УДК 517.518.12

С. К. Абдуллаев, Э. А. Маммадов (Бакин. гос. ун-т, Азербайджан)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СУБАДДИТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОБОБЩЕННЫМ СДВИГОМ

We establish strong and weak Hardy – Littlewood – Sobolev inequalities for the subadditive operators majorized by operators from a certain class of integral convolutions of the Riesz-potential type with almost monotone kernels generated both by operators of ordinary shift and by operators of generalized shift associated with the differential Laplace – Bessel operator.

Досліджується задача встановлення сильних і слабких нерівностей типу нерівностей Гарді – Літтлвуда – Соболєва для субадитивних операторів, що мажоруються операторами з певного класу інтегральних згорток типу потенціалів Рісса, з майже монотонними ядрами, породженими операторами як звичайного, так і узагальненого зсуву, асоційованого з диференціальним оператором Лапласа – Бесселя.

Введение. Изучение уравнений в частных производных, содержащих дифференциальный оператор Лапласа – Бесселя $\Delta_{B_{m+k,k}}$, с использованием многомерного преобразования Фурье – Бесселя было начато в работах И. А. Киприянова (см. [1]). Для дальнейших исследований им были введены весовые пространства $L_{p,v}$. Конструкция фундаментальных решений B-эллиптических уравнений была дана в работах И. А. Киприянова и Л. А. Иванова [2], где доказано, что решением уравнения $\Delta_{B_{m+k,k}} u(x) = f(x)$ является интегральный оператор типа цилиндрического потенциала

$$u(x) \equiv I_B^2(f)(x) = \int\limits_{R^+_{m+k,k}} |y|^{2-n-|\gamma_{k,m+k}|} T^y f(x) y^{\gamma_{k,m+k}} dy,$$

называемого обобщенным потенциалом Рисса, который содержит преобразование T^y, в одномерном случае введенный Б. М. Левитаном [3] и называемый оператором обобщенного или бесселева сдвига.

И. А. Киприяновым и М. И. Ключанцевым [4] задача получения априорных оценок, по существу, сведена к оценкам этих обобщенных потенциалов Рисса и их соответствующих производных.

Отметим, что оценка интегралов типа потенциала (т. е. обобщающие одномерные неравенства Харди – Литтлвуда) является одним из основных элементов метода интегральных представлений, разработанного впервые С. Л. Соболевым (см. [5]).

Неравенства типа Харди – Литтлвуда – Соболева для B-потенциала Рисса I_B^α, $\alpha > 0$, в шкале пространств $L_{p,v}$ получены в работе А. Д. Гаджиева и И. А. Алиева [6]. В направлении установления оценок типа Харди – Литтлвуда – Соболева для интегральных операторов B-гармонического анализа в различных метриках особое место занимают работы В. С. Гулиева и его учеников (см. [7 – 10]).

Впервые в работах С. К. Абдуллаева и З. А. Дамировой [11], С. К. Абдуллаева и Б. К. Агарзаева [12] эти оценки распространены на случай потенциалов Рисса с нестепенными ядрами в случаях обычного и обобщенного сдвига T^y соответственно.

В настоящей статье для субаддитивных операторов, мажорирующихся операторами определенного класса интегральных сверток типа потенциалов Рисса, с почти монотонными ядрами, порожденными оператором обобщенного сдвига T^y, доказаны теоремы типа теоремы Харди – Литтлвуда – Соболева.

Как известно, обобщенные потенциалы Рисса – Бесселя (даже обычные потенциалы Рисса, см. [13]) с нестепенными ядрами не действуют, вообще говоря, в шкале $L_{p,v}$ пространств.

Некоторые обозначения и основная теорема. Пусть R^n — евклидово пространство размерности $n,\ m > 0,\ k \geq 1$ — целые числа, $p \geq 1,\ R^+_{m+k,k} = \big\{(x_1, \ldots, x_{m+k}) \in R^{m+k}:$ $x_{m+i} > 0,\ i = 1, \ldots, k\big\}$,

$$T^S\big(u(x)\big) = c_v \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi u\left(x' - s', (x_{m+1}, s_{m+1})_{\alpha_1}, \ldots, (x_{m+k}, s_{m+k})_{\alpha_k}\right) \times$$

$$\times \sin^{v_{m+1}-1} \alpha_1 \ldots \sin^{v_{m+k}-1} \alpha_k d\alpha_1 \ldots d\alpha_k$$

— оператор обобщенного сдвига, порожденный оператором Лапласа – Бесселя:

$$\Delta_{B_{m+k,k}}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \sum_{j=m+1}^{m+k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\gamma_j}{x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

$$x \in R^+_{m+k,k}, \quad \gamma_{m+1} > 0, \ldots, \gamma_{m+k} > 0,$$

$$x = (x', x_{m+1}, \ldots, x_{m+k}), \qquad s = (s', s_{m+1}, \ldots, s_{m+k}), \quad x', s' \in R_m,$$

$$(x_{m+i}, s_{m+i})_{\alpha_i} = \sqrt{x^2_{m+i} - 2x_{m+i}s_{m+i}\cos\alpha_i + s^2_{m+i}},$$

$$|\gamma| = \sum_{i=1}^k \gamma_{m+i}, \quad a = m + k + |\gamma|,$$

C_v — нормирующий множитель, $L^\Phi_v\Big(R^+_{m+k,k}\Big)$ — пространство Орлича [14], определенное N-функцией Φ,

$$\|f\|_{L^\Phi_v(R^+_{m+k,k})} = \inf\left\{\lambda > 0\colon \int\limits_{R^+_{m+k,k}} \Phi\left(|f(x)|/\lambda\right) d\mu(y) \leq 1\right\},$$

$$d\mu(y) = y^{\gamma_{k,m+k}} dy = y^{\gamma_{m+1}}_{m+1} \ldots y^{\gamma_{m+k}}_{m+k} dy_1 \ldots dy_{m+k}.$$

Если $\Phi(t) = |t|^p,\ t > 0$ и $1 \leq p < +\infty$, то $L^\Phi_v\big(R^+_{m+k,k}\big)$ — пространство

$$L_{p,\gamma}\Big(R^+_{m+k,k}\Big) = \left[f : \|f\|_{L_{p,\gamma}(R^+_{m+k,k})} = \left(\int\limits_{R^+_{m+k,k}} |f(y)|^p d\mu(y)\right)^{1/p} < +\infty\right].$$

Пусть $\Omega_{p,\alpha}\big(\widetilde{\Omega}_{p,\alpha}\big),\ p\geq 1,\ \alpha>0,$ — совокупность функций $\omega\colon(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ таких, что $\omega(t)$ возрастает (почти возрастает), $t^{-\frac{\alpha}{p}+\varepsilon}\omega(t)$ убывает (почти убывает) при малых $\varepsilon>0$ и сходится интеграл $\int\limits_0 \omega(t)t^{-1}dt$[1].

Очевидно, $\Omega_{p,\alpha}\subset\Omega_{1,\alpha},\ \widetilde{\Omega}_{p,\alpha}\subset\widetilde{\Omega}_{1,\alpha}$, и если $\omega\in\widetilde{\Omega}_{p,\alpha}$, то $\omega\,(2t)\leq C\omega(t)$.

Определение. *Скажем, что субаддитивный оператор A принадлежит классу $K_\gamma\big(p,\widetilde{\Omega}_{p,\alpha}\big)$, если*:

1) *$Af(x)$ существует почти для всех $x\in R^+_{m+k,k}$, если f принадлежит $L_{p,\gamma}\big(R^+_{m+k,k}\big)$;*

2) *существуют $\omega\in\tilde{\Omega}_{p,\alpha}$ и $C>0$ такие, что*

$$\big|Af(x)\big|\leq C\int\limits_{R^+_{m+k,k}} T^y\big(|f(x)|\big)\omega\big(|y|\big)|y|^{-(m+k+|\gamma|)}d\mu(y).$$

Пусть $\omega\in\tilde{\Omega}_{p,\alpha},\ \alpha=m+k+|\gamma|$. Тогда:

1. Обобщенный потенциал Рисса

$$I_B^\omega(f)(x)=\int\limits_{R^+_{m+k,k}} T^y f(x)\omega\big(|y|\big)|y|^{-(m+k+|\upsilon|)}d\mu(y)$$

принадлежат классу $K_\gamma\big(p,\widetilde{\Omega}_{p,\alpha}\big)$. Это непосредственно следует из определения $K_\gamma\big(p,\widetilde{\Omega}_{p,\alpha}\big)$.

2. Обобщенный потенциал Бесселя

$$(J_B^\omega f)(x)=\int\limits_{R^+_{m+k,k}} T^y f(x)G_\gamma^\omega(y)d\mu(y),\qquad G_\gamma^\omega(x)=c_\gamma^\omega\int\limits_0^{+\infty}\frac{\omega(\delta^{1/2})}{\delta^{(m+k+|\gamma|)/2}}e^{-\frac{\delta}{4\pi}-\frac{|x|^2\pi}{\delta}}\frac{d\delta}{\delta},$$

где c_γ^ω — нормирующий множитель такой, что $\|G_\gamma^\omega\|_{1,\gamma}=1$, также принадлежит классу $K_\gamma\big(p,\tilde{\Omega}_{p,\alpha}\big)$.

Ядро $G_\gamma^\omega(x)$ представим в виде $G_\gamma^\omega(x)=G_1(x)+G_2(x)$, где

$$G_1(x)=\begin{cases}G_\gamma^\omega(x), & |x|<1,\\ 0, & |x|\geq 1,\end{cases}\qquad\text{и}\qquad G_2(x)=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ G_\gamma^\omega(x), & |x|\geq 1.\end{cases}$$

Тогда

$$J_B^\omega f=G_1*f+G_2*f.$$

Докажем справедливость следующих асимптотических равенств:

$$G_1^\omega(x)=C_1\frac{\omega\big(|x|\big)}{|x|^{m+r+|\gamma|}}+o\left(\frac{\omega\big(|x|\big)}{|x|^{m+r+|\gamma|}}\right)\tag{1}$$

при $|x|\to 0,\ \omega\in\widetilde{\Omega}_{1,\alpha},\ \alpha=m+k+|\gamma|$, и

[1]Положительная функция $g(t)$ почти убывает (почти возрастает) на множестве $X\subset(0;+\infty)$, если существует постоянная $c_g^\uparrow>0$ ($c_g^\downarrow>0$) такая, что $t_1<t_2,\ g(t_2)\leq c_g^\uparrow g(t_1)$ $\big(g(t_1)\leq c_g^\downarrow g(t_2)\big)$ для любых $t_1,t_2\in X$.

$$G_2^{\omega}(x) = O\big(e^{-|x|/2}\big) \quad \text{при} \quad |x| \to +\infty. \tag{2}$$

Пусть $|x| \le 1$. Рассмотрим

$$G_\gamma^{\omega}(x) = c_\gamma^{\omega}\left(\int\limits_0^{|x|^2} + \int\limits_{|x|^2}^{2|x|^2} + \int\limits_{2|x|^2}^{+\infty}\right) \frac{\omega\left(\delta^{1/2}\right)}{\delta^{\alpha/2}} e^{-\frac{\delta}{4\pi}-\frac{|x|^2\pi}{\delta}} \frac{d\delta}{\delta} = c_\gamma^{\omega}(i_1+i_2+i_3).$$

Поскольку $e^{-\delta/4\pi} = 1 + o(1),\ \delta \to 0$, вследствие $\omega(\delta)$ $\Bigg($производя замену переменных $\dfrac{|x|^2}{\delta} = t\Bigg)$ имеем

$$i_1 \le C\omega\big(|x|\big)\int\limits_0^{|x|^2} \frac{1}{\delta^{\alpha/2}} e^{-\frac{|x|^2\pi}{\delta}} \frac{d\delta}{\delta} = C\omega\big(|x|\big)\int\limits_1^{+\infty} \frac{t^{\beta/2}}{|x|^{\alpha}} e^{-t\pi}\frac{dt}{t} \sim C\frac{\omega\big(|x|\big)}{|x|^{\alpha}}.$$

Аналогично, используя условие $\omega \in \tilde{\Omega}_{1,\gamma}$, получаем

$$i_3 \le C\frac{\omega\big(|x|\big)}{|x|^{\alpha-\varepsilon}}\int\limits_{2|x|^2}^{+\infty} e^{-\frac{\delta}{4\pi}}\frac{1}{\delta^{\varepsilon}}\frac{d\delta}{\delta} \sim \frac{\omega\big(|x|\big)}{|x|^{\alpha}}.$$

Далее

$$i_2 \le C\frac{\omega\big(|x|\big)}{|x|^{\alpha-\varepsilon}}\int\limits_{|x|^2}^{2|x|^2} e^{-\frac{\delta}{4\pi}}\frac{1}{\delta^{\varepsilon}}\frac{d\delta}{\delta} \sim \frac{\omega\big(|x|\big)}{|x|^{\alpha}}\int\limits_{|x|^2}^{2|x|^2}\frac{d\delta}{\delta} \sim \frac{\omega\big(|x|\big)}{|x|^{\alpha}}$$

и

$$i_2 \ge C\omega\big(|x|\big)\int\limits_{|x|^2}^{2|x|^2} e^{-\frac{\delta}{4\pi}}\frac{1}{\delta^{\alpha/2}}\frac{d\delta}{\delta} \sim \frac{\omega\big(|x|\big)}{|x|^{\alpha}}\int\limits_{|x|^2}^{2|x|^2}\frac{d\delta}{\delta} \sim \frac{\omega\big(|x|\big)}{|x|^{\alpha}},$$

т. е. $i_2 \sim \dfrac{\omega\big(|x|\big)}{|x|^{\alpha}}$. Тем самым доказано равенство (1).

С учетом того, что функция $A(\delta) = e^{-\frac{\delta}{4\pi}-\frac{|x|^2\pi}{\delta}}\delta > 0$ и наибольшее значение принимает в точке $\delta = 2\pi x$, имеем

$$e^{-\frac{\delta}{4\pi}-\frac{|x|^2\pi}{\delta}} \le e^{-\frac{2\pi|x|}{4\pi}-\frac{|x|^2\pi}{2\pi|x|}} = e^{-\frac{|x|}{2}-\frac{|x|}{2}} = e^{-|x|}.$$

С другой стороны, если $|x| \ge 1$, то

$$e^{-\frac{|x|^2\pi}{\delta}}e^{-\frac{\delta}{4\pi}} \le e^{-\frac{\pi}{\delta}}e^{-\frac{\delta}{4\pi}}.$$

Объединяя два последних неравенства при $|x| \ge 1$, получаем

$$e^{-\frac{|x|^2\pi}{\delta}}e^{-\frac{\delta}{4\pi}} \le e^{-\frac{|x|}{2}}e^{-\frac{\pi}{2\delta}}e^{-\frac{\delta}{8\pi}}$$

$$\Big((a \leq b \ \wedge \ a \leq c) \Rightarrow a^2 \leq bc \Leftrightarrow a \leq \sqrt{bc}\Big).$$

Тогда

$$G_\gamma^\omega(x) \leq c_\gamma^\omega e^{-|x|/2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\omega\left(\delta^{1/2}\right)}{\delta^{(m+k+|\gamma|)/2}} e^{-\frac{\pi}{2\delta}} e^{-\frac{\delta}{8\pi}} \frac{d\delta}{\delta} \leq C e^{-|x|/2},$$

что доказывает равенство (2).

Таким образом, мы доказали, что J_B^ω принадлежит $K_\gamma\big(p, \tilde{\Omega}_{p,\alpha}\big)$.

Теперь введем обобщенную B-дробно-максимальную функцию

$$M_\gamma^\omega f(x) = \sup_{r>0} \frac{\omega\left(\big|B(0,r)\big|_\gamma^{1/\alpha}\right)}{\big|B(0,r)\big|_\gamma} \int\limits_{B(0,r)} T^y \, |f(x)| \, d\mu(y).$$

Покажем, что если $\omega \in \widetilde{\Omega}_{p,\alpha}$, то M_γ^ω принадлежит $K_\gamma\big(p, \tilde{\Omega}_{p,\alpha}\big)$.

Легко убедиться, что

$$\big|B(0,r)\big|_\gamma = \int\limits_{B(0,r)} d\mu(y) = C \int\limits_0^r t^{m+k-1} t^{|\gamma_{m+k,k}|} dt = C r^\alpha,$$

т. е. $\big|B(0,r)\big|_\gamma = C r^\alpha$.

С учетом этого оценим сверху $M_\gamma^\omega f(x)$. Для произвольного $r > 0$ получаем

$$\big(I_B^\omega |f|\big)(x) = \int\limits_{R^+_{m+k,k}} T^y \big(|f(x)|\big) \omega\big(|y|\big) |y|^{-\alpha} d\mu(y) \geq$$

$$\geq \int\limits_{B(0,r)} T^y \Big(\big|f(x)\big|\Big) \omega\big(|y|\big) |y|^{-\alpha} d\mu(y) \geq C \omega(r) r^{-\alpha} \int\limits_{B(0,r)} T^y \big(|f(x)|\big) d\mu(y) \geq$$

$$\geq C \omega\Big(\big|B(0,r)\big|_\gamma^{1/\alpha}\Big) \big|B(0,r)\big|_\gamma^{-1} \int\limits_{B(0,r)} T^y \big(|f(x)|\big) d\mu(y).$$

Отсюда следует неравенство

$$\big(I_B^\omega |f|\big)(x) \geq C M_\gamma^\omega f(x).$$

Таким образом, $M_\gamma^\omega f(x)$ принадлежит $K_\gamma\big(p, \widetilde{\Omega}_{p,\alpha}\big)$, если $\omega \in \widetilde{\Omega}_{p,\alpha}$.

Отметим, что если $\omega(t) = t^s$, $0 \leq s < \alpha = m + k + |\gamma|$, то I_B^ω — потенциал Рисса порядка s, J_B^ω — потенциал Бесселя порядка s, а $M_\gamma^\omega f(x)$ — B-дробно-максимальная функция $M_\gamma^s f(x)$, введенная в [9].

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $1 \leq p < +\infty$ *и* $A \in K_\gamma\big(p, \widetilde{\Omega}_{p,\alpha}\big)$, $\alpha = m + k + |\gamma_{k,n}|$. *Тогда существует* N*-функция* Φ *такая, что*

$$C^{-1} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^a}\right) \leq \frac{1}{r^{\frac{a}{p}}} \int\limits_0^r \frac{\omega(t)}{t} dt \leq C \Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^a}\right), \quad r > 0, \tag{3}$$

где Φ^{-1} *— обратная к функции* Φ, ω *— функция из определения класса* $K_\gamma\big(p, \widetilde{\Omega}_{p,\alpha}\big)$, C *— постоянная, не зависящая от* r, *и*

a) *если* $p > 1$, *то существует* $C > 0$ *такое, что* $\|Af\|_{L_v^\Phi(R_{m+k,k}^+)} \leq C\|f\|_{L_{p,\gamma}}$ *для любого* $f \in L_{p,v}\big(R_{m+k,k}^+\big)$;

b) *если* $p = 1$, *то существует* $C > 0$ *такое, что*

$$\int\limits_{\{x\,:\,|Af(x)|>2\beta\}} d\mu(x) \leq \left\{\Phi\left[\left(\frac{c}{\beta}\|f\|_{L_\gamma^1}\right)^{-1}\right]\right\}^{-1}$$

для любых $f \in L_{1,v}(R_{m+k,k}^+)$ *и* $\beta > 0$.

Мы приводим доказательство этой теоремы, в котором рассматриваются свертки с наличием обобщенного сдвига по k переменным. Но совершенно аналогичными рассуждениями доказывается, что эти результаты имеют место и в случае обычного сдвига по всем переменным, если положить $k = 0$ и внести соответствующие изменения в обозначения и определения (см. [12]). Поэтому считаем, что эта теорема справедлива и в случае $k = 0$.

Отметим, что для дальнейших исследований, в частности при рассмотрении теорем Соболева, в общем случае необходимо рассматривать и этот случай.

Доказательство основной теоремы. В этом пункте мы дадим понятие пространства Орлича. Функция $\Phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ называется N-функцией, если она имеет вид

$$\Phi(r) = \int\limits_0^r a(t)dt,$$

где $a\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ — непрерывная слева, неубывающая функция такая, что $a(0) = 0$ и $a(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Положим $b(r) = \inf\big\{s\colon a(s) > \varepsilon\big\}$, тогда $\psi(r) = \int_0^r b(t)dt$ также является N-функцией и (φ, ψ) называется взаимно дополняющей одна другую парой.

Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Для N-функции Φ положим

$$L^\Phi(x) = \left\{f\colon \int\limits_X \Phi\big(\varepsilon|f(x)|\big)d\mu(x) < \infty \ \text{ для всех } \ \varepsilon > 0\right\},$$

$$\|f\|_\Phi = \inf\left\{\lambda > 0\colon \int\limits_X \Phi\left(\frac{\big|f(x)\big|}{\lambda}\right)d\mu(x) \leq 1\right\}.$$

Пусть (φ, ψ) — пара взаимно дополняющих N-функций. Отметим, что

$$\int \big|f(x)g(x)\big|d\mu(x) \leq 2\|f\|_\phi\|g\|_\psi \qquad \text{и} \qquad r \leq \phi^{-1}(r)\psi^{-1}(r), \quad r \geq 0.$$

Здесь φ^{-1}*и* ψ^{-1} — обратные функции к ϕ и ψ соответственно.

Теперь приведем вспомогательные леммы, используемые при доказательстве основной теоремы.

Лемма 1. *Пусть* $1 \leq p < +\infty$ *и* $\omega \in \Omega_{p,\alpha}$, $\alpha = m + k + |\gamma_{k,n}|$. *Тогда существует* N*-функция* Φ *такая, что*

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^{a}}\right) \sim \frac{1}{r^{\frac{\alpha}{p}}} \int\limits_0^r \frac{\omega(t)}{t} dt, \quad r > 0. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ из определения $\omega \in \Omega_{p,\alpha}$ и $\alpha_1 = \alpha - \varepsilon$. Тогда $\omega(t)t^{-\alpha_1}$ убывает. Положим

$$h(r) = \int\limits_0^r \omega(t) t^{-1} dt, \quad r > 0.$$

Очевидно, функция $h(r)$ возрастает, дифференцируема и

$$h'(r) = \omega(r) r^{-1}, \quad r > 0. \tag{5}$$

Докажем, что $h(r)r^{-\alpha_1}$ убывает.

Действительно, учитывая, что

$$h(r) = \int\limits_0^r \omega(t) t^{-\alpha_1} t^{\alpha_1 - 1} dt \geq \omega(r) r^{-\alpha_1} \int\limits_0^r t^{\alpha_1 - 1} dt = \omega(r)/\alpha_1,$$

из (5) получаем

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{h(r)}{r^{\alpha_1}}\right) = \frac{h'(r) r^{\alpha_1} - \alpha_1 r^{\alpha_1 - 1} h(r)}{r^{2\alpha_1}} \leq \frac{\omega(r) r^{-1+\alpha_1} - \alpha_1 r^{\alpha_1 - 1} \omega(r) \alpha_1^{-1}}{r^{2\alpha_1}} = 0.$$

Положим

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^{\alpha}}\right) = \int\limits_r^\infty \frac{h(t)}{t^{\alpha/p+1}} dt. \tag{6}$$

$\Bigg($Пусть $x = \dfrac{1}{r^{\alpha}}$, тогда $r = \dfrac{1}{x^{1/\alpha}}$ и $\Phi^{-1}(x) = \displaystyle\int_{x^{-1/\alpha}}^\infty \frac{h(t)}{t^{\alpha/p+1}} dt$. Это показывает, что $\Phi^{-1}(x)$ — непрерывная и возрастающая функция и поэтому имеет обратную функцию.$\Bigg)$

Пусть $u = \displaystyle\int_r^\infty \frac{h(t)}{t^{\alpha/p+1}} dt$ и $v = \dfrac{1}{r^{\alpha}}$, тогда $v = \Phi(u)$.

Отметим, что $\dfrac{dv}{du}$ убывает по r, так как

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dr} \Bigg/ \frac{du}{dr} = \frac{-\alpha r^{-\alpha-1}}{-h(r) r^{-(\alpha/p)-1}} = \frac{\alpha}{h(r) r^{\alpha(1-1/p)}}.$$

Отсюда с учетом неравенства

$$\frac{du}{dr} = -\frac{h(r)}{r^{\alpha+\beta+1}} < 0$$

получаем

$$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{dv}{du}\right) = \left[\frac{d}{dr}\left(\frac{dv}{du}\right)\right] \Big/ \frac{du}{dr} > 0,$$

т. е. $\Phi''(u) > 0$. Это доказывает, что $\Phi(u)$ является N-функцией.

Для завершения доказательства леммы следует показать справедливость соотношения

$$\int\limits_r^\infty \frac{h(t)}{t^{\alpha/p+1}}dt \sim \frac{h(r)}{r^{\alpha/p}} = \frac{1}{r^{\alpha/p}} \int\limits_0^r \frac{\omega(t)}{t}dt. \tag{7}$$

С учетом возрастания $h(t)$ и убывания $h(r)r^{-\alpha_1}$ получаем

$$\int\limits_r^\infty \frac{h(t)}{t^{\alpha/p+1}}dt \geq h(r) \int\limits_0^r \frac{1}{t^{\alpha/p+1}}dt \geq C\frac{h(r)}{t^{\alpha/p}},$$

$$\int\limits_r^\infty \frac{h(t)}{t^{\alpha/p+1}}dt = \int\limits_r^\infty \frac{h(t)t^{-\alpha_1}}{t^{\alpha/p+1-\alpha_1}}dt \leq h(r)r^{-\alpha_1} \int\limits_0^r \frac{1}{t^{\alpha/p+1-\alpha_1}}dt \leq C\frac{h(r)}{t^{\alpha/p}}.$$

Учитывая (7) в (6), получаем (4), и тем самым лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $p \geq 1$, $\alpha > 0$ и $\omega \in \widetilde{\Omega}_{p,\alpha}$, тогда существует функция $\widetilde{\omega} \in \Omega_{p,\alpha}$ такая, что $\widetilde{\omega}(t) \sim \omega(t)$, т. е. существует такое $c > 0$, что $c^{-1}\omega(t) \leq \widetilde{\omega}(t) \leq c\omega(t)$, $t > 0$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ из определения $\omega \in \widetilde{\Omega}_{p,\alpha}$. Положим

$$\omega_0(\delta) = \inf_{\delta \leq \xi < +\infty} \omega(\xi) \qquad \text{и} \qquad \widetilde{\omega}(\delta) = \delta^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon} \inf_{0<t<\delta} \omega_0(t) t^{-\frac{\alpha}{p}+\varepsilon}, \quad \delta > 0.$$

Очевидно, $\omega_0(\delta)$ возрастает, $\widetilde{\omega}(\delta)\delta^{-(\frac{\alpha}{p}-\varepsilon)}$ убывает, $\widetilde{\omega}(\delta) \leq \omega_0(\delta) \leq \omega(\delta)$ и

$$\widetilde{\omega}(\delta) = \delta^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon} \inf_{0<t<\delta} \frac{\omega_0(t)}{t^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon}} \geq \delta^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon} \left(c_\omega^{\downarrow}\right)^{-1} \frac{\omega_0(\delta)}{\delta^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon}} = \left(c_\omega^{\downarrow}\right)^{-1} \omega_0(\delta) \geq \left(c_\omega^{\downarrow}\right)^{-1} \left(c_\omega^{\uparrow}\right)^{-1} \omega(\delta).$$

Этим доказано, что $\widetilde{\omega}(t) \sim \omega(t)$.

Докажем, что $\widetilde{\omega}(t)$ возрастает. Пусть $0 < \delta_1 < \delta_2$, тогда

$$\inf_{0<t<\delta_1} \frac{\omega_0(t)}{t^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon}} \geq \inf_{0<t<\delta_2} \frac{\omega_0(t)}{t^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon}}.$$

В случае $\inf_{0<t<\delta_1} \dfrac{\omega_0(t)}{t^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon}} = \inf_{0<t<\delta_2} \dfrac{\omega_0(t)}{t^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon}}$ имеем

$$\widetilde{\omega}(\delta_1) = \delta_1^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon} \inf_{0<t<\delta_1} \frac{\omega_0(t)}{t^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon}} = \delta_1^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon} \inf_{0<t<\delta_2} \frac{\omega_0(t)}{t^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon}} \leq \delta_2^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon} \inf_{0<t<\delta_2} \frac{\omega_0(t)}{t^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon}} \leq \widetilde{\omega}(\delta_2),$$

откуда $\widetilde{\omega}(\delta_1) \leq \widetilde{\omega}(\delta_2)$.

Если $\inf_{0<t<\delta_1} \dfrac{\omega_0(t)}{t^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon}} > \inf_{0<t<\delta_2} \dfrac{\omega_0(t)}{t^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon}}$, то

$$\inf_{0<t<\delta_2} \frac{\omega_0(t)}{t^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon}} = \min\left\{\inf_{0<t<\delta_1} \frac{\omega_0(t)}{t^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon}}, \inf_{\delta_1<t<\delta_2} \frac{\omega_0(t)}{t^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon}}\right\} = \inf_{\delta_1<t<\delta_2} \frac{\omega_0(t)}{t^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon}}.$$

Поскольку

$$\widetilde{\omega}(\delta_2) = \delta_2^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon} \inf_{0<t<\delta_2} \frac{\omega_0(t)}{t^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon}} = \delta_2^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon} \inf_{\delta_1<t<\delta_2} \frac{\omega_0(t)}{t^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon}} \geq \delta_2^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon} \inf_{\delta_1<t<\delta_2} \frac{1}{t^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon}}\omega_0(\delta_1) \geq$$

$$\geq \delta_2^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon} \frac{1}{\delta_2^{\frac{\alpha}{p}-\varepsilon}}\omega_0(\delta_1) = \omega_0(\delta_1) \geq \widetilde{\omega}(\delta_1),$$

то получаем $\widetilde{\omega}(\delta_2) \geq \widetilde{\omega}(\delta_1)$.

Таким образом, доказано, что $\widetilde{\omega}(\delta)$ возрастает.

Введем B-максимальную функцию (см. [9])

$$(M_\nu f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu\big(B_\nu(0,r)\big)} \int\limits_{B_\nu(0,r)} T^y\big(|f(x)|\big) d\mu(y),$$

$$B_\nu(0,r) = \big\{y \in (R^m)_\nu : |y| < r\big\}, \qquad \mu\big(B_\nu(0,r)\big) = \int\limits_{B_\nu(0,r)} d\mu(y).$$

Очевидно, что почти для всех $x \in R^+_{m+k,k}$

$$T^y\big(|f(x)|\big) \leq (M_\nu f)(x)\,(M)$$

и, кроме того,

$$\left(\int\limits_{R^+_{m+k,k}} \Big(T^y\big(|f(x)|\big)\Big)^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{p,\nu}.$$

В дальнейшем неоднократно будем использовать следующие свойства оператора T^y:

1) $T^y 1 = 1$;

2) $T^y(Cf) = CT^y(f)$, $C \in \mathbb{R}$;

3) если $|f| \leq |g|$, то $T^y\big(|f|\big) \leq T^y\big(|g|\big)$;

4) $\big(|T(f)|\big)^p \leq T\big(|f|\big)^p$.

Перейдем к доказательству основной теоремы.

Пусть $p \geq 1$, $f \in L_{p,v}\big(R^+_{m+k,k}\big)$, $A \in K_\gamma\big(p, \widetilde{\Omega}_{p,\alpha}\big)$, $\alpha = m + k + \big|\gamma_{k,n}\big|$ и $r > 0$. Тогда из лемм 1 и 2 следует существование N-функции Φ, удовлетворяющей неравенствам (3).

Для почти всех $x \in R^+_{m+k,k}$ выполняется неравенство

$$\big|A(f)(x)\big| \leq C\big(i_1(x,r) + i_2(x,r)\big),$$

где

$$i_1(x,r) = \int\limits_{\{y \in R^+_{m+k,k} :\, |y|<r\}} T^y\big(|f(x)|\big) \frac{\omega\big(|y|\big)}{|y|^{m+k+|\gamma_{k,n}|}} d\mu(y),$$

$$i_2(x,r) = \int\limits_{\{y \in R^+_{m+k,k} :\, |y|\geq r\}} T^y\big(|f(x)|\big) \frac{\omega\big(|y|\big)}{|y|^{m+k+|\gamma_{k,n}|}} d\mu(y).$$

Учитывая неравенство $\dfrac{\omega\left(|y|\right)}{|y|^{m+k+\left|\gamma_{k,n}\right|}}d\mu(y) \le \dfrac{\omega\left(|y|\right)}{|y|^{m+k}}dy$ и простейшие свойства $1-4$ оператора сдвига T^y, а затем переходя к сферическим координатам, получаем

$$i_1(x,r) \le c \int\limits_{\left\{y\in R^+_{m+k,k}\,:\,|y|<r\right\}} (M_\upsilon f)(x)\frac{\omega\left(|y|\right)}{|y|^{m+k+|\gamma_{k,n}|}}d\mu(y) \le$$

$$\le c(M_\upsilon f)(x) \int\limits_{\left\{y\in R^+_{m+k,k}\,:\,|y|<r\right\}} \frac{\omega\left(|y|\right)}{|y|^{m+k}}dy \le c(M_\upsilon f)(x)\int\limits_0^r \frac{\omega(t)}{t}dt.$$

Таким образом,

$$i_1(x,r) \le c(M_\nu f)(x)\int\limits_0^r \frac{\omega(t)}{t}dt. \tag{8}$$

Пусть $p>1$. Применяя обобщенное неравенство Гельдера, находим

$$i_2(x,r) = \int\limits_{\left\{y\in R^+_{m+k,k}\,:\,|y|\ge r\right\}} T^y\left(|f(x)|\right)\frac{\omega\left(|y|\right)}{|y|^{m+k+\left|\gamma_{k,n}\right|}}d\mu(y) \le$$

$$\le \left(\int\limits_{\left\{y\in R^+_{m+k,k}\,:\,|y|\ge r\right\}} (T^y(|f(x)|))^p d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\left\{y\in R^+_{m+k,k}\,:\,|y|\ge r\right\}} \left(\frac{\omega(y)}{|y|^{m+k+\left|\gamma_{k,n}\right|}}\right)^{p'} d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p'}} = \|f\|_{p,\nu}A, \tag{9}$$

где

$$A = \left(\int\limits_{\left\{y\in R^+_{m+k,k}\,:\,|y|\ge r\right\}} \left(\frac{\omega(y)}{|y|^{m+k+|\gamma_{k,n}|}}\right)^{p'} d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Полагая $r_j = 2^j r,\ j=0,1,2,\ldots,$ и учитывая, что $\omega \in \widetilde{\Omega}_{p,(m+k+|\gamma_{k,n}|)}$, имеем

$$A = \left(\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_{\left\{y\in R^+_{m+k,k}\,:\,r_j\le|y|\le 2r_j\right\}} \left(\frac{\omega\left(|y|\right)}{|y|^{m+k+|\gamma_{k,n}|}}\right)^{p'} d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p'}} \le$$

$$\le c_\omega^{\downarrow}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\omega(r_j)}{r_j^{m+k+|\gamma_{k,n}|}}\right)\mu^{\frac{1}{p'}}\left(B_\nu(0,2r_j)\right) \le c_\omega^{\downarrow}C\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\omega\left(r_j\right)}{r_j^{m+k+|\gamma_{k,n}|}}\right)r_j^{\frac{m+k+|\gamma_{k,n}|}{p'}} =$$

$$= c_\omega^{\downarrow} C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega\left(r_j\right)}{r_j^{\frac{m+k+|\gamma_{k,n}|}{p}}} \le c_\omega^{\uparrow} c_\omega^{\downarrow} C \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{r_j}^{2r_j} \frac{\omega(t)}{t^{\frac{m+k+|\gamma_{k,n}|}{p}}} \frac{dt}{t} =$$

$$= c_\omega^{\uparrow} c_\omega^{\downarrow} C \int\limits_{r}^{\infty} \frac{\omega(t)}{t^{\frac{m+k+|\gamma_{k,n}|}{p}}} \frac{dt}{t} = c_\omega^{\uparrow} c_\omega^{\downarrow} C \int\limits_{r}^{+\infty} \frac{\omega(t)}{t^{\frac{m+k+|\gamma_{k,n}|}{p}-\varepsilon}} \frac{dt}{t^{1+\varepsilon}} \le$$

$$\le c_\omega^{\uparrow} c_\omega^{\downarrow} C \frac{\omega(r)}{r^{\frac{m+k+|\gamma_{k,n}|}{p}}} \le c_\omega^{\uparrow} c_\omega^{\downarrow} C \frac{1}{r^{\frac{m+k+|\gamma_{k,n}|}{p}}} \int\limits_{0}^{r} \frac{\omega(t)}{t} dt. \tag{10}$$

Учитывая (10), из (9) получаем

$$\left|i_2(x,r)\right| \le C_{2,p} \|f\|_{p,\nu} \frac{1}{r^{\frac{m+k+|\gamma_{k,n}|}{p}}} \int\limits_{0}^{r} \frac{\omega(t)}{t} dt. \tag{11}$$

Пусть $p = 1$, тогда

$$i_2(x,r) = \int\limits_{\left\{y \in R^+_{m+k,k}\,:\,|y| \ge r\right\}} T^y(|f(x)|) \frac{\omega\big(|y|\big)}{|y|^{m+k+|\gamma_{k,n}|}} d\mu(y) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \int\limits_{\left\{y \in R^+_{m+k,k}\,:\,r_j \le |y| \le 2r_j\right\}} T^y(|f(x)|) \frac{\omega\big(|y|\big)}{|y|^{m+k+|\gamma_{k,n}|}} d\mu(y) \le$$

$$\le C \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{\left\{y \in R^+_{m+k,k}\,:\,r_j \le |y| \le 2r_j\right\}} T^y\big(|f(x)|\big) d\mu(y) \frac{\omega\left(r_j\right)}{r_j^{m+k+|\gamma_{k,n}|}} \le$$

$$\le C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega\left(r_j\right)}{r_j^{m+k+|\gamma_{k,n}|}} \int\limits_{R^+_{m+k,k}} T^y(|f(x)|) d\mu(y) \le C \|f\|_{L_{1,\gamma}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega\left(r_j\right)}{r_j^{m+k+|\gamma_{k,n}|}} \le$$

$$\le C \|f\|_{L_{1,\gamma}} \frac{1}{r^{m+k+|\gamma_{k,n}|}} \int\limits_{0}^{r} \frac{\omega(t)}{t} dt.$$

Итак, неравенство (11) выполняется и в случае $p = 1$.

Объединяя оценки $\left|i_1(x,r)\right|$ и $\left|i_2(x,r)\right|$, убеждаемся, что для почти всех $x \in R^+_{m+k,k}$ и $r > 0$, $p \ge 1$ имеет место неравенство

$$\left|(I_B^\omega f)(x)\right| \le C \left(\left|i_1(x,r)\right| + \left|i_2(x,r)\right|\right) \le$$

$$\le C \left((M_\nu f)(x) + \|f\|_{p,\nu} \frac{1}{r^{\frac{m+k+2|\nu|}{p}}} \right) \int\limits_{0}^{r} \frac{\omega(t)}{t} dt. \tag{12}$$

Теперь докажем пункт а) теоремы.

Как известно [8], при $p>1$

$$\big\|(M_\nu f)(x)\big\|_{p,\nu}\le C_p\|f\|_{p,\nu}.$$

Выберем

$$r=\sigma^{-\frac{p}{m+k+|\gamma_{k,n}|}}\qquad \text{и}\qquad \sigma=(M_\nu f)(x)/\big(C_p\|f\|_{p,\nu}\big).$$

Тогда

$$(M_\nu f)(x)+\|f\|_{p,\nu}r^{-\frac{m+k+|\gamma_{k,n}|}{p}}=\left(1+\frac{1}{C_p}\right)(M_\nu f)(x),$$

кроме того, в силу условия (3)

$$\int\limits_0^r\frac{\omega(t)}{t}dt\le cr^{\frac{m+k+|\gamma_{k,n}|}{p}}\Phi^{-1}\Big(r^{-(m+k+|\gamma_{k,n}|)}\Big)=$$

$$=c\Big[\sigma^{\frac{p}{m+k+|\gamma_{k,n}|}}\Big]^{\frac{m+k+|\gamma_{k,n}|}{p}}\Phi^{-1}\Big(\sigma^{\frac{p}{m+k+|\gamma_{k,n}|}(-m+k+|\gamma_{k,n}|)}\Big)=C\frac{1}{\sigma}\Phi^{-1}(\sigma^p).$$

С учетом изложенного из (12) получаем

$$\big|(I_B^\omega f)\big|\le c\big(1+C_p^{-1}\big)(M_\gamma f)(x)\frac{\Phi^{-1}(G^p)}{G}=$$

$$=CC_p(1+C_p^{-1})\|f\|_{p,\gamma}\Phi^{-1}\left[\left(\frac{(M_\nu f)(x)}{C_p\|f\|_{p,\gamma}}\right)^p\right].$$

Наконец, полагая $\widetilde{c}=CC_p(1+C_p^{-1})$, отсюда имеем

$$\frac{(I_B^\omega f)(x)}{\widetilde{c}\|f\|_{p,\nu}}\le\Phi^{-1}\left[\left(\frac{(M_\nu f)(x)}{C_p\|f\|_{p,\gamma}}\right)^p\right]\qquad\text{или же}\qquad\Phi\left(\frac{(I_B^\omega f)\,(x)}{\widetilde{c}\|f\|_{p,\nu}}\right)\le\left(\frac{(M_\nu f)(x)}{C_p\|f\|_{p,\gamma}}\right)^p.$$

Тогда

$$\int\limits_{R^+_{m+k,k}}\Phi\left(\frac{(I_B^\omega f)(x)}{\widetilde{c}\|f\|_{p,\nu}}\right)d\mu(x)\le\int\limits_{R^+_{m+k,k}}\left(\frac{(M_\nu f)(x)}{C_p\|f\|_{p,\gamma}}\right)^p d\mu(x)\le$$

$$\le\left(\frac{1}{C_p\|f\|_{p,\gamma}}\right)^p\int\limits_{R^+_{m+k,k}}\big((M_\nu f)(x)\big)^p d\mu(x)\le\left(\frac{1}{C_p\|f\|_{p,\gamma}}\right)^p\big(C_p\|f\|_{p,\gamma}\big)^p=1,$$

т. е. $\displaystyle\int_{R^+_{m+k,k}}\Phi\left(\frac{(I_B^\omega f)(x)}{\widetilde{c}\|f\|_{p,\nu}}\right)d\mu(x)\le 1.$

Отсюда с учетом нормы

$$\big\|(I_B^\omega f)(x)\big\|_{L_\nu^\Phi}\le\widetilde{c}\,\|f\|_{p,\nu}.$$

Пункт a) теоремы доказан.

Теперь докажем пункт b). Очевидно,

$$\big|\{x:|I_\omega f(x)\big|>2\beta\}\big|_\nu\le\big|\{x:i_1(x,r)>\beta\}\big|_\nu+\big|\{x:i_2(x,r)>\beta\}\big|_\nu.$$

В силу (8)

$$A = \big|\{x : i_1(x,r) > \beta\}\big|_\nu \le \left|\left\{x : (M_\nu f)(x) \ge \beta c_1 / \int\limits_0^r \frac{\omega(t)}{t} dt\right\}\right|.$$

Известно [7], что

$$\big|\{x : (M_\nu f)(x) \ge \alpha\}\big|_\nu \le c_0 \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L_{1,\nu}}.$$

Полагая в последнем неравенстве

$$\alpha = \beta c_1 \Bigg/ \int\limits_0^r \frac{\omega(t)}{t} dt,$$

получаем

$$A \le C_0 C_1 \left(\int\limits_0^r \frac{\omega(t)}{t} dt\right) \frac{1}{\beta} \|f\|_{L_{1,\nu}}.$$

Теперь выберем r. Пусть $C_3 = \max\{C_0C_1, C_{2,1}\}$ и

$$C_3 r^{-m+k+2|\nu|} \int\limits_0^r \frac{\omega(t)}{t} dt \|f\|_{L_{1,\nu}} = \beta.$$

Тогда в силу (11) $\big|i_2(x,r)\big| \le \beta$, следовательно, $\big|\{x : i_2(x,r) > \beta\}\big| = 0$.

Если положить $K = \big|\{x : I_\omega f(x) > 2\beta\}\big|_\nu$, то получим

$$K \le C_3 \beta^{-1} \left(\int\limits_0^r \frac{\omega(t)}{t} dt\right) \|f\|_{L_{1,\nu}}.$$

Теперь покажем, что функция

$$F(r) = r^{-(m+k+|\gamma_{k,n}|)} \int\limits_0^r \frac{\omega(t)}{t} dt$$

убывает в $(0,\infty)$.

Действительно,

$$F'(r) = -\big(m+k+|\gamma_{k,n}|\big) r^{-(m+k+|\gamma_{k,n}|)-1} \int\limits_0^r \frac{\omega(t)}{t} dt + r^{-(m+k+|\gamma_{k,n}|)} \frac{\omega(r)}{r} =$$

$$= r^{-(m+k+|\gamma_{k,n}|+1)} \left(\omega(r) - \big(m+k+|\gamma_{k,n}|\big) \int\limits_0^r \frac{\omega(t)}{t} dt\right).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что $\dfrac{\omega(t)}{t^{m+k+|\gamma_{k,n}|-\varepsilon}}$ убывает, тогда имеем

$$\big(n+k+|\gamma_{k,n}|\big)\int\limits_0^r \frac{\omega(t)}{t}dt =$$

$$= \big(n+k+|\gamma_{k,n}|\big)\int\limits_0^r \frac{\omega(t)}{t^{m+k+|\gamma_{k,n}|-\varepsilon}}\frac{t^{m+k+|\gamma_{k,n}|-\varepsilon}}{t}dt \geq$$

$$\geq \big(m+k+|\gamma_{k,n}|\big)\frac{\omega(r)}{r^{m+k+|\gamma_{k,n}|-\varepsilon}}r^{m+k+|\gamma_{k,n}|-\varepsilon}\frac{1}{m+k+|\gamma_{k,n}|-\varepsilon} \geq \omega(r).$$

Таким образом, получаем, что $F'(r) < 0$, откуда и следует убывание $F(r)$. Итак, для каждого a уравнение $F(r) = c_0\dfrac{\beta}{\|f\|_{L_{1,\nu}}} \equiv a$ имеет единственное решение $r = F^{-1}(a)$. Следовательно,

$$K \leq \left(\int\limits_0^r \frac{\omega(t)}{t}dt\right)\frac{\|f\|_{L_{1,\nu}}C_3}{\beta} =$$

$$= r^{m+k+|\gamma_{k,n}|}\left(\frac{1}{r^{m+k+|\gamma_{k,n}|}}\int\limits_0^r \frac{\omega(t)}{t}dt\right)\frac{\|f\|_{L_{1,\nu}}C_3}{\beta} = r^{m+k+|\gamma_{k,n}|}.$$

Обозначим

$$\frac{1}{r^{m+k+|\gamma_{k,n}|}}\int\limits_0^r \frac{\omega(t)}{t}dt = \frac{\beta}{\|f\|_{L_{1,\nu}}}C_3 = a,$$

тогда

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^{m+k+|\gamma_{k,n}|}}\right) = c_3F(r) = c_3a \qquad \text{и} \qquad r^{m+k+|\gamma_{k,n}|} = \big[\Phi(c_3a)\big]^{-1}.$$

Теорема доказана.

Приведем пример, свидетельствующий о точности основной теоремы. Возьмем функцию

$$\omega_0(r) = \begin{cases} k_1\left(\log\dfrac{1}{r}\right)^{-\beta_1}, & 0 < r < r_1,\\ 1, & r_1 \leq r \leq r_2,\\ k_2r^s(\log r)^{\beta_2}, & r_2 < r,\end{cases}$$

где $s \in (0,1)$ и $\beta_i > 1,\ k_1 = \left(\log\dfrac{1}{r_1}\right)^{\beta_1},\ k_2 = \big(r_2^s(\log r_2)^{\beta_2}\big)^{-1}$.

Величины r_1 и r_2 выбираем так, чтобы ω_0 возрастала, а $\omega_0(r)r^{\alpha/p}$ $\big(\alpha = m+k+|\gamma_{k,m}|\big)$ убывала. Тогда в силу леммы 1 функция

$$h(r) = \int\limits_0^r \omega(t)t^{-1}dt, \quad r > 0,$$

возрастает, дифференцируема, а $h(r)r^{-\alpha_1}$ убывает.

Легко проверить, что

$$h(r) = C\left(\log\frac{1}{r}\right)^{-\beta_1+1}, \quad 0 < r \le r_1.$$

Пусть $0 < \delta < p$ и $x \in R^+_{m+k,k}$. Положим

$$f_0(x) = \begin{cases} |x|^{\alpha/p}\left(\log\dfrac{1}{|x|}\right)^{\delta/p}, & |x| < r_1, \\ 0, & |x| \ge r_1. \end{cases}$$

Тогда f_0 принадлежит $L_{p,\gamma}\big(R^+_{m+k,k}\big)$. В силу леммы 1 существуют N-функции Φ, Φ_1 такие, что

$$C^{-1}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^a}\right) \le \frac{1}{r^{\frac{a}{p}}}\int\limits_0^r \frac{\omega_0(t)}{t}dt \le C\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^a}\right), \quad r > 0,$$

$$C_1^{-1}\Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{r^a}\right) \le \frac{\omega_0(r)}{r^{\frac{a}{p}}} \le C_1\Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{r^a}\right), \quad r > 0.$$

Тогда в силу основной теоремы $I_B^{\omega_0}(f_0)$ принадлежит $L^{\Phi}\big(R^+_{m+k,k}\big)$. Теперь докажем, что $I_B^{\omega_0}(f_0)$ не принадлежит $L^{\Phi_1}\big(R^+_{m+k,k}\big)$.

Отметим, что если $x, y \in R^+_{m+k,k}$, $|x| \le r_1/2$ и $|y| \le |x|/2$, то имеем

$$\frac{1}{2}|x| \le |x-y| \le 2|x| \qquad \text{и} \qquad \left(\frac{1}{2}|x|\right)^2 \le |x-y|^2 + \le 2|x|^2,$$

$$(x_{m+i}, y_{m+i})^2_{\alpha_i} = x^2_{m+i} - 2x_{m+i}y_{m+i}\cos\alpha_i + y^2_{m+i} =$$

$$= (x_{m+i} - y_{m+i})^2 + 2x_{m+i}y_{m+i}(1-\cos\alpha_i).$$

Если учесть, что $x_{m+i} \ge 0, y_{m+i} \ge 0$ и $y_{m+i} \le |y| \le |x|/2$, то

$$0 \le x_{m+i}y_{m+i} \le |x|^2/2.$$

Учитывая изложенное, получаем

$$\big|(x'-y', (x_{m+1}, y_{m+1})_{\alpha_1}, \ldots, (x_{m+k}, y_{m+k})_{\alpha_k})\big|^2 =$$

$$= (x'-y')^2 + \sum_{i=1}^k (x_{m+i}, y_{m+i})^2_{\alpha_i} =$$

$$= \big(x'-y'\big)^2 + \sum_{i=1}^k \big[(x_{m+i}-y_{m+i})^2 + 2x_{m+i}y_{m+i}(1-\cos\alpha_i)\big] =$$

$$= |x-y|^2 + \sum_{i=1}^k \big[2x_{m+i}y_{m+i}(1-\cos\alpha_i)\big] \sim |x|^2.$$

Тогда

$$T^S\big(f_0(x)\big) = c_v \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi f_0\big(x' - y', (x_{m+1}, y_{m+1})_{\alpha_1}, \ldots, (x_{m+k}, y_{m+k})_{\alpha_k}\big) \times$$

$$\times \sin^{v_{m+1}-1}\alpha_1 \ldots \sin^{v_{m+k}-1}\alpha_k d\alpha_1 \ldots d\alpha_k \sim$$

$$\sim c_v f_0(x) \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi \sin^{v_{m+1}-1}\alpha_1 \ldots \sin^{v_{m+k}-1}\alpha_k d\alpha_1 \ldots d\alpha_k \sim f_0(x).$$

Наконец, имеем

$$I_B^{\omega_0}(f_0)(x) \geq \int\limits_{|y| \leq |x|/2} T^y f(x) \frac{\omega_0\big(|y|\big)}{|y|^{m+k+|\gamma|}} d\mu(y) \geq c f_0(x) \int\limits_0^{|x|/2} \frac{\omega_0\big(|y|\big)}{|y|^{m+k+|\gamma|}} d\mu(y) =$$

$$= c f_0(x) \int\limits_0^{|x|/2} \frac{\omega_0\big(|y|\big)}{|y|^{m+k+|\gamma|}} y_{m+1}^{\gamma_1} \ldots y_{m+k}^{\gamma_k} dy_1 \ldots dy_{m+k}.$$

Теперь, переходя к полярным координатам с центром в точке x, получаем

$$I_B^{\omega_0}(f_0)(x) \geq c f_0(x) \int\limits_0^{|x|/2} \frac{\omega_0\big(|y|\big)}{|y|^{m+k+|\gamma|}} y_{m+1}^{\gamma_1} \ldots y_{m+k}^{\gamma k} dy_1 \ldots dy_{m+k} =$$

$$= c f_0(x) \int\limits_0^{|x|/2} \frac{k_1\big(\log 1/r\big)^{-\alpha}}{r^{m+k+|\gamma|}} r^{m+k-1} r^{|\gamma|} dr =$$

$$= c f_0(x) \int\limits_0^{|x|/2} \frac{\big(\log 1/r\big)^{-\alpha}}{r} dr \geq c f_0(x) \, \big(\log 1/|x|\big)^{-\alpha+1} =$$

$$= c|x|^{\alpha/p} \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{\delta/p} \big(\log 1/|x|\big)^{-\alpha+1} = c \frac{\omega_0\big(|x|\big)}{|x|^{\frac{m+k+|\gamma|}{p}}}.$$

В последнем переходе учтено, что $0 < \delta < p$ и $\dfrac{1}{|x|} > \dfrac{1}{r_1}$.

Таким образом, если $|x| \leq r_1/2$, то

$$I_B^{\omega_0}(f_0)(x) \geq C \Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{|x|^{m+k+|\gamma|}}\right).$$

Тогда для любого $\lambda > 0$ найдется $\lambda' > 0$ такое, что

$$\Phi\left(\frac{I_B^{\omega_0}(f_0)(x)}{\lambda}\right) \geq \frac{1}{\lambda'} \frac{1}{|x|^{m+k+|\gamma|}}, \quad |x| \leq r_1/2,$$

и поэтому $I_B^{\omega_0}(f_0)$ не принадлежит $L^{\Phi_1}(R_{m+k}^+)$.

Литература

1. И. А. Киприянов, *Сингулярные эллиптические краевые задачи*, Наука, Москва (1997).
2. И. А. Киприянов, Л. А. Иванов, *Получение фундаментальных решений для однородных уравнений с особенностями по нескольким переменным*, Тр. сем. С. Л. Соболева, № 1, 55 – 77 (1983).
3. Б. М. Левитан, *Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье*, Успехи мат. наук, **6**, № 2, 102 – 143 (1951).
4. И. А. Киприянов, М. И. Ключанцев, *Оценки поверхностного потенциала, порожденного оператором обобщенного сдвига*, Докл. АН СССР, **188**, № 5, 997 – 1000 (1969).
5. С. Л. Соболев, *Об одной теореме функционального анализа*, Мат. сб., **4**, № 3, 471 – 497 (1938).
6. А. Д. Гаджиев, И. А. Алиев, *О классах операторов типа потенциала, порожденного обобщенным сдвигом*, Докл. расш. зас. сем. Ин-та прикл. математики им. И. Н. Векуа, **5**, № 2, 30 – 32 (1990).
7. В. С. Гулиев, *Теорема Соболева для B-потенциалов Рисса*, Докл. РАН, **358**, № 4, 450 – 451 (1998).
8. В. С. Гулиев, *Теорема Соболева для анизотропного потенциала Рисса – Бесселя в пространствах Морри – Бесселя*, Докл. РАН, **367**, № 2, 155 – 156 (1999).
9. V. S. Guliyev, N. N. Garakhanova, Y. Zeren, *Pointwise and integral estimates for B-Riesz potentials in terms of B-maximal and B-fractional maximal functions*, Siberian Math. J., **49**, № 6, 1008 – 1022 (2008).
10. V. S. Guliev, *Some properties of the anisotropic Riesz – Bessel potential*, Anal. Math., **26**, № 2, 99 – 118 (2000).
11. С. К. Абдуллаев, З. А. Дамирова, *Науч. и пед. изв. ун-та „Одлар Юрду"*, Сер. физ., техн., мат. и естеств. наук., № 13 (2005).
12. С. К. Абдуллаев, Б. К. Агарзаев, *Неравенство Харди – Литтльвуда – Соболева для обобщенных потенциалов Рисса*, Мат. науч. конф. посвящ. 50-летию каф. вычислит. математики Бакин. гос. ун-та (Баку, 15 – 16 ноября 2012), 85 – 90 (2012).
13. E. Nakai, H. Sumitomo, *On generalized Riesz potentials and spaces of some smooth functions*, Sci. Math. Jpn., **54**, № 3, 463 – 472 (2001).
14. М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Физматгиз, Москва (1958).

Получено 04.03.16