УДК 517.98

О. В. Лопушанський (Жешув. ун-т, Польща),
С. В. Шарин (Прикарпат. нац. ун-т, Івано-Франківськ)

ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ ПОВІЛЬНОГО РОСТУ ДО ПОБУДОВИ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

We use the generalized n-dimensional Laplace transform of tempered distributions whose supports are located in a positive n-dimensional cone to construct a functional calculus for the commutative collections of injective generators of n-parameter analytic semigroups of operators acting in a Banach space.

С помощью обобщенного n-мерного преобразования Лапласа медленно растущих обобщенных функций, носители которых содержатся в положительном n-мерном конусе, построено функциональное исчисление для коммутативных наборов инъективных генераторов n-параметрических аналитических полугрупп операторов, действующих в банаховом пространстве.

1. Вступ. Нехай S'_+ — згорткова алгебра узагальнених функцій повільного росту, носії яких містяться в додатному конусі $\mathbb{R}^n_+$. Узагальнене перетворення Лапласа $\widehat{f}$ розподілу $f \in S'_+$ є аналітичною функцією

$$\widehat{f}(z) = \big\langle f(t), e^{-tz} \big\rangle, \quad f \in S'_+, \tag{1}$$

що визначена в трубчастій області

$$\mathbb{C}^n_+ := \big\{ z = x + iy \in \mathbb{C}^n : x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n_+ \big\}.$$

Відомо [19], що множина $\widehat{S'_+} = \big\{\widehat{f} : f \in S'_+\big\}$ є алгеброю відносно поточкового множення $\widehat{f}(z) \cdot \widehat{g}(z) = \widehat{f * g}(z)$ для всіх $z \in \mathbb{C}^n_+$, де символом $*$ позначено звичайну згортку розподілів.

У цій статті ми використовуємо узагальнене перетворення Лапласа

$$L : S'_+ \ni f \longmapsto \widehat{f} \in \widehat{S'_+}$$

для побудови функціонального числення для набору ін'єктивних генераторів $A = (A_1, \ldots, A_n)$ n-параметричних аналітичних напівгруп

$$\mathbb{R}^n_+ \ni (t_1, \ldots, t_n) = t \longmapsto e^{-tA} = e^{-(t_1 A_1 + \ldots + t_n A_n)}$$

обмежених операторів, що діють у комплексному банаховому просторі E. Як клас символів такого числення ми використовуємо мультиплікативну алгебру $\widehat{S'_+}$ аналітичних функцій (1).

Функціональне числення $\varPhi : \widehat{f} \longmapsto \widehat{f}(A)$ при фіксованому A визначено за формулою

$$\widehat{f}(A)x = \big\langle f(t), e^{-tA}x \big\rangle, \quad x \in \mathfrak{A}, \tag{2}$$

де $\mathfrak{A}$ — щільний в E підпростір нескінченно гладких векторів, що визначається цілими степенями генераторів. Як результат лінійні оператори $\widehat{f}(A)$ визначені на E як необмежені оператори із спільною областю визначення $\mathfrak{A}$. Більше того, відображення $\varPhi$ є алгебраїчним гомоморфізмом мультиплікативної алгебри $\widehat{S'_+}$ на комутативну підалгебру $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$ (див. теорему 1).

Формула (2) є операторним аналогом формули (1). Зауважимо, що на відміну від класичного функціонального числення [8, 13] або його узагальнень [6, 11] ми не використовуємо жодного інтегрального зображення функцій із класу символів.

Диференціальні властивості алгебраїчного гомоморфізму $\varPhi$ описано в теоремах 2 і 3. З використанням теореми 1 у прикладі 1 визначено довільний дійсний степінь оператора. Застосування числення до n-параметричної напівгрупи Гаусса – Вейєрштрасса розглянуто у прикладах 2 і 3.

Інші дослідження, що стосуються тематики статті, можна знайти у [7, 10 – 12].

2. Попередні відомості та позначення. Нехай $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+^n := \times_{j=1}^n \mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}_+^n := \times_{j=1}^n \mathbb{R}_+$, $\mathbb{N}^n := \times_{j=1}^n \mathbb{N}$, $\operatorname{int}\mathbb{R}_+^n$ — внутрішність конуса $\mathbb{R}_+^n$.

Введемо такі позначення: $ts = t_1s_1 + \ldots + t_ns_n$, $|t| = \sqrt{t\bar{t}}$, $t^\alpha = t_1^{\alpha_1}\ldots t_n^{\alpha_n}$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\ldots\partial_n^{\alpha_n}$, $\partial_j^{\alpha_j} = \partial^{\alpha_j}/\partial t_j^{\alpha_j}$, $\alpha! = \alpha_1!\ldots\alpha_n!$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ для довільних $t = (t_1,\ldots,t_n)$, $s = (s_1,\ldots,s_n)$ з $\mathbb{R}^n$ або $\mathbb{C}^n$ і $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. Ми пишемо $\alpha \preccurlyeq \beta$, якщо $\alpha_j \le \beta_j$ для всіх $j = 1,\ldots,n$, де $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^n$.

Скрізь у статті $\mathscr{L}(X)$ позначає простір неперервних лінійних операторів над локально опуклим простором X, а X' — спряжений до X простір. Простори $\mathscr{L}(X)$ і X' ми наділяємо топологією рівномірної збіжності на обмежених підмножинах X.

Нехай задано функцію $\mathbb{R}_+^n \ni t \longmapsto U(t) \in \mathscr{L}(E)$, де $E := \big(E, \|\cdot\|\big)$ — комплексний банаховий простір.

Сім'ю $\{U(t)\colon t \in \mathbb{R}_+^n\}$ обмежених лінійних операторів на E називають (див. [3, 8]) n-параметричною напівгрупою, якщо $U(t+s) = U(t)\circ U(s)$ для всіх $t,s \in \mathbb{R}_+^n$ і $U(0) = I$ — тотожний оператор в $\mathscr{L}(E)$.

Напівгрупу $U := \{U(t)\colon t \in \mathbb{R}_+^n\}$ називають сильно неперервною (або C_0-напівгрупою), якщо

$$\lim_{\mathbb{R}_+^n \ni t \to 0} \|U(t)x - x\| = 0 \quad \text{для всіх} \quad x \in E.$$

Для кожної n-параметричної напівгрупи U визначимо маргінальні однопараметричні напівгрупи $V_j = \{V_j(\tau)\colon \tau \in \mathbb{R}_+\}$, $j = 1,\ldots,n$, де

$$V_j : \mathbb{R}_+ \ni \tau \longmapsto U(\underbrace{0,\ldots,0,\tau}_{j},0,\ldots,0) \in \mathscr{L}(E).$$

Кожну n-параметричну напівгрупу U можна подати як композицію маргінальних однопараметричних напівгруп, що комутують одна з одною (див. [3, 8]), тобто

$$U(t_1,\ldots,t_n) = V_1(t_1)\circ\ldots\circ V_n(t_n).$$

Генератор A_j маргінальної напівгрупи $V_j = \{V_j(\tau) : \tau \in \mathbb{R}_+\}$ визначають за правилом

$$A_jx := \lim_{\tau\to+0} \tau^{-1}\big(V_j(\tau)x - x\big) = \partial_j^1 V_j(\tau)x\big|_{\tau=+0}$$

для всіх $x \in \mathfrak{D}(A_j)$, де $\mathfrak{D}(A_j)$ складається з усіх $x \in E$, для яких наведена вище границя існує.

Генератором n-параметричної напівгрупи $U = \{U(t)\colon t \in \mathbb{R}_+^n\}$ називають множину операторів $A := (A_1,\ldots,A_n)$ із спільною областю визначення $\mathfrak{D}(A) := \bigcap_{j=1}^n \mathfrak{D}(A_j)$.

Якщо U є C_0-напівгрупою, то кожен оператор A_j є замкненим і його звуження $A_j\big|_{\mathfrak{D}(A)}$ є обмеженим. Більше того, справджуються відомі властивості (див., наприклад, [3], твердження 1.1.8 і 1.1.9):

(i) якщо $x \in \mathfrak{D}(A_j)$, то $U(t)x \in \mathfrak{D}(A_j)$ і $A_jU(t)x = U(t)A_jx$ для всіх $t \in \mathbb{R}_+^n$;

(ii) $U(t)x \in \mathfrak{D}(A)$ для всіх $x \in E$, $t \in \operatorname{int}\mathbb{R}_+^n$ і $\mathfrak{D}(A)$ є щільним підпростором E; крім того, $\mathfrak{D}(A)$ є банаховим простором відносно норми

$$\|x\|_{\mathfrak{D}(A)} := \|x\| + \sum_{j=1}^n \|A_jx\|;$$

(iii) для всіх $x \in \mathfrak{D}(A)$ та $i,j = 1,\ldots,n$ виконується рівність $A_iA_jx = A_jA_ix$.

Нехай Σ_φ позначає сектор

$$\Sigma_\varphi := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| > 0, |\arg z| < \varphi\}, \quad 0 < \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Очевидно, що $\Sigma_\varphi^{\mathrm{cl}} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| > 0, |\arg z| \le \varphi\} \cup \{0\}$ — його замикання. Однопараметричну C_0-напівгрупу $\{V(t) \colon t \in \mathbb{R}_+\}$ називають (див. [20], розд. 7) обмеженою аналітичною напівгрупою, якщо існує такий кут $0 < \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, що $\{V(t) \colon t \in \mathbb{R}_+\}$ можна розширити до такої голоморфної сім'ї обмежених операторів $\{\widetilde{V}(z) \colon z \in \Sigma_\varphi\}$, що задовольняє наступні властивості:

(i) $\lim_{z \in \Sigma_\varphi^{\mathrm{cl}}, z \to 0} \widetilde{V}(z)x = x$ для всіх $x \in E$;

(ii) $\widetilde{V}(z+s) = \widetilde{V}(z)\widetilde{V}(s)$ для всіх $z, s \in \Sigma_\varphi^{\mathrm{cl}}$;

(iii) відображення $z \mapsto \widetilde{V}(z)$ є обмеженим з $\Sigma_\psi^{\mathrm{cl}}$ в $\mathscr{L}(E)$ для всіх $0 < \psi < \varphi$.

Деяку сильно неперервну n-параметричну напівгрупу називають обмеженою аналітичною напівгрупою, якщо кожна її маргінальна напівгрупа є обмеженою аналітичною напівгрупою [20]. У цьому випадку знайдеться такий набір кутів

$$\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n), \quad 0 < \vartheta_j \le \pi/2,$$

що напівгрупа має обмежене аналітичне розширення у множину

$$\left\{z \in \mathbb{C}^n \colon |\arg z_j| \le \vartheta'_j, \ j = 1, \ldots, n\right\}$$

для всіх $0 < \vartheta'_j < \vartheta_j$.

Генератор $A = (A_1, \ldots, A_n)$ n-параметричної напівгрупи називатимемо ін'єктивним, якщо всі оператори A_j, $j = 1, \ldots, n$, є ін'єктивними. В цьому випадку існує набір обернених операторів $A^{-1} := (A_1^{-1}, \ldots, A_n^{-1})$ зі щільною областю визначення $\mathfrak{D}(A^{-1}) = \bigcap_{j=1}^n \mathfrak{D}(A_j^{-1})$, яку ми наділяємо нормою

$$\|x\|_{\mathfrak{D}(A^{-1})} := \|x\| + \sum_{j=1}^n \|A_j^{-1}x\|.$$

Відомо (див. [2], теорема 3.7, або [4]), що якщо генератор A n-параметричної обмеженої аналітичної напівгрупи є ін'єктивним, то A^{-1} теж генерує n-параметричну обмежену аналітичну напівгрупу.

Нехай для всіх $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ символ $S^{\alpha,\beta}$ позначає банаховий простір комплексних функцій φ на $\mathbb{R}^n$ зі скінченною нормою

$$\|\varphi\|_{S^{\alpha,\beta}} = \max_{\substack{\mu \preccurlyeq \alpha \\ \nu \preccurlyeq \beta}} \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \left| t^\mu \partial^\nu \varphi(t) \right|, \quad \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Кожне включення $S^{\alpha,\beta} \hookrightarrow S^{\eta,\gamma}$ при $\eta \preccurlyeq \alpha$, $\gamma \preccurlyeq \beta$ є компактним (див., наприклад, [19, 21]).

Розглянемо простір Шварца $S := \bigcap \left\{S^{\alpha,\beta} \colon \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n\right\}$ основних функцій, наділений топологією проективної границі $\varprojlim S^{\alpha,\beta}$ відносно цих включень. Спряжений до S простір S' називають простором розподілів (узагальнених функцій) повільного росту. Відомо [14], що S і S' — монтелеві ядерні простори. Більше того, S є так званим FS-простором, а S' — DFS-простором у сенсі означення з [14].

Значення розподілу $f \in S'$ на основній функції $\varphi \in S$ ми позначатимемо $\langle f, \varphi\rangle$ або $\langle f(t), \varphi(t)\rangle$. Зауважимо, що тут і скрізь далі ми пишемо $f(t)$, щоб виділити змінну, за якою функціонал f діє на основну функцію.

Нехай S'_+ — замкнений підпростір S' тих розподілів, носії яких містяться в $\mathbb{R}^n_+$. Відомо [19], що S'_+ є монтелевим ядерним DFS-простором і топологічною алгеброю відносно згортки

$$\langle f * g, \varphi\rangle = \langle f(t), \langle g(s), \varphi(t+s)\rangle\rangle, \qquad f, g \in S'_+, \quad \varphi \in S.$$

Функціонал Дірака δ_t, зосереджений у точці $t \in \mathbb{R}^n_+$, належить S'_+, а $\delta := \delta_0$ є одиничним елементом у згортковій алгебрі S'_+.

Узагальнене перетворення Фур'є, яке визначають за формулою

$$\langle F[f], \varphi\rangle = \langle f, F[\varphi]\rangle, \qquad F[\varphi](s) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(t) e^{-its} dt, \qquad \varphi \in S, \quad s \in \mathbb{R}^n,$$

здійснює топологічний ізоморфізм $F\colon S' \ni f \longmapsto F[f] \in S'$. Образ $F[S'_+]$ є замкненим в S' (див. [19]). Перетворення Лапласа розподілу $f \in S'_+$ визначають через перетворення Фур'є таким чином:

$$L[f](z) := F\big[f(t)e^{-t\xi}\big](\eta) = \big\langle f(t), e^{-tz}\big\rangle, \qquad z = \xi + i\eta \in \mathbb{C}^n_+.$$

Зауважимо, що $\widehat{f}(z) := L[f](z)$ є аналітичною функцією змінної $z \in \mathbb{C}^n_+$. Зокрема,

$$\widehat{f}(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(t) e^{-tz} dt$$

для довільної обмеженої інтегровної функції f на $\mathbb{R}^n_+$.

Зауважимо, що $\widehat{S'_+} := L\left[S'_+\right]$ є алгеброю (див. [19], II.9) відносно поточкового множення $\widehat{f}(z) \cdot \widehat{g}(z) = \widehat{f * g}(z)$, $z \in \mathbb{C}^n_+$. Простір $\widehat{S'_+}$ ми наділяємо топологією, індукованою відображенням $L\colon S'_+ \longrightarrow \widehat{S'_+}$.

3. Допоміжні твердження. У цьому пункті ми досліджуємо простір E-значних нескінченно гладких функцій

$$x\colon \mathbb{R}^n \ni t \longmapsto x(t) \in E,$$

де $E := \big(E, \|\cdot\|\big)$ — комплексний банаховий простір.

Нехай $S^{\alpha,\beta}(E)$ для довільних $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+$ позначає підпростір таких функцій зі скінченною нормою

$$\|x\|_{S^{\alpha,\beta}(E)} = \max_{\substack{\mu \preccurlyeq \alpha \\ \nu \preccurlyeq \beta}} \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \big\|t^\mu \partial^\nu x(t)\big\|, \qquad \mu, \nu \in \mathbb{Z}^n_+.$$

Розглянемо проективну границю цих просторів

$$S(E) = \varprojlim S^{\alpha,\beta}(E), \qquad S(E) := \bigcap \big\{S^{\alpha,\beta}(E)\colon \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+\big\}$$

відносно включень $S^{\alpha,\beta}(E) \hookrightarrow S^{\eta,\gamma}(E)$ при $\eta \preccurlyeq \alpha$ і $\gamma \preccurlyeq \beta$. Зауважимо, що якщо $E = \mathbb{C}$, то $S(\mathbb{C}) = S$.

Позначимо через $x_+ := x\big|_{\mathbb{R}^n_+}$ звуження функції x на додатний конус $\mathbb{R}^n_+$. Кожен простір таких функцій

$$S_+^{\alpha,\beta}(E) := \{x_+ : x \in S^{\alpha,\beta}(E)\}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n,$$

наділимо нормою

$$\|x_+\|_{S_+^{\alpha,\beta}(E)} = \max_{\substack{\mu \preccurlyeq \alpha \\ \nu \preccurlyeq \beta}} \sup_{t \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^n} \left\| t^\mu \partial^\nu x_+(t) \right\|, \qquad \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Зауважимо, що всі похідні $\partial^\nu x_+$ можна неперервно продовжити через границю конуса $\mathbb{R}_+^n$. Розглянемо простір

$$S_+(E) := \bigcap \{S_+^{\alpha,\beta}(E) \colon \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n\},$$

наділений нормами $\|\cdot\|_{S_+^{\alpha,\beta}(E)}$. Якщо $E = \mathbb{C}$, то для простоти позначимо $S_+ := S_+(\mathbb{C})$ і $\|\cdot\|_{S_+^{\alpha,\beta}} := \|\cdot\|_{S_+^{\alpha,\beta}(\mathbb{C})}$.

Наступну лему, що є узагальненням відомої теореми про продовження функцій із підпростору на весь простір (див. [16]), доведено в [9] (лема 1).

Лема 1. *Існує лінійний неперервний оператор продовження*

$$\Lambda \colon S_+(E) \ni x_+ \longmapsto \Lambda x_+ \in S(E)$$

такий, що $\Lambda x_+(t) = x_+(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}_+^n$.

Розглянемо поповнені проективні тензорні добутки $E \otimes_{\mathfrak{p}} S$ і $E \otimes_{\mathfrak{p}} S_+$, наділені відповідно нормами

$$\|x\|_{E \otimes_{\mathfrak{p}} S^{\alpha,\beta}} := \inf \sum_{j \in \mathbb{N}} |\lambda_j| \|x_j\| \|\varphi_j\|_{S^{\alpha,\beta}}, \quad \|x\|_{E \otimes_{\mathfrak{p}} S_+^{\alpha,\beta}} := \inf \sum_{j \in \mathbb{N}} |\lambda_j| \|x_j\| \|\varphi_j\|_{S_+^{\alpha,\beta}}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+,$$

де обидва інфімуми беруть по всіх зображеннях елемента $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} S$ (відповідно $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} S_+$) у вигляді абсолютно збіжного ряду

$$x = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes \varphi_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{C}, \quad x_j \in E, \quad \varphi_j \in S \quad (\text{відповідно } \varphi_j \in S_+), \tag{3}$$

такого, що $\sum_j |\lambda_j| < \infty$, а $\{\varphi_j\}$, $\{x_j\}$ — послідовності, що збігаються до нуля у відповідних просторах.

Лема 2. *Справджуються топологічні ізоморфізми*

$$S_+(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} S_+, \qquad S(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} S. \tag{4}$$

Як наслідок кожен елемент з $S(E)$ чи $S_+(E)$ можна розкласти (*не єдиним чином*) *в абсолютно збіжний ряд вигляду* (3).

Доведення. У роботі [15] доведено ізоморфізм

$$S(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{e}} S,$$

де $\otimes_{\mathfrak{e}}$ позначає повний ін'єктивний тензорний добуток. Тому мають місце топологічні ізоморфізми

$$E \otimes_{\mathfrak{e}} S \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} S, \qquad S(E) \simeq E \otimes_{\mathfrak{p}} S$$

завдяки ядерності простору S [14] (IV.9.4, наслідок 2). З відомої теореми [14] (III.6.4) про вигляд елементів проективного тензорного добутку випливає, що кожен $x \in E \otimes_{\mathfrak{p}} S$ можна подати (не єдиним чином) у вигляді абсолютно збіжного ряду вигляду (3).

З леми 1 випливає, що звуження $S(E) \ni x \longmapsto x_+ \in S_+(E)$ є сюр'єктивним та неперервним. Тому кожен елемент $x_+ \in S_+(E)$ також можна подати у вигляді абсолютно збіжного ряду вигляду (3). Отже, $x_+ \in E \otimes_{\mathfrak{p}} S_+$ і для всіх $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$

$$\|x_+\|_{S_+^{\alpha,\beta}(E)} \leq \inf \sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j| \|x_j\| \|\varphi_j\|_{S_+^{\alpha,\beta}} = \|x_+\|_{E\otimes_{\mathfrak{p}} S_+^{\alpha,\beta}},$$

оскільки x_+ не залежить від подання у вигляді ряду в $E \otimes_{\mathfrak{p}} S_+$. Як наслідок останньої нерівності і теореми про відкрите відображення отримуємо перший з ізоморфізмів (4).

Лему 2 доведено.

4. Операторне узагальнення перетворення Лапласа. Нехай $U = \{U(t) \colon t \in \mathbb{R}_+^n\}$ — n-параметрична обмежена аналітична напівгрупа на комплексному банаховому просторі $(E, \|\cdot\|)$ з генератором $A = (A_1, \ldots, A_n)$. Скрізь у статті ми припускаємо, що виконується така умова:

всі генератори A_j маргінальних аналітичних напівгруп ін'єктивні та мають щільні області визначення та образи, тобто

$$\overline{\mathfrak{D}(A_j)} = \overline{\mathfrak{R}(A_j)} = E, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Нехай $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(A^{-1})$ позначає щільний підпростір, наділений нормою

$$\|x\|_{\mathfrak{D}} := \|x\| + \sum_{j=1}^{n} \|A_j x\| + \sum_{j=1}^{n} \|A_j^{-1} x\|.$$

При наших припущеннях це — банаховий простір.

Для того щоб відмітити, що n-параметрична обмежена напівгрупа U генерується $A = (A_1, \ldots, A_n)$, будемо використовувати позначення

$$e^{-tA} := e^{-t_1 A_1} \circ \ldots \circ e^{-t_n A_n},$$

де $e^{-t_j A_j}$ позначає відповідну маргінальну обмежену напівгрупу з генератором A_j, $j = 1, \ldots, n$.

Із зроблених припущень та попередніх зауважень випливає, що:

1) існує така стала $M > 0$, що $\|e^{-tA}\| \leq M$ для всіх $t \in \mathbb{R}_+^n$;

2) для всіх мультиіндексів $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ коректно визначеними є степені операторів із відповідними щільними областями визначення

$$A^{\alpha} := A_1^{\alpha_1} \circ \ldots \circ A_n^{\alpha_n}, \qquad \mathfrak{D}(A^{\alpha}) := \bigcap_{j=1}^{n} \mathfrak{D}(A_j^{\alpha_j}),$$

$$A^{-\alpha} := A_1^{-\alpha_1} \circ \ldots \circ A_n^{-\alpha_n}, \qquad \mathfrak{D}(A^{-\alpha}) := \bigcap_{j=1}^{n} \mathfrak{D}(A_j^{-\alpha_j}),$$

більше того, $A_i^{\alpha_i} \circ A_j^{\alpha_j} = A_j^{\alpha_j} \circ A_i^{\alpha_i}$ на $\mathfrak{D}(A^{\alpha})$ і $A_i^{-\alpha_i} \circ A_j^{-\alpha_j} = A_j^{-\alpha_j} \circ A_i^{-\alpha_i}$ на $\mathfrak{D}(A^{-\alpha})$ для всіх $i, j = 1, \ldots, n$;

3) кожен простір $\mathfrak{D}^{\alpha} = \mathfrak{D}(A^{\alpha}) \cap \mathfrak{D}(A^{-\alpha})$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, наділений нормою

$$\|x\|_{\mathfrak{D}^{\alpha}} = \sum_{-\alpha \preccurlyeq \mu \preccurlyeq \alpha} \|A^{\mu} x\|_{\mathfrak{D}},$$

є повним, оскільки звуження на $\mathfrak{D}$ всіх $A_j^{\pm\alpha_j}$ є обмеженими операторами, що комутують між собою.

Визначимо простір $\mathfrak{A} := \bigcap \big\{\mathfrak{D}^\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\big\}$ і наділимо його топологією проективної границі $\varprojlim \mathfrak{D}^\alpha$ відносно включень $\mathfrak{D}^\alpha \looparrowright \mathfrak{D}^\mu$ для всіх $\mu \preccurlyeq \alpha$. Зауважимо, що при цьому $\mathfrak{A}$ стає простором Фреше.

Лема 3. *Нехай $U = \{e^{-tA} : t \in \mathbb{R}_+^n\}$ — обмежена аналітична напівгрупа над комплексним банаховим простором E. Підпростір $\mathfrak{A}$ є інваріантним відносно дії операторів e^{-tA} для довільного $t \in \mathbb{R}_+^n$, крім того, він щільний в E.*

Доведення. Перетин образів $\bigcap_{t\in\mathbb{R}_+^n} \mathfrak{R}(e^{-tA})$ міститься в $\mathfrak{A}$ [17] (теорема X.53). Звідси маємо

$$A^{-\alpha}e^{-tA}A^\alpha x = A^{-\alpha}A^\alpha e^{-tA}x = e^{-tA}x = e^{-tA}A^{-\alpha}A^\alpha x.$$

Тому $A^{-\alpha}e^{-tA}x = e^{-tA}A^{-\alpha}x$ для всіх елементів $x \in \mathfrak{D}(A^\alpha)$ і $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $t \in \mathbb{R}_+^n$. Отже, $\mathfrak{A}$ є інваріантним відносно дії операторів e^{-tA} для кожного $t \in \mathbb{R}_+^n$.

Для спрощення доведення припустимо, що резольвентні множини $\rho(A_j)$ і $\rho(A_j^{-1})$ містять $(0,\infty)$ та існує така константа $C > 0$, що

$$\sup_{t_j>0} \big\| t_j(t_j + A_j^{\pm 1})^{-1} \big\| \le C, \quad j = 1,\ldots,n. \tag{5}$$

Зауважимо, що звідси, зокрема, випливає, що маргінальні напівгрупи, що генеруються операторами A_j та A_j^{-1}, є аналітичними [4].

Перевіримо, що вкладення $\mathfrak{D}^\alpha \looparrowright \mathfrak{D}$ є щільним. Очевидною є рівність

$$t_j(t_j + A_j)^{-1}x + 1/t_j\big[t_j(t_j + A_j)^{-1}\big]A_jx = x.$$

Підставляючи її саму в себе багато разів, отримуємо

$$\big[t_j(t_j + A_j)^{-1}\big]^{\alpha_j}x + \frac{1}{t_j}\sum_{m=1}^{\alpha_j}\big[t_j(t_j + A_j)^{-1}\big]^m A_jx = x.$$

З припущення (5) та щільності вкладення $\mathfrak{D}(A_j) \looparrowright E$ випливає, що

$$\lim_{t_j\to\infty} \big[t_j(t_j + A_j)^{-1}\big]^{\alpha_j}x = x \qquad \text{для всіх} \quad x \in E.$$

Отже, вкладення $\mathfrak{D}(A_j^{\alpha_j}) \looparrowright E$ є щільним для всіх $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $j = 1,\ldots,n$. Беручи до уваги те, що кожен обернений оператор A_j^{-1} також генерує аналітичну маргінальну напівгрупу (див. [4]), аналогічно отримуємо щільне вкладення $\mathfrak{D}(A_j^{-\alpha_j}) \looparrowright E$. Як наслідок всі вкладення $\mathfrak{D}^\alpha \looparrowright E$ є щільними. Замінивши в попередніх міркуваннях E на $\mathfrak{D}^\mu$ при $\mu \preccurlyeq \alpha$, одержимо щільне вкладення $\mathfrak{D}^\alpha \looparrowright \mathfrak{D}^\mu$.

Для продовження доведення нам знадобиться теорема Ріхтера (див. [6], теорема 1.1, або [18]):

Нехай $\big\{E_k : k \in \mathbb{Z}\big\}$ — такі банахові простори, що всі вкладення $E_{k+1} \looparrowright E_k$ є неперервними та щільними. Тоді вкладення $\bigcap \big\{E_k : k \in \mathbb{Z}\big\} \looparrowright E_0$ є щільним.

Застосовуючи цю теорему до послідовності $\big\{E_k = \mathfrak{D}^\alpha : \alpha = (k,\ldots,k), k \in \mathbb{Z}\big\}$, переконуємося, що вкладення $\mathfrak{A} = \bigcap \big\{E_k : k \in \mathbb{Z}\big\} \looparrowright E_0 = E$ є щільним.

Лему 3 доведено.

Позначимо через $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$ простір необмежених лінійних операторів над E, що мають спільну область визначення $\mathfrak{A}$ і діють з $\mathfrak{A}$ в E неперервно. Простір $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$ наділимо сильною операторною топологією.

Оскільки за лемою 3 правильним є включення $e^{-tA}\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}$ для кожного $t \in \mathbb{R}^n_+$, то композиція $B \circ e^{-tA}$ належить $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$ для довільного оператора $B \in \mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$. Комутативну підалгебру

$$\big\{B \in \mathscr{L}(\mathfrak{A}, E) \colon e^{-tA} \circ B = B \circ e^{-tA}\, \forall t \in \mathbb{R}^n_+\big\}$$

називають комутантом напівгрупи $\{e^{-tA} \colon t \in \mathbb{R}^n_+\}$.

Теорема 1. *Відображення*

$$\varPhi \colon \widehat{S'_+} \ni \widehat{f} \longmapsto \widehat{f}(A) \in \mathscr{L}(\mathfrak{A}, E), \qquad \text{де} \quad \widehat{f}(A)x = \big\langle f(t), e^{-tA}x\big\rangle, \quad x \in \mathfrak{A}, \tag{6}$$

здійснює неперервний гомоморфізм із мультиплікативної алгебри аналітичних функцій $\widehat{S'_+}$ у комутант напівгрупи $\{e^{-tA} \colon t \in \mathbb{R}^n_+\}$. Оператори з образу $\varPhi\big[\widehat{S'_+}\big]$ задовольняють рівність

$$\widehat{f * g}(A) = \widehat{f}(A) \circ \widehat{g}(A), \qquad f, g \in S'_+,$$

і $\widehat{\delta}_0(A) = I$ — одиничний оператор.

Доведення. З [17] (теорема X.53) випливає, що для довільної обмеженої аналітичної напівгрупи $\{e^{-tA} \colon t \in \mathbb{R}^n_+\}$ існує така стала $M_0 > 0$, що нерівність

$$\big\|(tA)^\alpha e^{-tA}x\big\| \le M_0\|x\|$$

справджується для всіх $x \in E$, $t \in \mathbb{R}^n_+$ та $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$.

Очевидно, що для довільного $\gamma \in \mathbb{Z}^n_+$ існує така стала K_γ, що виконується нерівність $(1+t)^\gamma \le K_\gamma(1+t^\gamma)$ для всіх $t \in \mathbb{R}^n_+$. Зауважимо, що $t^\mu/(1+t)^\mu \le 1$ для всіх $t \in \mathbb{R}^n_+$ і $\mu \in \mathbb{Z}^n_+$.

Перевіримо, що відображення (6) задано коректно. Для довільного фіксованого $x \in E$ позначимо через ω_x E-значну функцію

$$\omega_x \colon \mathbb{R}^n_+ \ni t \longmapsto e^{-tA}x \in E.$$

З викладеного вище випливає, що нерівності

$$\begin{aligned}
\big\|\omega_x\big\|_{S^{\alpha,\beta}_+(E)} &= \max_{\substack{0\preccurlyeq\mu\preccurlyeq\alpha\\ 0\preccurlyeq\nu\preccurlyeq\beta}} \sup_{t\in\mathbb{R}^n_+} \big\|t^\mu\partial^\nu e^{-tA}x\big\| \le \max_{\substack{0\preccurlyeq\mu\preccurlyeq\alpha\\ 0\preccurlyeq\nu\preccurlyeq\beta}} \sup_{t\in\mathbb{R}^n_+} \big\|t^\mu A^\nu e^{-tA}x\big\|_{\mathfrak{D}} = \\
&= \max_{\substack{0\preccurlyeq\mu\preccurlyeq\alpha\\ 0\preccurlyeq\nu\preccurlyeq\beta}} \sup_{t\in\mathbb{R}^n_+} \left\|\frac{t^\mu}{(1+t)^\mu}(1+t)^\mu A^\nu e^{-tA}x\right\|_{\mathfrak{D}} \le \max_{\substack{0\preccurlyeq\mu\preccurlyeq\alpha\\ 0\preccurlyeq\nu\preccurlyeq\beta}} \sup_{t\in\mathbb{R}^n_+} \big\|(1+t)^\mu A^\nu e^{-tA}x\big\|_{\mathfrak{D}} \le \\
&\le \max_{0\preccurlyeq\nu\preccurlyeq\gamma} \sup_{t\in\mathbb{R}^n_+} \big\|(1+t)^\gamma A^\nu e^{-tA}x\big\|_{\mathfrak{D}} \le K_\gamma \max_{0\preccurlyeq\nu\preccurlyeq\gamma} \sup_{t\in\mathbb{R}^n_+} \big\|(1+t^\gamma)A^\nu e^{-tA}x\big\|_{\mathfrak{D}} = \\
&= K_\gamma \max_{0\preccurlyeq\nu\preccurlyeq\gamma} \sup_{t\in\mathbb{R}^n_+} \big\|e^{-tA}A^\nu x + (tA)^\gamma e^{-tA}A^{\nu-\gamma}x\big\|_{\mathfrak{D}} \le \\
&\le K_\gamma M \max_{0\preccurlyeq\nu\preccurlyeq\gamma} \|A^\nu x\|_{\mathfrak{D}} + K_\gamma M_0 \max_{0\preccurlyeq\nu\preccurlyeq\gamma} \|A^{\nu-\gamma}x\|_{\mathfrak{D}} \le K_\gamma(M+M_0)\|x\|_{\mathfrak{D}^\gamma}
\end{aligned} \tag{7}$$

справджуються для всіх $x \in \mathfrak{D}^\gamma$, де $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ і $\gamma_j = \max\{\alpha_j, \beta_j\}$, $j = 1, \ldots, n$. Тому для кожного $x \in \mathfrak{A} = \bigcap \mathfrak{D}^\gamma$ функція ω_x належить простору $S_+(E)$.

За лемою 2 існує розклад

$$\omega_x = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes \varphi_j, \tag{8}$$

де $x_j \in E$ і $\varphi_j \in S_+$. Із абсолютної збіжності цього ряду в $S_+(E)$ випливає, що

$$\varLambda \circ \omega_x = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j x_j \otimes \varLambda\varphi_j,$$

де $\varLambda$ — оператор розширення з леми 1 (тут $\varLambda$ застосовано до скалярних функцій). Таким чином, дію

$$\langle f, \varLambda \circ \omega_x\rangle := \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j \langle f, \varLambda\varphi_j\rangle x_j$$

визначено коректно. Відомо, що це означення не залежить від подання у вигляді ряду (8). Оскільки носій розподілу $f \in S'_+$ міститься в $\mathbb{R}^n_+$, а оператор

$$\varLambda\colon S_+ \ni \varphi_j \longmapsto \varLambda\varphi_j \in S$$

змінює функцію φ_j поза межами $\mathbb{R}^n_+$, то це означення не залежить від $\varLambda$. Тому писатимемо

$$\langle f, \omega_x\rangle = \langle f(t), e^{-tA}x\rangle$$

замість $\langle f, \varLambda \circ \omega_x\rangle$. Отже, відображення (6) однозначно визначає лінійний оператор $\widehat{f}(A) \in \in \mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$.

Перевіримо його неперервність. Відомо (див. [14], IV.9.4, наслідок 1), що з ядерності простору S_+ випливає ізоморфізм $E \otimes_{\mathfrak{p}} S_+ \simeq \mathscr{L}(S'_+, E)$. Таким чином, з леми 2 отримуємо ізоморфізм

$$S_+(E) \simeq \mathscr{L}(S'_+, E). \tag{9}$$

Тому кожну функцію $\omega_x \in S_+(E)$, $x \in \mathfrak{A}$, можна розуміти як лінійний неперервний оператор

$$\Omega_x\colon S'_+ \ni f \longmapsto \langle f, \omega_x\rangle \in E, \qquad x \in \mathfrak{A},$$

що належить простору $\mathscr{L}(S'_+, E)$ згідно з (9). Отже, для кожної пари $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+$ існує така стала $C_{\alpha,\beta}$, що

$$\big\|\langle f, \omega_x\rangle\big\| \le C_{\alpha,\beta}\|f\|_{S^{\alpha,\beta}_+}\|\omega_x\|_{S^{\alpha,\beta}_+(E)}, \qquad x \in \mathfrak{A},$$

де $\|f\|_{S^{\alpha,\beta}_+}$ — норма звуження $f\big|_{S^{\alpha,\beta}_+}$. З нерівностей (7) випливає, що $\widehat{f}(A) \in \mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$. Остаточно, неперервність відображення $\varPhi$ випливає з неперервності перетворення Лапласа $L\colon S'_+ \longrightarrow \widehat{S'_+}$.

Перевіримо, що $\varPhi$ є алгебраїчним гомоморфізмом. Спочатку припустимо, що розподіл $g \in \in S'_+$ є регулярним, тобто лінійну форму $\langle g, \omega_x\rangle$ можна подати у вигляді інтеграла Бохнера. Використовуючи відомі властивості інтеграла, отримуємо

$$\widehat{f * g}(A)x = \langle f * g, \omega_x\rangle = \Big\langle f(t), \big\langle g(s), e^{-(s+t)A}x\big\rangle\Big\rangle =$$
$$= \big\langle f(t), e^{-tA}\big\langle g(s), e^{-sA}x\big\rangle\big\rangle = \big[\widehat{f}(A) \circ \widehat{g}(A)\big]x$$

для всіх $x \in \mathfrak{A}$. Лема 3 гарантує, що підпростір $\mathfrak{A}$ є інваріантним відносно дії операторів e^{-tA} для довільного $t \in \mathbb{R}^n_+$. Отже, композицію операторів в останній формулі визначено коректно. Оскільки згортка є комутативною в алгебрі S'_+, отримуємо

$$\widehat{f}(A) \circ \widehat{g}(A) = \widehat{g}(A) \circ \widehat{f}(A)$$

для довільного регулярного g. Наближаючи довільний розподіл $g \in S'_+$ регулярними та використовуючи неперервність відображення $\mathit{\Phi} \circ L$ з S'_+ в $\mathscr{L}(\mathfrak{A}, E)$, одержуємо потрібну властивість для всіх $f, g \in S'_+$.

Для функціонала Дірака $\delta_t \in S'_+$, зосередженого в точці $t \in \mathbb{R}^n_+$, із (6) отримаємо

$$\widehat{\delta_t}(A)x = e^{-tA}x \qquad \text{для всіх} \quad x \in \mathfrak{A}.$$

Таким чином, $\widehat{\delta_0}(A)$ — одиничний оператор на E. Для довільних $f \in S'_+$ та $t \in \mathbb{R}^n_+$ маємо

$$\widehat{f}(A) \circ e^{-tA} = \widehat{f}(A) \circ \widehat{\delta_t}(A) = \widehat{f * \delta_t}(A) = \widehat{\delta_t * f}(A) = \widehat{\delta_t}(A) \circ \widehat{f}(A) = e^{-tA} \circ \widehat{f}(A).$$

Отже, оператори з образу $\mathit{\Phi}\big[\widehat{S'_+}\big]$ належать комутанту напівгрупи $\{e^{-tA} \colon t \in \mathbb{R}^n_+\}$.

Теорему 1 доведено.

Гомоморфізм Φ з теореми 1 ми розуміємо як функціональне числення в алгебрі $\widehat{S'_+}$ аналітичних на $\mathbb{C}^n_+$ функцій.

***Приклад* 1.** Розглянемо випадок $n = 1$. Нехай A — деякий (ін'єктивний) генератор обмеженої аналітичної однопараметричної напівгрупи на банаховому просторі E. Визначимо узагальнені функції (див. [19], 4.8)

$$f_\sigma(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\theta(\tau)\tau^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)}, & \sigma > 0, \\ f'_{\sigma+1}(\tau), & \sigma \le 0, \end{cases}$$

де θ — характеристична функція півосі $\mathbb{R}_+$. Якщо $\sigma > 0$, то

$$\widehat{f_\sigma}(z) = \big\langle f_\sigma(\tau), e^{-\tau z} \big\rangle = \int\limits_0^\infty \frac{\tau^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} e^{-\tau z}\, d\tau \,\Bigg|_{\tau z = v} = \frac{1}{z^\sigma \Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty v^{\sigma-1} e^{-v}\, dv = \frac{\Gamma(\sigma)}{z^\sigma \Gamma(\sigma)} = z^{-\sigma}$$

для всіх $z \in \mathbb{C}_+$. Якщо $\sigma < 0$, то знайдеться таке натуральне число $\alpha \in \mathbb{N}$, що $\sigma + \alpha > 0$. Тоді

$$\widehat{f_\sigma}(z) = L\left[f^{(\alpha)}_{\sigma+\alpha}\right](z) = z^\alpha L\left[f_{\sigma+\alpha}\right](z) = z^\alpha z^{-(\sigma+\alpha)} = z^{-\sigma}, \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Якщо ж $\sigma = 0$, то $\widehat{f_0}(z) = \widehat{\delta_0}(z) \equiv 1$ для всіх $z \in \mathbb{C}_+$.

Таким чином, застосовуючи числення (6), для довільного $\sigma \in \mathbb{R}$ отримуємо

$$\widehat{f_\sigma}(A)x = \big\langle f_\sigma(\tau), e^{-\tau A}x \big\rangle =: A^{-\sigma}x, \quad x \in \mathfrak{A}.$$

Отже, використовуючи теорему 1, ми можемо визначити довільний дійсний степінь оператора над щільним підпростором $\mathfrak{A}$.

***Приклад* 2.** Нехай $E = L_2(\mathbb{R}^n)$ — простір квадратично інтегровних комплексних функцій $y \colon \mathbb{R}^n \ni \xi \longmapsto y(\xi)$ і

$$-A = D^2_\xi := \left(D^2_{\xi_1}, \ldots, D^2_{\xi_n}\right), \qquad \text{де} \quad D^2_{\xi_j} = \frac{\partial^2}{\partial {\xi_j}^2}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Розглянемо щільний підпростір $H_2(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n)$ квадратично інтегровних функцій, що мають ціле аналітичне продовження на $\mathbb{C}^n$. Відомо (див. [5]), що оператор D^2_ξ є ін'єктивним на $H_2(\mathbb{R}^n)$.

Розглянемо ядро Гаусса

$$\mathfrak{g}_t(\zeta) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{\pi t_j}}\, e^{-\frac{\zeta_j^2}{4t_j}}, \qquad \zeta \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \operatorname{int}\mathbb{R}_+^n.$$

Використовуючи відому рівність для гамма-функції

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathfrak{g}_t(\zeta)(-\zeta)^{2\alpha}\, d\zeta = \frac{2^n(2\alpha-1)!}{(\alpha-1)!} t^{\alpha}, \qquad \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

переконуємося, що рівності

$$e^{-tA}y(\xi) = e^{t_1 D_{\xi_1}^2 + \ldots + t_n D_{\xi_n}^2} y(\xi) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \frac{1}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!} \frac{\partial^{2|\alpha|}y(\xi)}{\partial\xi_1^{2\alpha_1}\ldots\partial\xi_n^{2\alpha_n}} t_1^{\alpha_1}\ldots t_n^{\alpha_n} =$$

$$= \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \frac{1}{(2\alpha)!} \frac{\partial^{2|\alpha|}y(\xi)}{\partial\xi^{2\alpha}} \frac{2^n(2\alpha-1)!}{(\alpha-1)!} t^{\alpha} = \sum_{\beta\in\mathbb{Z}_+^n} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|}y(\xi)}{\partial\xi^{\beta}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathfrak{g}_t(\zeta)(-\zeta)^{\beta}\, d\zeta =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathfrak{g}_t(\zeta) \sum_{\beta\in\mathbb{Z}_+^n} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|}y(\xi)}{\partial\xi^{\beta}} (-\zeta)^{\beta}\, d\zeta = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathfrak{g}_t(\zeta) y(\xi-\zeta)\, d\zeta = (\mathfrak{g}_t * y)(\xi) \tag{10}$$

справджуються для всіх $y \in H_2(\mathbb{R}^n)$. Оскільки підпростір $H_2(\mathbb{R}^n)$ є щільним в $L_2(\mathbb{R}^n)$, то дія операторів e^{-tA} може бути записана у вигляді перетворення Вейєрштрасса

$$e^{tD_\xi^2} y = (\mathfrak{g}_t * y)(\xi) \qquad \text{для всіх} \quad y \in L_2(\mathbb{R}^n).$$

Остаточно формула функціонального числення набере вигляду

$$\widehat{f}(-D_\xi^2)y(\xi) = \big\langle f(t), (\mathfrak{g}_t * y)(\xi)\big\rangle$$

для всіх $f \in S'_+$, $y \in W_2^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{A}$, де

$$W_2^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap \big\{W_2^{2\alpha}(\mathbb{R}^n) \colon \alpha \in \mathbb{Z}\big\}$$

є простором Соболєва нескінченного порядку (див. [5]).

5. Диференціальні властивості. У цьому пункті встановимо деякі диференціальні властивості операторів $\widehat{f}(A)$, що характерні для скалярного перетворення Лапласа.

Нехай виконуються всі припущення із п. 4. Позначимо через $\mathfrak{A}\otimes_{\mathfrak{p}} S_+$ підпростір в $E\otimes_{\mathfrak{p}} S_+ \simeq$ $\simeq S_+(E)$ функцій вигляду $x\colon \mathbb{R}_+^n \ni t \longmapsto x(t) \in \mathfrak{A}$. Визначимо підпростір $\widehat{\mathfrak{A}}$ банахового простору E

$$\widehat{\mathfrak{A}} := \big\{\widehat{x}_A \in E \colon x \in \mathfrak{A}\otimes_{\mathfrak{p}} S_+\big\}, \qquad \text{де} \quad \widehat{x}_A := \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} e^{-tA}x(t)\, dt.$$

Якщо $x = y\otimes\varphi$ при $y \in \mathfrak{A}$ і $\varphi \in S_+$, то $\widehat{x}_A = \widehat{\varphi}(A)y$, де $\widehat{\varphi}(A) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(t)e^{-tA}\, dt$. Зауважимо, що $\widehat{\varphi}(A)$ — обмежений лінійний оператор на E, визначений класичним функціональним численням Хілле – Філліпса [8] як значення перетворення Лапласа $\widehat{\varphi} = L[\varphi]$ на генераторі A.

Лема 4. *Підпростір* $\widehat{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}$ *є щільним в* E.

Доведення. Розглянемо $\mathfrak{A}$-значну функцію $x = y \otimes \varphi$, де $y \in \mathfrak{A}$ і $\varphi \in S_+$, що належить простору $\mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{p}} S_+$. З інтегрального зображення $\widehat{x}_A$ випливає

$$\|\widehat{x}_A\|_{\mathfrak{D}^\alpha} \leq M \|y\|_{\mathfrak{D}^\alpha} \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n_+)}$$

для всіх $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$. Отже, $\widehat{x}_A \in \mathfrak{A}$ для всіх $x = y \otimes \varphi$, де $y \in \mathfrak{A}$ і $\varphi \in S_+$.

Припустимо, що $\widehat{\mathfrak{A}}$ не є щільним в E. Тоді за теоремою Гана – Банаха знайдеться такий ненульовий функціонал $x' \in E'$, що $\langle x', \widehat{x}_A \rangle = 0$ для всіх $x = y \otimes \varphi$, де $y \in \mathfrak{A}$ і $\varphi \in S_+$. З відомих властивостей інтеграла Бохнера (див. [8], 3.7) випливає, що

$$\big\langle x', \widehat{x}_A \big\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \big\langle x', e^{-tA} y \big\rangle \varphi(t)\, dt = 0$$

для всіх $\varphi \in S_+$. Таким чином, для довільного $y \in \mathfrak{A}$ дійсна аналітична функція $t \longmapsto$ $\longmapsto \big\langle x', e^{-tA} y \big\rangle$ повинна тотожно дорівнювати нулеві на $\mathbb{R}^n_+$, в іншому випадку можна вибрати таку функцію $\varphi \in S_+$, щоб величина $\big\langle x', \widehat{x}_A \big\rangle$ була відмінною від нуля. Зокрема, для $t = 0$ рівність $\big\langle x', y \big\rangle = 0$ справджується для всіх $y \in \mathfrak{A}$. Підпростір $\mathfrak{A}$ є щільним в E за лемою 3. Звідси випливає $x' = 0$, що суперечить вибору функціонала x'.

Лему 4 доведено.

Формула функціонального числення з теореми 1 дозволяє встановити деякі нові диференціальні властивості операторів $\widehat{f}(A)$.

Теорема 2. *Для довільного* $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ *справджується рівність*

$$\widehat{\partial^\alpha f}(A)x = A^\alpha \widehat{f}(A)x, \quad x \in \mathfrak{A}.$$

Доведення. З леми 3 випливає, що $A^\alpha e^{-tA} x = e^{-tA} A^\alpha x$ для всіх $t \in \mathbb{R}^n_+$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ і $x \in \mathfrak{A}$. Тому

$$\widehat{\partial^\alpha f}(A)x = \big\langle \partial^\alpha f(t), e^{-tA} x \big\rangle = (-1)^{|\alpha|} \big\langle f(t), (-A)^\alpha e^{-tA} x \big\rangle =$$
$$= \big\langle f(t), e^{-tA} A^\alpha x \big\rangle = \widehat{f}(A) A^\alpha x = A^\alpha \widehat{f}(A)x.$$

Теорему 2 доведено.

Для кожної функції $x \colon \mathbb{R}^n_+ \ni t = (t_1, \ldots, t_n) \longmapsto x(t_1, \ldots, t_n) \in \mathfrak{A}$, що належить $\mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{p}} S_+$, визначимо $\mathfrak{A}$-значні функції $\widetilde{x}_{A_j} : \mathbb{R}_+ \ni \tau \longmapsto \widetilde{x}_{A_j}(\tau) \in \mathfrak{A}$, $j = 1, \ldots, n$, таким чином:

$$\widetilde{x}_{A_j}(\tau) := \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_+} e^{-tA} x(t)\, d\check{t}_j,$$

де $d\check{t}_j := dt_1 \ldots dt_{j-1}\, dt_{j+1} \ldots dt_n$, $j = 1, \ldots, n$. Зауважимо, що інтеграл в останній формулі ми розуміємо в такому сенсі:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_+} e^{-tA} x(t)\, d\check{t}_j = e^{-\tau A_j} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_+} e^{-\sum_{k=1}^{j-1} t_k A_k - \sum_{k=j+1}^{n} t_k A_k} x(t_1, \ldots, t_{j-1}, \tau, t_{j+1}, \ldots, t_n)\, d\check{t}_j.$$

Теорема 3. *Для довільного $\alpha \in \mathbb{N}$ і всіх $j = 1, \ldots, n$ справджуються рівності*

$$\widehat{f}(A)\widehat{\partial_j^\alpha x}_A = A_j^\alpha \widehat{f}(A)\widehat{x}_A - \sum_{r=0}^{\alpha-1} A_j^{\alpha-r-1}\widehat{f}(A)\widetilde{\partial_j^r \Lambda x}_{A_j}(0), \quad \widehat{x}_A \in \widehat{\mathfrak{A}}. \tag{11}$$

Доведення. З леми 4 випливає, що оператор $\widehat{f}(A)$ в рівностях (11) є щільно заданим. Виберемо довільний елемент $x \in \mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{p}} S_+ \subset S_+(E)$. Тоді з означення простору $S_+(E)$ для довільного $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ отримуємо

$$\lim_{t_j \uparrow \infty} \partial_j^\alpha x(t_1, \ldots, t_n) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Більше того, з леми 1 маємо

$$\lim_{t_j \downarrow 0} \partial_j^\alpha x(t_1, \ldots, t_n) = (\partial_j^\alpha \Lambda x)(t_1, \ldots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \ldots, t_n).$$

З обмеженості та неперервності напівгрупи $\{e^{-tA} : t \in \mathbb{R}_+^n\}$ випливає, що

$$\lim_{t_j \uparrow \infty} e^{-tA}\partial_j^\alpha x(t) = 0 \quad \text{і} \quad \lim_{t_j \downarrow 0} e^{-tA}\partial_j^\alpha x(t_1, \ldots, t_n) = (\partial_j^\alpha \Lambda x)(t_1, \ldots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \ldots, t_n)$$

для всіх $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ і $j = 1, \ldots, n$. Інтегруючи частинами за змінною t_j і використовуючи останні рівності, отримуємо

$$\int_0^\infty e^{-t_j A_j}\partial_j^1 x(t)\, dt_j = A_j \int_0^\infty e^{-t_j A_j} x(t)\, dt_j + \lim_{t_j \uparrow \infty} e^{-t_j A_j} x(t) - \lim_{t_j \downarrow 0} e^{-t_j A_j} x(t) =$$

$$= A_j \int_0^\infty e^{-t_j A_j} x(t)\, dt_j - (\Lambda x)(t_1, \ldots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \ldots, t_n).$$

Продовжуючи рекурсивно та інтегруючи за іншими змінними, маємо

$$\widehat{\partial_j^\alpha x}_A = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-tA}\partial_j^\alpha x(t)\, dt = A_j^\alpha \widehat{x}_A - \sum_{r=0}^{\alpha-1} A_j^{\alpha-r-1} \lim_{t_j \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} e^{-tA}\partial_j^r x(t)\, d\check{t}_j =$$

$$= A_j^\alpha \widehat{x}_A - \sum_{r=0}^{\alpha-1} A_j^{\alpha-r-1}\widetilde{\partial_j^r \Lambda x}_{A_j}(0).$$

Залишилось подіяти розподілом $f \in S'_+$ на обидві частини останньої рівності і застосувати теорему 1. В результаті отримаємо

$$\widehat{f}(A)\widehat{\partial_j^\alpha x}_A = \langle f(t), e^{-tA}A_j^\alpha \widehat{x}_A\rangle - \sum_{r=0}^{\alpha-1}\left\langle f(s), e^{-sA}A_j^{\alpha-r-1} \lim_{t_j \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} e^{-tA}\partial_j^r x(t)\, d\check{t}_j \right\rangle =$$

$$= A_j^\alpha \widehat{f}(A)\widehat{x}_A - \sum_{r=0}^{\alpha-1} A_j^{\alpha-r-1}\widehat{f}(A)\widetilde{\partial_j^r \Lambda x}_{A_j}(0).$$

Теорему 3 доведено.

***Приклад* 3.** Розглянемо генератор $A = -D_\xi^2$ напівгрупи (10), визначеної на просторі Соболєва $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$ (див. приклад 2).

Нехай $x \in S_+$ і $y \in W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$ — довільні функції. Для кожної функції

$$w\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^n \ni (\xi, t) \longmapsto w(x,t) := y(\xi)x(t) \in \mathbb{C},$$

що належить простору $W_2^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes_{\mathfrak{p}} S_+$, маємо

$$\widehat{\partial_j^1 w}_A(\xi) = D_{\xi_j}^2 \widehat{w}_A(\xi) - \widetilde{w}_{A_j}(\xi), \quad j = 1, \ldots, n,$$

де функції $\widehat{\partial_j^1 w}_A$, $\widehat{w}_A$ з простору Соболєва $W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$ мають вигляд

$$\widehat{\partial_j^1 w}_A(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} (\mathfrak{g}_t * y)(\xi) \partial_j^1 x(t)\, dt, \qquad \widehat{w}_A(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} (\mathfrak{g}_t * y)(\xi) x(t)\, dt,$$

а функцію $\widetilde{w}_{A_j} \in W_2^\infty(\mathbb{R}^n)$ можна подати у вигляді

$$\widetilde{w}_{A_j}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n-1}} (\mathfrak{g}_t * y)(\xi) \check{x}_j(t)\, d\check{t}_j, \quad \text{де} \quad \check{x}_j(t) := x(t_1, \ldots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \ldots, t_n).$$

Застосувавши формулу (11), отримаємо

$$\widehat{f}(A)\widehat{\partial_j^1 w}_A(\xi) = D_{\xi_j}^2 \widehat{f}(A)\widehat{w}_A(\xi) - \big\langle f(t), (\mathfrak{g}_t * \widetilde{w}_{A_j})(\xi) \big\rangle, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

1. *Arendt W., Batty Ch. J. K., Hieber M., Neubrander F.* Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems // Monogr. Math. – Berlin: Birkhäser-Verlag, 2011. – Vol. 96. – 540 p.
2. *Berg C., Boyadzhiev K., Delaubenfels R.* Generation of generators of holomorphic semigroups // J. Austral. Math. Soc. – 1993. – **55**, № 2. – P. 246 – 269.
3. *Butzer P. L., Berens H.* Semi-groups of operators and approximation. – Berlin: Springer-Verlag, 1967.
4. *Delaubenfels R.* Inverses of generators // Proc. Amer. Math. Soc. – 1988. – **104**. – P. 443 – 448.
5. *Dubinskij J. A.* Sobolev spaces of infinite order and differential equations. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1986.
6. *Горбачук В. И., Князюк А. В.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений // Успехи мат. наук. – 1989. – **4**, № 3. – С. 55 – 91.
7. *Haase M.* The functional calculus for sectorial operators. – Berlin: Birkhäuser, 2006. – 391 p.
8. *Hille E., Phillips R.* Functional analysis and semi-groups. – New York: AMS Coll. Publ., 1957. – Vol. 31. – 808 p.
9. *Лопушанский О. В., Шарин С. В.* Обобщенное функциональное исчисление типа Хилле – Филлипса для многопараметрических полугрупп // Сиб. мат. журн. – 2014. – **55**, № 1. – С. 131 – 146.
10. *Lopushansky O., Sharyn S.* Operators commuting with multi-parameter shift semigroups // Carpath. J. Math. – 2014. – **30**, № 2. – P. 217 – 224.
11. *Миротин А. Р.* О некоторых свойствах многомерного функционального исчисления Бохнера – Филлипса // Сиб. мат. журн. – 2011. – **52**, № 6. – С. 1300 – 1312.
12. *Nelson E. A.* Functional calculus using singular Laplace integrals // Trans. Amer. Math. Soc. – 1958. – **88**. – P. 400 – 413.
13. *Phillips R. S.* Spectral theory for semigroups of linear operators // Trans. Amer. Math. Soc. – 1951. – **71**. – P. 393 – 415.
14. *Schaefer H.* Topological vector spaces. – Berlin: Springer-Verlag, 1971. – 294 p.
15. *Schwartz L.* Espaces de fonctions différentielles $\grave{a}$ valeurs vectorielles // J. Anal. Math. – 1954/55. – **4**. – P. 88 – 148.
16. *Seeley R. T.* Extensions of C^∞-functions defined in a half-space // Proc. Amer. Math. Soc. – 1964. – **15**. – P. 625 – 626.
17. *Reed M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics. – New York: Acad. Press, 1975. – Vol. II. – 361 p.
18. *Richter P.* Unitary representations of countable inifinite dimensional Lie groups. – Leipzig Univ., 1977.
19. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
20. *Vrabie I. I.* C_0-semigroup and applications. – New York; Amsterdam: Elsevier, 2003.
21. *Жаринов В. В.* Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS // Успехи мат. наук. – 1979. – **34**. – С. 97 – 131.

Одержано 23.12.14