использована оценка

$$\left\|\left(\frac{d\mu_t}{d\mu}\circ\Phi_{-t}\right)\frac{d\mu_{-t}}{d\mu}-1\right\|_{L_\infty(\Phi_t G)} \le \big(e^{C\,|t|}-1\big)^2,$$

полученная в лемме 2 и в замечании 1.

Поскольку последнее слагаемое в правой части неравенства (9) очевидным образом стремится к 0 при $t\to 0$, то из (9) получим равенство

$$\int\limits_S \big(\gamma(u\circ\Phi_t)-\gamma(u)\big)^2\,d\sigma = o(t), \quad t\to 0.$$

Поскольку $\gamma(u)=0$ в $L_2(S,\sigma)$, приходим к формуле

$$\int\limits_S \big(\gamma(u\circ\Phi_t)\big)^2\,d\sigma = o(t), \quad t\to 0.$$

Выберем $\varepsilon>0$. Найдется $\delta>0$ такое, что при всех $t\in(-\delta;\,0)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_S \big(\gamma(u\circ\Phi_t)\big)^2\,d\sigma \le \varepsilon|t|.$$

Поэтому в силу лемм 1 и 3 для каждого $t\in(-\delta;\,0)$ существует такое $\alpha>0$, что для $s\in(-\alpha;\,0)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{G\setminus\Phi_s G} u^2\circ\Phi_t\,d\mu \le 2\varepsilon\,|t\,s|.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha=\alpha(t)<\delta$.

В силу леммы 2 существует $C_3>0$, для которого неравенство $\left\|\dfrac{d\mu_t}{d\mu}\right\|_{L_\infty(G)}\le C_3$ выполнено для всех $t\in(-\delta;\,0)$. Поэтому при всех $t\in(-\delta;\,0)$ и $s\in(-\alpha(t);\,0)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{G\setminus\Phi_s G}\big(u^2\circ\Phi_t\big)\frac{d\mu_t}{d\mu}\,d\mu \le 2C_3\varepsilon\,|t\,s|.$$

Следовательно, при $t\in(-\delta;\,0)$ получим оценку

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\int\limits_{\Phi_s G}\big(u^2\circ\Phi_t\big)\frac{d\mu_t}{d\mu}\,d\mu \le 2C_3\varepsilon\,|t|. \tag{10}$$

Напомним, что согласно лемме 1 производная $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\Phi_t G} u^2\,d\mu$ существует при всех $t \in \in (-\delta;\,0)$, но, как следует из равенств (8), она совпадает с левой частью неравенства (10). Тем самым доказано, что

$$\frac{d}{ds}\int\limits_{\Phi_s G} u^2\,d\mu = o(s), \quad s \to 0,$$

и осталось воспользоваться равенством (8).

Лемма доказана.

**3. Основная теорема.**

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — ограниченная область в $H$, граница $S$ которой согласована с конечной борелевской мерой $\mu$, выполнены дополнительные условия* а) *и* б) *на меру $\mu$ и область $G$. Тогда $C_0^1(G)$ плотно в $\operatorname{Ker}\gamma$ в норме графика оператора $\overline{\mathbf{grad}}$.*

***Доказательство.*** Пусть $u \in \operatorname{Ker}\gamma$ и $\varepsilon > 0$. В силу леммы 5 и абсолютной непрерывности интеграла существует такое $\delta > 0$, для которого одновременно выполняются неравенства

$$\left(\int\limits_{G\setminus\Phi_{-\delta}G} u^2\,d\mu\right)^{\frac12} < \varepsilon\,\delta, \qquad \left(\int\limits_{G\setminus\Phi_{-\delta}G} \big\|\,\overline{\mathbf{grad}}\,u\big\|^2\,d\mu\right)^{\frac12} < \varepsilon.$$

Далее подбираем функцию $v \in C^1(\overline{G})$, для которой одновременно выполнены условия

$$\|v-u\|_{L_2(G)} < \varepsilon\,\delta, \qquad \big\|\,\mathbf{grad}\,v - \overline{\mathbf{grad}}\,u\big\| < \varepsilon. \tag{11}$$

Тогда

$$\left(\int\limits_{G\setminus\Phi_{-\delta}G} v^2\,d\mu\right)^{\frac12} < 2\varepsilon\,\delta, \qquad \left(\int\limits_{G\setminus\Phi_{-\delta}G} \big\|\,\mathbf{grad}\,v\big\|^2\,d\mu\right)^{\frac12} < 2\varepsilon. \tag{12}$$

Существует функция $\varphi \in C_0^1(G)$, для которой $\varphi(x) = 1$ для $x \in \Phi_{-\delta}G$, $0 \le \varphi(x) \le 1$ и $\big\|\,\mathbf{grad}\,\varphi(x)\big\| \le \dfrac{4}{\delta}$ для всех $x \in G$. Функцию $\varphi$ можно найти из следующих соображений. Каждая точка $x \in G \setminus \Phi_{-\delta}G$ определяет число $t = t(x)$ по формуле $x = \Phi_{-t}y$, где $y \in S$, $0 \le t \le \delta$. Функция $t(\cdot) \in C^1(\overline{G \setminus G_\delta})$ и $\mathbf{grad}\,t(x) = -\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(t(x),\,x)\right)^{*}\mathbf{n}\left(\Phi(t(x),\,x)\right)$ (см. [1]). Уменьшив, если необходимо, $\delta > 0$, можно добиться выполнения неравенства $\|\,\mathbf{grad}\,t(x)\| < 2$ для всех $x \in G \setminus \Phi_{-\delta}G$, поскольку $\|\,\mathbf{grad}\,t(x)\| \equiv 1$ на $S$. Затем следует взять функцию $h \in C^1([0;\,\delta])$, для которой при некотором $\alpha > 0$ $h\Big|_{[0;\,\alpha]} = 0$, $h(t) \in [0;\,1]$, $|h'(t)| \le \dfrac{2}{\delta}$ для каждого $t \in [0;\,\delta]$, $h(\delta) = 1$, $h'(\delta) = 0$, положить $\varphi = h \circ t$ и доопределить в $\Phi_{-\delta}G$, положив $\varphi(x) = 1$ для каждого $x \in \Phi_{-\delta}G$.

Теперь $v \cdot \varphi \in C_0^1(G)$ и (см. (12))

$$\|v - v\cdot\varphi\|_{L_2(G)} = \left(\int\limits_{G\setminus\Phi_{-\delta}G} v^2\,(1-\varphi)^2\,d\mu\right)^{\frac12} \le 2\varepsilon\,\delta,$$

$$\left|\!\left|\!\left| \,\mathbf{grad}\, v - \mathbf{grad}\,(v\cdot\varphi) \right|\!\right|\!\right| \le \left|\!\left|\!\left| (1-\varphi)\,\mathbf{grad}\, v \right|\!\right|\!\right| + \left|\!\left|\!\left| v\cdot\mathbf{grad}\,\varphi \right|\!\right|\!\right| <$$

$$< \left( \int\limits_{G\setminus\Phi_{-\delta}G} \|\,\mathbf{grad}\, v\|^2\, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int\limits_{G\setminus\Phi_{-\delta}G} v^2\,\|\,\mathbf{grad}\,\varphi\|^2\, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le 2\varepsilon + \frac{4}{\delta}\cdot 2\varepsilon\delta = 10\varepsilon.$$

Учитывая (11), получаем $\|u - v\cdot\varphi\|_{L_2(G)} < 3\varepsilon\delta$, $\left|\!\left|\!\left| \,\overline{\mathbf{grad}}\, u - \mathbf{grad}\,(v\cdot\varphi) \right|\!\right|\!\right| < 11\varepsilon$, что и доказывает теорему.

$L_2$-версию оператора дивергенции на всем $H$ зададим как оператор $\mathrm{div}\colon L_2(H;H) \to \to L_2(H)$, определенный равенством

$$\int\limits_H \big(\mathrm{div}\ \mathbf{Z}\,, u\big)\, d\mu = -\int\limits_H \big(\,\mathbf{Z}\,,\,\mathbf{grad}\, u\big)\, d\mu,$$

которое должно выполняться для всех $u \in C_b^1(H)$. Другими словами, $\mathrm{div} = -(\,\mathbf{grad}\,)^*$, где $\mathbf{grad}\colon L_2(H) \supset C_b^1(H) \ni u \mapsto \mathbf{grad}\, u \in L_2(H;H)$. Соответствующий оператор Лапласа задаем формулой $\triangle = \mathrm{div}\circ\overline{\mathbf{grad}}\,$.

Формула (4) оправдывает задание оператора дивергенции $\mathrm{div}_G\colon L_2(G;H) \to L_2(G)$ в $G$ формулой $\mathrm{div}_G = -\big(\,\overline{\mathbf{grad}}\,\big|_{\mathrm{Ker}\,\gamma}\big)^*$. В силу доказанной теоремы оператор $\mathrm{div}_G$ допускает и эквивалентное альтернативное определение $\mathrm{div}_G = -\big(\,\mathbf{grad}\,\big|_{C_0^1(G)}\big)^*$, где оператор $\mathbf{grad}\colon L_2(G) \supset C^1(\overline{G}) \to L_2(G;H)$ совпадает с оператором из п. 1. Соответствующий оператор Лапласа имеет вид $\triangle_G = \mathrm{div}_G\circ\overline{\mathbf{grad}}\,$.

Из теоремы 1 получаем такое следствие.

***Следствие* 1.** 1. *Если* $\mathbf{Z} \in D(\mathrm{div})$, *то* $\mathbf{Z}\,|_G \in D(\mathrm{div}_G)$ *и при этом* $\big(\mathrm{div}\ \mathbf{Z}\big)\,|_G = = \mathrm{div}_G\big(\,\mathbf{Z}\,|_G\big)$.

2. *Если* $u \in D(\triangle)$, *то* $u|_G \in D(\triangle_G)$ *и при этом* $(\triangle u)|_G = \triangle_G(u|_G)$.


1. *Богданский Ю. В.* Лапласиан по мере на гильбертовом пространстве и задача Дирихле для уравнения Пуассона в $L_2$-версии // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 9. – С. 1169 – 1178.
2. *Богданский Ю. В.* Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса – Остроградского // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 10. – С. 1299 – 1313.
3. *Uglanov A. V.* Integration on infinite-dimensional surfaces and its applications. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. – 262 p.
4. *Богданский Ю. В., Санжаревский Я. Ю.* Задача Дирихле с лапласианом по мере на гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 6. – С. 733 – 739.


Получено 14.03.14,
после доработки — 10.07.15