УДК 517.9

А. О. Игнатьев (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ГРАНИЦЫ ПЕРИОДОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

We consider a nonautonomous system of ordinary differential equations. It is supposed that this system has a periodic solution. We establish the lower bound for the period of this solution.

Розглядається неавтономна система звичайних диференціальних рівнянь. Припускається, що ця система має періодичний розв'язок. Метою цієї статті є встановлення оцінки знизу значення періоду цього розв'язку.

1. Введение. Периодические решения являются важным классом решений обыкновенных дифференциальных уравнений, так как многие процессы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, являются периодическими. Их изучению посвящено большое количество работ. В свое время А. Пуанкаре придавал важное значение периодическим решениям, представляемым замкнутыми орбитами. По его мнению, они должны были стать опорой в изучении всех других, непериодических, движений. В определенном смысле периодические решения являются единственным типом решений, который можно целиком наблюдать в процессе их эволюции, так как вся эволюция периодического решения определяется знанием этого решения на конечном промежутке времени. Периодические решения представляют собой простейший тип колебательных решений.

Наряду с задачами о существовании периодических решений и методами их нахождения ряд работ посвящен оценке значений периодов таких решений. Впервые нижняя граница значений периодов периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$x' = F(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

была получена J. A. Yorke [1]. В этой статье было показано, что если правые части системы (1) удовлетворяют условию Липшица с константой Липшица L, то период T любого нетривиального периодического решения (т. е. решения, не являющегося положением равновесия) связан с константой Липшица соотношением $T \geq 2\pi/L$.

Более сложная система

$$x'(t) = F(x(t), x(t-1)) \tag{2}$$

была рассмотрена в работе [2]. В ней предполагалось, что $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и существуют такие a, $b > 0$, что для всех $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство $|F(x_1, x_2) - F(y_1, y_2)| < a|x_1 - y_1| + b|x_2 - y_2|$. Показано, что в этом случае период T любого нетривиального периодического решения системы (2) удовлетворяет неравенству $T \geq \dfrac{2\pi}{a+b}$.

G. Vidossich [3] обобщил приведенный выше результат на класс функциональных условий, более общих, чем условие Липшица.

T. Y. Li [4], применив метод из работы [3], оценил снизу период периодического решения системы с запаздыванием $x'(t) = F(x_t)$, когда функционал F удовлетворяет оценке $|F(\varphi) - F(\psi)| \leq L\|\varphi - \psi\|_\infty$ при $\varphi, \psi \in C$.

В работах [5, 6] рассмотрено автономное дифференциальное уравнение вида $x' = f(x)$ в банаховом пространстве. Предполагается, что функция f удовлетворяет условию Липшица с константой L: $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$. В случае, когда T является периодом периодического решения этого уравнения, в статье [5] получена оценка $T \geq 4{,}5/L$. В работе [6] эта оценка улучшена: $T \geq 6/L$.

Для периодических решений уравнения $x^{(2k)} = F(x)$ ($x^{(2k)}$ — производная x порядка $2k$) J. Mawhin и W. Walter [7] доказали неравенство $T \geq (2\pi)/L^{1/2k}$. A. A. Zevin и M. A. Pinsky [8] рассмотрели систему дифференциальных уравнений $x^{(2k)} = F(x(\tau(t)))$, имеющую периодическое решение. Была установлена нижняя граница для величины периода T.

В настоящей статье с помощью метода J. A. Yorke [1] получена точная оценка для значений периодов периодических решений систем неавтономных дифференциальных уравнений.

2. Оценка периодов периодических решений неавтономных систем. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x'(t) = X(t, x). \tag{3}$$

Здесь $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ — время, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega_* \to \mathbb{R}^n$, где Ω_* — некоторая область из $\mathbb{R}^n$, которая может совпадать с $\mathbb{R}^n$, $x'(t) = \dfrac{dx}{dt}$. Функция $X(t, x) = (X_1(t, x), \ldots, X_n(t, x))$ предполагается непрерывно дифференцируемой. Предположим, что система (3) имеет периодическое решение $x(t)$ с периодом $T > 0$, лежащее во множестве Ω, где $\Omega \subset \Omega_*$. Обозначим $a(t, x) = (a_1(t, x), \ldots, a_n(t, x))$, где

$$a_i(t, x) = \frac{\partial X_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} X_j(t, x), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Пусть существует

$$\lambda = \sup_{\substack{t \in \mathbb{R}_+ \\ x \in \Omega}} \frac{\|a(t, x)\|}{\|X(t, x)\|}. \tag{4}$$

Здесь и в дальнейшем $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму вектора. Выясним связь между числами T и λ.

Вначале сформулируем вспомогательный результат, который был получен в [9] для случая $n = 3$ и в [10] для произвольного n.

Лемма. *Пусть $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемая периодическая функция с периодом T такая, что $\|u(t)\| \equiv 1$. Тогда*

$$\int_0^T \|u'(t)\| dt \geq 2\pi. \tag{5}$$

Теорема. *Предположим, что $x(t)$ — периодическое решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений* (3) *такое, что $\|X(t,x(t))\| \geq \delta > 0$. Пусть λ — число, вычисляемое согласно* (4). *Тогда*

$$T \geq \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $x(t)$ — нетривиальное (т. е. не являющееся положением равновесия) периодическое решение системы (3) с периодом T, т. е. $x(t) \equiv x(t+T)$ при $t \in \mathbb{R}_+$. Обозначим $y(t) = X(t,x(t)) = (y_1(t),\ldots,y_n(t))$, $z(t) = \|y(t)\|$ и $u(t) = \dfrac{y(t)}{z(t)} = (u_1(t),\ldots,u_n(t))$. Очевидно, что $u(t)$ представляет собой единичный вектор, касательный к периодическому решению $x(t)$ системы (3). Заметим, что $z(t) \geq \delta > 0$ для любого t. Учитывая, что $\|u(t)\|^2 \equiv 1$, получаем

$$\frac{d}{dt}(\|u(t)\|)^2 \equiv 0. \tag{7}$$

С другой стороны,

$$\frac{d}{dt}(\|u(t)\|)^2 = \frac{d}{dt}[u_1^2(t)+\ldots+u_n^2(t)] = 2[u_1(t)u_1'(t)+\ldots+u_n(t)u_n'(t)]. \tag{8}$$

Сравнивая (7) и (8), получаем

$$u_1(t)u_1'(t)+\ldots+u_n(t)u_n'(t) \equiv 0. \tag{9}$$

Дифференцируя функцию $y(t) = u(t)z(t)$ по t, находим

$$y'(t) = u'(t)z(t)+u(t)z'(t) = (u_1'(t)z(t)+u_1(t)z'(t),\ldots,u_n'(t)z(t)+u_n(t)z'(t)),$$

откуда

$$\|y'(t)\|^2 = [u_1'(t)z(t)+u_1(t)z'(t)]^2+\ldots+[u_n'(t)z(t)+u_n(t)z'(t)]^2 =$$

$$= z^2(t)[u_1'^2(t)+\ldots+u_n'^2(t)] + z'^2(t)[u_1^2(t)+\ldots+u_n^2(t)]+$$

$$+2z(t)z'(t)[u_1(t)u_1'(t)+\ldots+u_n(t)u_n'(t)].$$

Учитывая тождество (9), имеем

$$\|y'(t)\| \geq z(t)\|u'(t)\|. \tag{10}$$

Оценим $\|y'(t)\|$. Наряду с моментом времени t рассмотрим также момент времени $t+\Delta t$, где Δt — приращение. Найдем приращение функции y_i:

$$y_i(t+\Delta t) - y_i(t) = X_i(t+\Delta t, x(t+\Delta t)) - X_i(t,x(t)) = a_i(t,x(t))\Delta t + o(\Delta t),$$

откуда, переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем $y_i'(t) = a_i(t,x(t))$, $\|y'(t)\| = \|a(t,x(t))\|$. Из (4) имеем $\|y'(t)\| \leq \lambda\|X(t,x(t))\| = \lambda\|y(t)\|$. Из (10) следует

$$\|u'(t)\| \leq \frac{\|y'(t)\|}{z(t)} \leq \lambda\frac{\|y(t)\|}{z(t)} = \lambda. \tag{11}$$

Из (5) и (11) следует, что

$$2\pi \le \int\limits_0^T \|u'(t)\|dt \le \int\limits_0^T \lambda dt = \lambda T,$$

откуда получаем неравенство $T \ge 2\pi/\lambda$, завершающее доказательство теоремы.

***Замечание* 1.** Соотношение (6) является точным (т. е. оно не может быть улучшено).

Для доказательства справедливости этого замечания достаточно указать систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида (3), имеющую периодическое решение с периодом T такое, что $T = 2\pi/\lambda$. Покажем, что в качестве такой системы может быть выбрана система

$$x_1' = -\lambda x_2, \qquad x_2' = \lambda x_1, \qquad \lambda > 0. \tag{12}$$

Находим

$$\|X\| = \sqrt{\lambda^2 x_2^2 + \lambda^2 x_2^2} = \lambda\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \qquad a_1 = -\lambda^2 x_1, \qquad a_2 = -\lambda^2 x_2,$$

$$\|a\| = \lambda^2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \qquad \sup_{\substack{t\in\mathbb{R}_+ \\ x\in\mathbb{R}^2\setminus 0}} \frac{\|a\|}{\|X\|} = \frac{\lambda^2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\lambda\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \lambda.$$

Число

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{13}$$

является периодом любого ненулевого решения системы (12), т. е. для системы (12) выполняется равенство (13).

***Замечание* 2.** Пусть T — значение величины периода периодического решения системы (3). Необходимым условием того, чтобы выполнялось равенство (13), является условие $\|y(t)\| = \mathrm{const}$.

Для доказательства этого заметим, что неравенство (10) переходит в равенство $\|y'(t)\| = z(t)\|u'(t)\|$ только в случае $z'(t) = 0$.

1. *Yorke J. A.* Periods of periodic solutions and the Lipschitz constant // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – **22**. – P. 509 – 512.
2. *Lasota A., Yorke J. A.* Bounds for periodic solutions of differential equations in Banach spaces // J. Different. Equat. – 1971. – **10**. – P. 83 – 91.
3. *Vidossich G.* On the structure of periodic solutions of differential equations // J. Different. Equat. – 1976. – **21**, № 2. – P. 263 – 278.
4. *Li T. Y.* Bounds for the periods of periodic solutions of differential delay equations // J. Math. Anal. and Appl. – 1975. – **49**, № 1. – P. 124 – 129.
5. *Busenberg S. N., Martelli M.* Bounds for the period of periodic orbits of dynamical systems // J. Different. Equat. – 1987. – **67**, № 3. – P. 359 – 371.
6. *Busenberg S. N., Fisher D. C., Martelli M.* Better bounds for periodic solutions of differential equations in Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – **98**, № 2. – P. 376 – 378.
7. *Mawhin J., Walter W.* A general symmetry principle and some implications // J. Math. Anal. and Appl. – 1994. – **186**, № 3. – P. 778 – 798.
8. *Zevin A. A., Pinsky M. A.* Minimal periods of periodic solutions of some Lipschitzian differential equations // Appl. Math. Lett. – 2009. – **22**, № 10. – P. 1562 – 1566.
9. *Fenchel W.* Über krümmung and windung geschlossener raumkurven // Math. Ann. – 1929. – **101**. – P. 238 – 252.
10. *Borsuk K.* Sur la courbure totale des courbes fermées // Ann. pol. math. – 1947. – **20**. – P. 251 – 265.

Получено 15.09.14