УДК 517.94

К. Н. Андреев, Е. Я. Хруслов (Физ.-техн. ин-т низ. температур НАН Украины, Харьков)

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА В КЛАССЕ НЕУБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

We study the Cauchy problem for the Korteweg–de-Vries equation in the class of functions approaching a finite- zone periodic solution of the KdV equation as $x \to -\infty$ and 0 as $x \to +\infty$. We prove the existence of infinitely many “regularized” integrals of motion for the solutions $u(x,t)$ of the Cauchy problem, with explicit dependence on time.

В роботі вивчається розв’язок задачі Коші для рівняння Кортевега – де Фріза у класі функцій, що прямують до скінченнозонного періодичного розв’язку цього рівняння при $x \to -\infty$ і до 0 при $x \to +\infty$. Доведено існування нескінченного числа „регуляризованих” інтегралів руху для розв’язку $u(x,t)$ задачі Коші, до яких явно входить час.

1. Введение. Хорошо известно, что решение задачи Коши для уравнения Кортевега – де Фриза (КдФ):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad -\infty < x < +\infty \\ u(x) \to 0, \quad |x| \to \infty, \tag{1.1}$$

имеет такое свойство: для него существует счетная серия интегралов движения, которая представима в виде

$$I_n[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P_n(u, u_x, \ldots)dx, \tag{1.2}$$

т. е. эти интегралы не зависят от времени. Здесь $P_n(u, u_x, \ldots)$ — полином по u и пространственным производным от u. Первые три полинома имеют вид $P_1(u) = u$, $P_2(u) = u^2$, $P_3(u, u_x) = = u^3 + \frac{1}{2}\,u_x^2$. Впервые этот факт был отмечен в работах [1, 3], где указана общая процедура их построения. Другой подход к определению $P_n(u, u_x, ...)$ был развит Лаксом [4]. Захаров В. Е., Фадеев Л. Д. в работе [5] построили теорию уравнения КдФ, как вполне интегрируемой гамильтоновой системы. Они получили вид интегралов движения, выраженных через данные рассеяния. Была введена симплектическая структура на соответствующем многообразии и показано, что эти интегралы находятся в инволюции. Третий из них играет роль гамильтониана $H[u]$ для уравнения КдФ, представимого в виде

$$u_t = \frac{d}{dx}\,\frac{\delta H[u]}{\delta u}, \tag{1.3}$$

где символ $\frac{\delta}{\delta u}$ обозначает производную Фреше.

Отметим, что в работе [5] рассматривались убывающие при $x \to \pm\infty$ решения. В данной работе рассматриваются решения уравнения КдФ в классе неубывающих функций, а именно, решения u, стремящиеся к 0 при $x \to +\infty$ и к периодическому фону при $x \to -\infty$. В таком случае интегралы движения вида (1.2) расходятся. В работе построены „регуляризованные” интегралы движения, в которые явно входит время. Тем не менее уравнение КдФ представляется в гамильтоновом виде (1.3). Таким образом, в указанном классе неубывающих решений уравнение КдФ можно рассматривать как неавтономную гамильтонову динамическую систему.

Опишем кратко структуру статьи. Метод обратной задачи решения задачи Коши для уравнения КдФ использует представление Лакса $L_t = [A, L]$, где L — оператор Шредингера, а A — дифференциальный оператор третьего порядка. Поэтому во втором пункте приведены необходимые сведения из теории рассеяния для уравнения Шредингера и выведены асимптотические формулы для его решений. В третьем пункте установлена эволюция по времени данных рассеяния для оператора Шредингера, потенциал для которого является решением задачи Коши. Все это используется в четвертом пункте, где приведены „регуляризованные” интегралы движения для задачи Коши в классе решений, стремящихся к периодическому фону при $x \to -\infty$ и к 0 при $x \to +\infty$. Эти интегралы явно зависят от времени. В пятом пункте рассмотрены решения, стремящиеся к постоянному фону при $x \to -\infty$, и найдены интегралы движения, не зависящие явно от времени.

2. Необходимые сведения из теории рассеяния. Введем определения и обозначения, используемые в дальнейшем. Рассмотрим дифференциальное уравнение Хилла

$$-y'' + q_0(x)y = \lambda y, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{2.1}$$

с вещественным периодическим потенциалом $q_0(x)$:

$$q_0(x + a) = q_0(x).$$

Без ограничения общности будем считать, что $a = 1$. Пусть $\theta(x, \lambda), \phi(x, \lambda)$ — фундаментальная система решений уравнения (2.1), определенная начальными условиями

$$\theta(0, \lambda) = \phi'(0, \lambda) = 1, \quad \theta'(0, \lambda) = \phi(0, \lambda) = 0.$$

Следуя [6], обозначим $\phi = \phi(1, \lambda)$, $\phi' = \phi'(1, \lambda)$, $\theta = \theta(1, \lambda)$, $\theta' = \theta'(1, \lambda)$. Решения

$$\tilde{\psi}_{1,2}(x, \lambda) = \theta(x, \lambda) + m_{1,2}(\lambda)\phi(x, \lambda) \tag{2.2}$$

называются решениями Вейля. Здесь $m_{1,2}(\lambda) = \dfrac{\phi' - \theta}{2\phi} \pm \dfrac{\sqrt{F^2(\lambda) - 1}}{\phi}$ — функции Вейля, а $F(\lambda) = \dfrac{\phi' + \theta}{2}$ — дискриминант Хилла. Множество

$$\sigma = \{\lambda \colon \operatorname{Im} \lambda = 0, |F(\lambda)| \le 1\}$$

называется спектром оператора $L_0 = -\dfrac{d^2}{dx^2} + q_0(x)$ в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$. Для решений Вейля имеют место следующие представления [6, c. 348] :

$$\tilde{\psi}_{1,2}(x, \lambda) = \exp\left(\mp i\rho(\lambda)x\right) \chi_{12}(x),$$

где

$$\rho(\lambda) = i\ln\left(F(\lambda) + \sqrt{F^2(\lambda)-1}\right) = \arcsin\left(i\sqrt{F^2(\lambda)-1}\right),$$

$$\chi_{12}(x) \text{ — периодические функции с периодом } 1.$$

Предположим, что потенциал $q_0(x)$ имеет производные до порядка $n-2$ включительно, где $n > 2$ — любое фиксированное число. Уравнение Хилла (2.1) имеет линейно независимые решения $\tilde{y}(x, \pm\sqrt{\lambda})$ представимые в виде [7, с. 60] (Л.1.4.2)

$$\tilde{y}(x, \pm\sqrt{\lambda}) = \exp\left(\pm i\sqrt{\lambda}x + \int\limits_0^x \tilde{\sigma}(\xi, \pm\sqrt{\lambda})d\xi\right), \tag{2.3}$$

где

$$\tilde{\sigma}(x, \pm\sqrt{\lambda}) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\tilde{\sigma}_j(x)}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^j} + \frac{\tilde{\sigma}_n(x, \pm\sqrt{\lambda})}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^n}, \tag{2.4}$$

n — любое фиксированное натуральное число. При этом функции $\tilde{\sigma}_j(x)$, $1 \le j \le n-1$, определяются рекуррентными соотношениями

$$\begin{gathered} \tilde{\sigma}_1(x) = q_0(x), \\ \tilde{\sigma}_{j+1}(x) = -\tilde{\sigma}'_j(x) - \sum_{l=1}^{j-1} \tilde{\sigma}_{j-l}(x)\tilde{\sigma}_l(x), \end{gathered} \tag{2.5}$$

и при $|\lambda| \to +\infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$\tilde{\sigma}_n(x, \pm\sqrt{\lambda}) = \bar{o}(1) \tag{2.6}$$

равномерно по $x : |x| < N$, где $N = \mathrm{const}$, при $\operatorname{Im}\lambda \ge 0$.

Рассмотрим теперь уравнение Шредингера на всей оси:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{2.7}$$

с вещественным потенциалом $q(x)$, удовлетворяющим условиям

$$\int\limits_{-\infty}^0 (1+x^2)|q^{(j)}(x) - q_0^{(j)}(x)|dx < +\infty, \quad \int\limits_0^{+\infty} (1+x^2)|q^{(j)}(x)|dx < +\infty, \quad j = \overline{0, n}, \tag{2.8}$$

где $q_0(x)$ — вещественный периодический конечнозонный потенциал для уравнения Хилла (2.1) (см., например, [11, 12]). Известно, что уравнение (2.7) имеет линейно независимые решения вида [7, с. 162]

$$\phi_{1,2}(x, \lambda) = e^{\pm i\sqrt{\lambda}x} + \int\limits_x^{+\infty} K^+(x,y)e^{\pm i\sqrt{\lambda}y}dy, \quad \lambda > 0, \tag{2.9}$$

где ядро $K^+(x, y)$ не зависит от спектрального параметра, и для него справедлива оценка

$$|K^+(x,y)| \le \frac{1}{2}\, l\left(\frac{x+y}{2}\right)\exp\left(l_1(x) - l_1\left(\frac{x+y}{2}\right)\right),$$

$$l(x) = \int\limits_x^{+\infty} |q(y)|dy, \quad l_1(x) = \int\limits_x^{+\infty} |l(y)|dy.$$

Кроме того, $K^+(x,x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^{+\infty} |q(y)|dy$. В работе [9] доказано, что при $\lambda \in \operatorname{Int}\sigma$ существует фундаментальная система $\psi_{1,2}(x,\lambda)$ решений уравнения (2.7) вида

$$\psi_{1,2}(x,\lambda) = \tilde{\psi}_{1,2}(x,\lambda) + \int\limits_{-\infty}^{x} K^-(x,y)\tilde{\psi}_{1,2}(y,\lambda)dy, \tag{2.10}$$

где $\tilde{\psi}_{1,2}(x,\lambda)$ имеет вид (2.2), и для ядра $K^-(x,y)$ справедлива оценка

$$|K^-(x,y)| \le C(x)\int\limits_{-\infty}^{\frac{x+y}{2}} |q(\xi) - q_0(\xi)|d\xi. \tag{2.11}$$

Здесь $C(x)$ — непрерывная положительная монотонно убывающая функция при $x \to -\infty$. Функции $\phi_{1,2}(x,\lambda)$ составляют фундаментальную систему решений уравнения (2.7) при $\lambda > 0$, а функции $\psi_{1,2}(x,\lambda)$ — при $\lambda \in \operatorname{Int}\sigma$, поэтому они связаны равенствами

$$\begin{gathered}\psi_1(x,\lambda) = c_{11}(\lambda)\phi_1(x,\lambda) + c_{12}(\lambda)\phi_2(x,\lambda), \quad \lambda > 0,\\ \phi_1(x,\lambda) = c_{22}(\lambda)\psi_1(x,\lambda) + c_{21}(\lambda)\psi_2(x,\lambda), \quad \lambda \in \operatorname{Int}\sigma.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Введем еще одну пару линейно независимых решений $y(x,\pm\lambda)$ для уравнения Шредингера с потенциалом удовлетворяющим условиям (2.8). Это будет выполнено в лемме 2, доказательство которой существенно использует методы развитые в [8]. Сначала, получим необходимую уточненную асимптотическую формулу для функции Вейля $m_1(\lambda)$ при $|\lambda| \to +\infty$.

Лемма 2.1. *При* $|\lambda| \to \infty$, $\operatorname{Im}\lambda \ge 0$ *имеет место асимптотическая формула*

$$m_1(\lambda) = -i\sqrt{\lambda} + \tilde{\sigma}(0, -\sqrt{\lambda}) + \underline{O}(|\lambda^{-n/2}|), \tag{2.13}$$

где n *— любое фиксированное натуральное число, а функция* $\tilde{\sigma}(0,-\sqrt{\lambda})$ *определяется по формуле* (2.4).

Доказательство. Как показано в [6], функция $m_1(\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$m^2(\lambda) + \frac{\theta(\lambda) - \phi'(\lambda)}{\phi(\lambda)}m(\lambda) - \frac{\theta'(\lambda)}{\phi(\lambda)} = 0. \tag{2.14}$$

В силу (2.4) и (2.5) в рассматриваемом случае периодического конечнозонного потенциала $q_0(x)$ при любом натуральном n и $|\lambda| \to +\infty$ справедливо равенство

$$\tilde{\sigma}(1, -\sqrt{\lambda}) = \tilde{\sigma}(0, -\sqrt{\lambda}) + \overline{o}(|\lambda|^{-n/2}). \tag{2.15}$$

Подставляя функцию $\nu(\lambda) = -i\sqrt{\lambda} + \tilde{\sigma}(0, -\sqrt{\lambda})$ в левую часть уравнения (2.14) и учитывая соотношения (2.14), (2.15), убеждаемся, что $\nu(\lambda)$ является решением уравнения

$$\nu^2(\lambda) + \frac{\theta(\lambda) - \phi'(\lambda)}{\phi(\lambda)}\nu(\lambda) - \frac{\theta'(\lambda)}{\phi(\lambda)} = \underline{O}(|\lambda|^{-n/2+1}). \tag{2.16}$$

Вычтем из уравнения (2.14) с подстановкой $m(\lambda) = m_1(\lambda)$ уравнение (2.16):

$$(m_1(\lambda) - \nu(\lambda))(m_1(\lambda) + \nu(\lambda) + \frac{\theta(\lambda) - \phi'(\lambda)}{\phi(\lambda)}) = \underline{O}(|\lambda|^{-n/2+1}).$$

Устремим $|\lambda|$ к ∞ и воспользуемся асимптотиками из [6]:

$$m_1(\lambda) = -i\sqrt{\lambda} + \underline{O}(1),$$

$$\nu(\lambda) = -i\sqrt{\lambda} + \underline{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

$$\left|\frac{\theta(\lambda) - \phi'(\lambda)}{\phi(\lambda)}\right| = \underline{O}(1).$$

Тогда получим

$$m_1(\lambda) - \nu(\lambda) = \underline{O}(|\lambda|^{-n/2}).$$

Следовательно, справедлива следующая уточненная асимптотическая формула для функции Вейля:

$$m_1(\lambda) = -i\sqrt{\lambda} + \tilde{\sigma}(0, -\sqrt{\lambda}) + \underline{O}(|\lambda^{-n/2}|).$$

Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Уравнение Шредингера* (2.7) *с вещественным потенциалом* $q(x)$, *удовлетворяющим условиям* (2.8), *при достаточно больших* $\lambda \in \operatorname{Int}\sigma$ *имеет два линейно независимых решения* $y(x, \pm\sqrt{\lambda})$, *представимые в виде*

$$y(x, \pm\sqrt{\lambda}) = exp\left(\pm i\sqrt{\lambda}x + \int\limits_0^x \tilde{\sigma}(\xi, \pm\sqrt{\lambda})d\xi\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{n}\frac{w_j(x)}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^j} + \frac{w_{n+1}(x, \pm\sqrt{\lambda})}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^{n+1}}\right), \tag{2.17}$$

где функции $\tilde{\sigma}(x, \pm\sqrt{\lambda})$ *определяются формулами* (2.4), (2.5), *а функции* $w_j(x)$ *связаны рекуррентными соотношениями*

$$w_1'(x) = q(x) - q_0(x),$$

$$w_j'(x) = \sigma_j(x) - \tilde{\sigma}_j(x) + \sum_{l=1}^{j-1} w_l(x)(\sigma_{j-l}(x) - \tilde{\sigma}_{j-l}(x)), \quad j = \overline{2, n}, \tag{2.18}$$

$$w_{n+1}(x, \pm\sqrt{\lambda})\exp\left(\pm i\sqrt{\lambda}x + \int\limits_0^x \tilde{\sigma}(\xi, \pm\sqrt{\lambda})d\xi\right) =$$

$$= \pm 2i\sqrt{\lambda}\int_{-\infty}^{x} g_{n+1}(y,\lambda)\frac{\psi_1(x,\lambda)\psi_2(y,\lambda)-\psi_1(y,\lambda)\psi_2(x,\lambda)}{m_2(\lambda)-m_1(\lambda)}\,dy,$$

в которых функции $\sigma_j(x)$ определяются из рекуррентных соотношений (2.5) *при $\sigma_1(x) = q(x)$ и функции $w_j(x) \to 0$ при $x \to -\infty$, причем $g_{n+1}(y,\lambda) \in L_1(-\infty, 0]$.*

Доказательство. 1. Решения уравнения Хилла (2.1) $\tilde{y}(x, \pm\sqrt{\lambda})$ при достаточно больших $\lambda \in \operatorname{Int}\sigma$ и $\tilde{\psi}_{1,2}(x,\lambda)$ вида (2.2) и (2.3) соответственно образуют фундаментальные системы. Следовательно, одно из решений можно выразить в виде линейной комбинации других:

$$\tilde{y}(x, -\sqrt{\lambda}) = A(\lambda)\tilde{\psi}_1(x,\lambda) + B(\lambda)\tilde{\psi}_2(x,\lambda). \tag{2.19}$$

Подставkzz в это равенство, а также в соответствующее равенство для производной $\tilde{y}(x, -\sqrt{\lambda})$ значение $x = 0$ и учитывая лемму 2.1, получаем асимптотические равенства для коэффициентов $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$:

$$A(\lambda) = 1 + \underline{O}(|\lambda|^{-n/2}), \quad B(\lambda) = \underline{O}(|\lambda|^{-n/2}), \tag{2.20}$$

где n — любое фиксированное натуральное число.

2. Дифференцируя равенство (2.19) по x и учитывая (2.4), (2.5), имеем

$$\tilde{y}(x,-\sqrt{\lambda})(-i\sqrt{\lambda} + \tilde{\sigma}(x,-\sqrt{\lambda})) = A(\lambda)(-i\rho(\lambda))\tilde{\psi}_1(x,\lambda) + B(\lambda)(i\rho(\lambda))\tilde{\psi}_2(x,\lambda) +$$

$$+ A(\lambda)e^{-i\rho(\lambda)x}\chi_1'(x,\lambda) + B(\lambda)e^{i\rho(\lambda)x}\chi_2'(x,\lambda).$$

Поскольку равенства $\chi_1'(x,\lambda) = \overline{\chi_2'(x,\lambda)} = \underline{O}\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\right)$ и $\rho(\lambda) = \sqrt{\lambda} + \underline{O}(1)$ выполняются равномерно по x, то справедлива следующая оценка:

$$|\tilde{y}(x,-\sqrt{\lambda})\tilde{\sigma}(0,-\sqrt{\lambda})| \le \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{\lambda}} + \overline{o}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right). \tag{2.21}$$

3. Подставляя правую часть решения (2.3) в уравнение Хилла, убеждаемся, что функции $\tilde{\sigma}(x, \pm\sqrt{\lambda})$ удовлетворяют уравнениям

$$\tilde{\sigma}'(x,\pm\sqrt{\lambda}) \pm 2i\sqrt{\lambda}\tilde{\sigma}(x,\pm\sqrt{\lambda}) + \tilde{\sigma}^2(x,\pm\sqrt{\lambda}) = q_0(x). \tag{2.22}$$

Теперь подставим правую часть формулы (2.17) в уравнение (2.7). Тогда, учитывая (2.22), имеем

$$-\sum_{j=1}^{n}\frac{w_j''(x)}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^j} - \frac{w_{n+1}''(x,\pm\sqrt{\lambda})}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^{n+1}} - 2(\pm i\sqrt{\lambda} + \tilde{\sigma}(x,\pm\sqrt{\lambda}))\times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{w_j'(x)}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^j} + \frac{w_{n+1}'(x,\pm\sqrt{\lambda})}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^{n+1}}\right) +$$

$$+(q(x) - q_0(x))\left(1 + \sum_{j=1}^{n}\frac{w_j(x)}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^j} + \frac{w_{n+1}(x,\pm\sqrt{\lambda})}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^{n+1}}\right) = 0.$$

Раскрывая скобки, сдвигая индексацию суммирования, а затем приравнивая к нулю коэффициенты при степенях $(\pm 2i\sqrt{\lambda})^{-j}$, $j=\overline{0,n-1}$, получаем рекуррентные соотношения

$$\frac{1}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^0}: w_1'(x)=q(x)-q_0(x),$$

$$\frac{1}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^1}:\ -w_1''(x)-w_2'(x)+(q(x)-q_0(x))w_j(x)=0, \tag{2.23}$$

$$j=\overline{2,n-1}:\ -w_j''(x)w_{j+1}'(x)-2\sum_{l=1}^{j-1}w_l'(x)\tilde{\sigma}_{j-l}(x)+(q(x)-q_0(x))w_j(x)=0,$$

$$-\frac{w_n''(x)}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^n}-\frac{w_{n+1}''(x,\pm\sqrt{\lambda})}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^{n+1}}-2(\pm i\sqrt{\lambda}+\tilde{\sigma}(x,\pm\sqrt{\lambda}))\frac{w_{n+1}'(x,\pm\sqrt{\lambda})}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^{n+1}}-\frac{2w_n'(x)\tilde{\sigma}(x,\pm\sqrt{\lambda})}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^n}+$$

$$+(q(x)-q_0(x))\frac{w_n(x)}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^n}+(q(x)-q_0(x))\frac{w_{n+1}(x,\pm\sqrt{\lambda})}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^{n+1}}+$$

$$+\frac{P(w_1'(x),\ldots,w_n'(x),\tilde{\sigma}_1(x),\ldots,\tilde{\sigma}_n(x),\lambda)}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^n}=0. \tag{2.24}$$

Умножив равенство (2.24) на $\tilde{y}(x,\pm\sqrt{\lambda})$, получим дифференциальное уравнение для функции $v_{n+1}(x,\pm\sqrt{\lambda})\equiv w_{n+1}(x,\pm\sqrt{\lambda})\tilde{y}(x,\pm\sqrt{\lambda})$:

$$-v_{n+1}''(x,\pm\sqrt{\lambda})+q(x)v_{n+1}(x,\pm\sqrt{\lambda})-\lambda v_{n+1}(x,\pm\sqrt{\lambda})=\pm 2i\sqrt{\lambda}g_{n+1}(x,\pm\sqrt{\lambda}), \tag{2.25}$$

в котором функции $g_{n+1}(x,\pm\sqrt{\lambda})$ содержат оставшиеся слагаемые равенства (2.24). Учитывая, что $(1+|x|)P\in L_1(-\infty,0]$, и (2.21), имеем $g_{n+1}(x,\pm\sqrt{\lambda})\in L_1(-\infty,0]$. Следовательно, вводя функцию Грина

$$G(x,y,\lambda)=\frac{\psi_2(x,\lambda)\psi_1(y,\lambda)-\psi_2(y,\lambda)\psi_1(x,\lambda)}{m_2(\lambda)-m_1(\lambda)}$$

и учитывая, что $g_{n+1}(x,\pm\sqrt{\lambda})\in L_1(-\infty,0]$, получаем решение дифференциального уравнения (2.25) в виде

$$v_{n+1}(x,\pm\sqrt{\lambda})=\pm 2i\sqrt{\lambda}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{\psi_2(x,\lambda)\psi_1(y,\lambda)-\psi_2(y,\lambda)\psi_1(x,\lambda)}{m_2(\lambda)-m_1(\lambda)}g_{n+1}(y,\pm\sqrt{\lambda})dy,$$

стремящееся к 0 при $x\to-\infty$.

4. Равенство (2.18) докажем индукцией по j. При $j=1$ равенство очевидным образом справедливо. Пусть равенство (2.18) справедливо при $n=\overline{1,j}$. Вычисляя $w_{j+1}'(x)$, с помощью рекуррентных соотношений (2.23), получаем

$$w_{j+1}'(x)=-w_j''(x)-2\sum_{l=1}^{j-1}w_l'(x)\tilde{\sigma}_{j-l}(x)+(q(x)-q_0(x))w_j(x).$$

Подставляя $w'_j(x)$, а также используя рекуррентные соотношения (2.5), имеем

$$w'_{j+1}(x) = \sigma_{j+1}(x) - \tilde{\sigma}_{j+1}(x) + \sum_{l=1}^{j} w_l(x)(\sigma_{j+1-l}(x) - \tilde{\sigma}_{j+1-l}(x)). \tag{2.26}$$

Таким образом, лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. *Для коэффициента* $c_{11}(\lambda)$ *в соотношении* (2.12) *справедливо следующее асимптотическое равенство при* $|\lambda| \to +\infty$:

$$2i\sqrt{\lambda}c_{11}(\lambda) = (\tilde{\sigma}(0, -\sqrt{\lambda}) - \sigma(0, -\sqrt{\lambda}))\times$$

$$\times \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{w_j(0)}{(-2i\sqrt{\lambda})^j} + \frac{w_{n+1}(0, -\sqrt{\lambda})}{(-2i\sqrt{\lambda})^{n+1}} - \sum_{j=1}^{n} \frac{w'_j(0)}{(-2i\sqrt{\lambda})^j} - \frac{w'_{n+1}(0, -\sqrt{\lambda})}{(-2i\sqrt{\lambda})^{n+1}}\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\int\limits_0^{+\infty} \sigma(\xi, -\sqrt{\lambda})d\xi\right)(1 + \underline{O}(|\sqrt{\lambda}|^{-n/2})), \tag{2.27}$$

где n *— любое фиксированное натуральное число.*

Доказательство. Рассмотрим вронскиан $W(\psi_1, \phi_2)$, где $W(f,g) = fg' - f'g$. Учитывая первое из равенств (2.12) и то, что вронскиан не зависит от x, при $x = 0$ получаем

$$c_{11}(\lambda) = \frac{W(\psi_1(x,\lambda), \phi_2(x,\lambda))|_{x=0}}{2i\sqrt{\lambda}}. \tag{2.28}$$

Поскольку согласно лемме 2.2 $\psi_1(x,\lambda) = \tilde{A}(\lambda)y(x,-\sqrt{\lambda}) + \tilde{B}(\lambda)y(x,\sqrt{\lambda})$ и $\lim_{x\to-\infty}|y(x,\sqrt{\lambda}) - \tilde{y}(x,\sqrt{\lambda})| = \lim_{x\to-\infty}|y(x,-\sqrt{\lambda}) - \tilde{y}(x,-\sqrt{\lambda})| = 0$, то коэффициенты $\tilde{A}(\lambda)$ и $\tilde{B}(\lambda)$ совпадают с коэффициентами $\tilde{\tilde{A}}(\lambda)$ и $\tilde{\tilde{B}}(\lambda)$ в разложении $\tilde{\psi}_1(x,\lambda) = \tilde{\tilde{A}}(\lambda)\tilde{y}(x,-\sqrt{\lambda}) + \tilde{\tilde{B}}(\lambda)\tilde{y}(x,\sqrt{\lambda})$, т. е. для этих коэффициентов при любом фиксированном натуральном n справедливы такие же, как и в (2.20) асимптотические равенства при $|\lambda| \to \infty$,

$$\tilde{\tilde{A}}(\lambda) = 1 + \underline{O}(|\lambda|^{-n/2}), \quad \tilde{\tilde{B}}(\lambda) = \underline{O}(|\lambda|^{-n/2}). \tag{2.29}$$

Опираясь на задачу, приведенную в [7, с. 184], несложно показать, что решения $\phi_{1,2}(x,\lambda)$ уравнения (2.7) представимы в виде

$$\phi_{1,2}(x,\lambda) = \exp\left(\pm i\sqrt{\lambda}x - \int\limits_x^{+\infty} \sigma(\xi, \pm\sqrt{\lambda})d\xi\right), \tag{2.30}$$

где $\sigma(x, \pm\sqrt{\lambda})$ определяются по формулам (2.4), (2.5), в которых $\sigma_1(x) = q(x)$, а

$$\sigma_n(x, \pm\sqrt{\lambda}) = \int\limits_0^{+\infty} \sigma_{n+1}(x+\xi)e^{\pm 2i\sqrt{\lambda}\xi}d\xi + \frac{1}{\pm 2i\sqrt{\lambda}} \int\limits_0^{+\infty} \tilde{K}_n(x,\xi)e^{\pm 2i\sqrt{\lambda}\xi}d\xi + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Здесь

$$\int\limits_0^{+\infty} (|\sigma_{n+1}(x+\xi)| + |\tilde{K}_{n+1}(x,\xi)|)d\xi < \infty.$$

Подставляя (2.29) и (2.30) в (2.28), приходим к асимптотическому равенству (2.27) для коэффициента $c_{11}(\lambda)$.

Лемма 2.3 доказана.

3. Задача Коши для уравнения КдФ. Рассмотрим задачу Коши для уравнения КдФ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \tag{3.1}$$

с вещественной начальной функцией $u_0(x)$, удовлетворяющей условиям

$$\lim_{x\to-\infty} |u_0(x) - v_0(x)| = \lim_{x\to+\infty} u_0(x) = 0, \tag{3.2}$$

где $v_0(x)$ — периодический вещественный конечнозонный потенциал с периодом $a = 1$ для уравнения Хилла. Пусть $v(x,t)$ — периодическое решение уравнения КдФ с начальной функцией $v(x,0) = v_0(x)$ (существование $v(x,t)$ доказано в [7]). В [10] доказано, что при соответствующем выборе начальной функции $u_0(x)$ задача (3.1), (3.2) имеет решения Шварцовского типа V, обладающие свойствами

$$\max_{|t|\le T} \int\limits_{-\infty}^{0} (1+|x|^m) \left|\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j} - \frac{\partial^j v(x,t)}{\partial x^j}\right| dx < +\infty,$$

$$\max_{|t|\le T} \int\limits_0^{+\infty} (1+x^m) \left|\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j}\right| dx < +\infty, \quad j,m = 0,1,2,\ldots,$$

при всех неотрицательных значениях T.

Лемма 3.1. *Если в уравнении Шредингера вида (2.7) потенциал $u(x,t)$ является решением задачи Коши* (3.1), (3.2), *принадлежащим классу V, то закон изменения во времени $c_{12}(\lambda,t)$ задается формулой*

$$c_{12}(\lambda,t) = c_{12}(\lambda,0)\exp\left(-4i(\sqrt{\lambda})^3 t + \int\limits_0^t \left(-2\left(v(0,\tau)+2\lambda\right) m_1(\lambda,\tau) + \frac{\partial v(0,\tau)}{\partial x}\right) d\tau\right). \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть потенциалы $u(x,t)$ — семейства уравнений (2.7) являются решениями уравнения КдФ, принадлежащими классу V. Оператор $M = \dfrac{\partial}{\partial t} - 2(u(x,t)+2\lambda)\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ преобразует дифференцируемые по t решения уравнения Шредингера типа (2.7) в решения этого же уравнения [7, с. 287]. 1. Рассмотрим решения $\psi_{1,2}(x,\lambda,t)$ вида (2.2) и покажем, что

$$M[\psi_{1,2}(x,\lambda,t)] = \left[-2(v(0,t)+2\lambda)m_{1,2}(\lambda,t) + \frac{\partial v(0,t)}{\partial x}\right]\psi_{1,2}(x,\lambda,t). \tag{3.4}$$

Для определенности рассмотрим $M_1[\psi_1(x,\lambda,t)]$. В силу леммы [7, с. 287] при $\lambda\in\operatorname{Int}\sigma$ имеем

$$M[\psi_1]=A(\lambda,t)\psi_1(x,\lambda,t)+B(\lambda,t)\psi_2(x,\lambda,t).$$

Полагая в последнем соотношении $x=-n$ и устремив $n\to+\infty$, n к $\mathbb{N}$, из равенства (2.10) вследствие периодичности функций $v(x,t)$, $\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}$, получаем асимптотическое равенство

$$\frac{\partial\tilde\psi_1(-n,\lambda,t)}{\partial t}-2(v(0,t)+2\lambda)\frac{\partial\tilde\psi_1(-n,\lambda,t)}{\partial x}+\frac{\partial v(0,t)}{\partial x}\,\tilde\psi_1(-n,\lambda,t)=$$

$$=A(\lambda,t)\tilde\psi_1(-n,\lambda,t)+B(\lambda,t)\tilde\psi_2(-n,\lambda,t). \tag{3.5}$$

Согласно [6, с. 348] имеем

$$\tilde\psi_{1,2}(-n,\lambda,t)=\left(F(\lambda)+\sqrt{F^2(\lambda)-1}\right)^{\pm n},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\tilde\psi_{1,2}(-n,\lambda,t)=\left(F(\lambda)+\sqrt{F^2(\lambda)-1}\right)^{\pm n}m_{1,2}(\lambda,t).$$

Поскольку функция $\left(F(\lambda)+\sqrt{F^2(\lambda)-1}\right)^{n}$ не зависит от t, то соотношение (3.5) принимает вид

$$-2(v(0,t)+2\lambda)m_1(\lambda,t)\left(F(\lambda)+\sqrt{F^2(\lambda)-1}\right)^{n}+\frac{\partial v(0,t)}{\partial x}\left(F(\lambda)+\sqrt{F^2(\lambda)-1}\right)^{n}=$$

$$=A(\lambda,t)\left(F(\lambda)+\sqrt{F^2(\lambda)-1}\right)^{n}+B(\lambda,t)\left(F(\lambda)+\sqrt{F^2(\lambda)-1}\right)^{-n}.$$

Отсюда, учитывая, что $F(\lambda)+\sqrt{F^2(\lambda)-1}\neq\pm1$, при $\lambda\in\operatorname{Int}\sigma$ находим

$$A(\lambda,t)=-2(v(0,t)+2\lambda)m_1(\lambda,t)+\frac{\partial v(0,t)}{\partial x},\quad B(\lambda,t)=0,$$

и, следовательно, (3.4) доказано.

2. Учитывая, что $c_{12}(\lambda,t)\neq0$, записываем первое равенство (2.12) в виде

$$\frac{\psi_1(x,\lambda,t)}{c_{12}(\lambda,t)}=\frac{c_{11}(\lambda,t)}{c_{12}(\lambda,t)}\,\phi_1(x,\lambda)+\phi_2(x,\lambda,t),\quad \lambda>0. \tag{3.6}$$

Применяя оператор M к левой и правой частям этого равенства, и учитывая соотношения (3.4) и $M[\phi_{1,2}(x,\lambda,t)]=\mp4i(\sqrt{\lambda})^3\phi_{1,2}(x,\lambda,t)$ [7, с. 297], находим

$$M\left[\frac{\psi_1(x,\lambda,t)}{c_{12}(\lambda,t)}\right]=\frac{\psi_1(x,\lambda,t)}{c_{12}(\lambda,t)}\left(c_{12}(\lambda,t)\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{c_{12}(\lambda,t)}+\right.$$

$$\left.+\left(-2(v(0,t)+2\lambda)m_1(\lambda,t)+\frac{\partial v(0,x)}{\partial x}\right)\right), \tag{3.7}$$

$$M\left[\frac{c_{11}(\lambda,t)}{c_{12}(\lambda,t)}\,\phi_1(x,\lambda,t)+\phi_2(x,\lambda,t)\right]=\frac{c_{11}(\lambda,t)}{c_{12}(\lambda,t)}\,\phi_1(x,\lambda,t)\times$$

$$\left(\frac{c_{12}(\lambda,t)}{c_{11}(\lambda,t)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c_{11}(\lambda,t)}{c_{12}(\lambda,t)}\right)-4i(\sqrt{\lambda})^3\right)+4i(\sqrt{\lambda})^3\phi_2(x,\lambda,t).$$

Вследствие линейной независимости функций $\phi_1(x,\lambda,t)$ и $\phi_2(x,\lambda,t)$, сравнивая соотношения (3.7) с (3.6), приходим к дифференциальному уравнению для коэффициента $c_{12}(\lambda,t)$:

$$c_{12}(\lambda,t)\,\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{c_{12}(\lambda,t)}=2(v(0,t)+2\lambda)m_1(\lambda,t)-\frac{\partial v(0,t)}{\partial x}+4i(\sqrt{\lambda})^3.$$

Интегрируя это уравнение, получаем формулу (3.3).

Лемма 3.1 доказана.

4. Регуляризованные интегралы движения. Покажем, что существует бесконечная серия интегралов движения для решения $u(x,t)$ задачи Коши (3.1), (3.2). Положим

$$Q(x,-\sqrt{\lambda},t)\equiv\frac{d}{dx}\,\ln\left(1+\sum_{j=1}^{n}\frac{w_j(x,t)}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^j}+\frac{w_{n+1}(x,\pm\sqrt{\lambda},t)}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^{n+1}}\right),$$

где $w_j(x,t)$ определяются в виде (2.18). Тогда решения $y(x,-\sqrt{\lambda},t)$ и $\phi_2(x,\sqrt{\lambda},t)$, определенные в лемме 2.2 и соотношении (2.30), принимаем вид

$$y(x,-\sqrt{\lambda},t)=\exp\left(-i\sqrt{\lambda}x+\int\limits_0^x\tilde{\sigma}(\xi,-\sqrt{\lambda},t)d\xi+\int\limits_{-\infty}^x Q(\xi,-\sqrt{\lambda},t)d\xi\right),\tag{4.1}$$

$$\phi_2(x,\lambda,t)=\exp\left(-i\sqrt{\lambda}x-\int\limits_x^{+\infty}\sigma(\xi,-\sqrt{\lambda},t)d\xi\right).\tag{4.2}$$

Функции $\sigma(x,-\sqrt{\lambda},t),\tilde{\sigma}(x,-\sqrt{\lambda},t)$ при $|\lambda|\to+\infty$ разлагаются в асимптотические ряды

$$\tilde{\sigma}(x,-\sqrt{\lambda},t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\tilde{\sigma}_j(x,t)}{(-2i\sqrt{\lambda})^j},\qquad \sigma(x,-\sqrt{\lambda},t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sigma_j(x,t)}{(-2i\sqrt{\lambda})^j}.$$

где $\tilde{\sigma}_j(x,t)$ и $\sigma_j(x,t)$ удовлетворяют соотношениям вида (2.4), (2.5) при $\tilde{\sigma}_1(x,t)=v(x,t)$ и $\sigma_1(x,t)=u(x,t)$. Подставляя (4.1) в уравнение Шредингера, получаем, что функция $Q(x,-\sqrt{\lambda},t)$ удовлетворяет уравнению

$$Q'(x,-\sqrt{\lambda},t)-2i\sqrt{\lambda}Q(x,-\sqrt{\lambda},t)+2\tilde{\sigma}(x,-\sqrt{\lambda},t)Q(x,-\sqrt{\lambda},t)+$$

$$+Q^2(x,-\sqrt{\lambda},t)=u(x,t)-v(x,t).$$

Отсюда следует, что функция $Q(x,-\sqrt{\lambda},t)$ при $|\lambda|\to+\infty$ разлагается в асимптотический ряд

$$Q(x,-\sqrt{\lambda},t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{Q_j(x,t)}{(-2i\sqrt{\lambda})^j},$$

в котором коэффициенты представляются в виде

$$Q_1(x,t) = u(x,t) - v(x,t),$$

$$Q_{j+1}(x,t) = -Q'_j(x,t) - 2\sum_{l=1}^{j-1}\tilde{\sigma}_l(x,t)Q_{j-l}(x,t) - \sum_{l=1}^{j-1}Q_{j-l}(x,t)Q_l(x,t). \tag{4.3}$$

Рассмотрим первое равенство вида (2.12):

$$\psi_1(x,\lambda,t) = c_{11}(\lambda,t)\phi_1(x,\lambda,t) + c_{12}\phi_2(x,\lambda,t), \quad \lambda > 0. \tag{4.4}$$

Из формул вида (2.19) и (2.20) получаем асимптотическую формулу

$$\psi_1(x,\lambda,t) = y(x,-\sqrt{\lambda},t)(1 + \underline{O}(|\lambda|^{-n/2})),$$

где n — любое фиксированное натуральное число. Из соотношений (2.18) и (2.27), в случае когда $u(x,t) \in V$, получаем, что при $|\lambda| \to \infty$ функция $c_{11}(\lambda,t)$ стремится к нулю быстрее любой степени $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Тогда из (4.4) получаем асимптотическое равенство

$$y(x,-\sqrt{\lambda},t) = c_{12}(\lambda,t)\phi_2(x,\lambda,t) + \underline{O}(|\lambda|^{-n/2}).$$

Выразим в этом равенстве $c_{12}(\lambda,t)$ через $c_{12}(\lambda,0)$ согласно лемме 3.1. Учитывая вид решений (4.1), (4.2) и асимптотическую формулу в лемме 2.1, имеем

$$\exp\left(-i\sqrt{\lambda}x + \sum_{j=1}^{+\infty}\int_0^x \frac{\tilde{\sigma}_j(\xi,t)d\xi}{(-2i\sqrt{\lambda})^j} + \sum_{j=1}^{+\infty}\int_{-\infty}^x \frac{Q_j(\xi,t)}{(-2i\sqrt{\lambda})^j}d\xi\right) =$$

$$= c_{12}(\lambda,0)\exp\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\int_0^t \frac{-2v(0,\tau)\tilde{\sigma}_j(0,\tau) + \tilde{\sigma}_{j+2}(0,\tau)}{(-2i\sqrt{\lambda})^j}\,d\tau - \sum_{j=1}^{+\infty}\int_x^{\infty}\frac{\sigma_j(\xi,t)}{(-2i\sqrt{\lambda})^j}\,d\xi - i\sqrt{\lambda}x\right).$$

Полагая в этом равенстве $x = 0$ и разлагая $\ln c_{12}(\lambda,0)$ в ряд по степеням $-2i\sqrt{\lambda}$, получаем

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^0 \frac{Q_j(\xi,t)}{(-2i\sqrt{\lambda})^j}\,d\xi + \int_0^{+\infty}\frac{\sigma_j(\xi,t)}{(-2i\sqrt{\lambda})^j}\,d\xi\; + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^t \frac{2v(0,\tau)\tilde{\sigma}_j(0,\tau) - \tilde{\sigma}_{j+2}(0,\tau)}{(-2i\sqrt{\lambda})^j}\,d\tau\right)\right) = \exp\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{c_j}{(-2i\sqrt{\lambda})^j}\right).$$

Сравнивая левую и правую части этого равенства при одинаковых степенях $-2i\sqrt{\lambda}$ имеем

$$I_j[u,t] = \int_{-\infty}^0 Q_j(\xi,t)d\xi + \int_0^{+\infty}\sigma_j(\xi,t)d\xi +$$

$$+\int_0^t (2v(0,\tau)\tilde{\sigma}_j(0,\tau) - \tilde{\sigma}_{j+2}(0,\tau))d\tau = c_j, \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{4.5}$$

Таким образом, $\dfrac{dI_j[u,t]}{dt} = 0$, т. е. $I_j[u,t]$ — интегралы движения, хотя они явно зависят от времени. Исходя из рекуррентных соотношений вида (2.5) и (4.3), нетрудно убедиться, что подынтегральные выражения $I_j[u,t]$ при четных j являются полными производными. Запишем интегралы движения $I_j[u,t]$, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, в явном виде

$$I_1[u,t] = \int_{-\infty}^{0} (u(\xi,t) - v(\xi,t))\, d\xi + \int_0^{\infty} u(\xi,t)d\xi + \int_0^t \left(3v^2(0,\tau) - v_{\xi\xi}(0,\tau)\right) d\tau,$$

$$I_2[u,t] = v(0,0),$$

$$I_3[u,t] = \int_{-\infty}^{0} \left(-u^2(\xi,t) + v^2(\xi,t) + u_{\xi\xi}(\xi,t) - v_{\xi\xi}(\xi,t)\right) d\xi + \int_0^{\infty} \left(-u^2(\xi,t) + u_{\xi\xi}(\xi,t)\right) d\xi +$$

$$+\int_0^t \left(-4v^3(0,\tau) + 8v(0,\tau)v_{\xi\xi}(0,\tau) + 5v_\xi^2(0,\tau) - v^{(4)}(0,\tau)\right) d\tau,$$

$$I_4[u,t] = -2v^2(0,0) + v_{xx}(0,0),$$

$$I_5[u,t] = \int_{-\infty}^{0} \left(2u^3(\xi,t) - 2v^3(\xi,t) + u_\xi^2(\xi,t) - v_\xi^2(\xi,t) + u^{(4)}(\xi,t) - v^{(4)}(\xi,t)\right) d\xi +$$

$$+\int_0^{\infty} \left(2u^3(\xi,t) + u_\xi^2(\xi,t) + u^{(4)}(\xi,t)\right) d\xi +$$

$$+\int_0^t \Big(9v^4(0,\tau) - 42v^2(0,\tau)v_{\xi\xi}(0,\tau) - 60v(0,\tau)v_\xi^2(0,\tau) + 12v(0,\tau)v^{(4)}(0,\tau) -$$

$$+\, 28v_\xi(0,\tau)v^{(3)}(0,\tau) + 19v_{\xi\xi}^2(0,\tau) - v^{(6)}(0,\tau)\Big)\, d\tau,$$

$$I_6[u,t] = \frac{16}{3}\, v^3(0,0) - 8vv_{xx}(0,0) - 5v_x^2(0,0) + v^{(4)}(0,0).$$

Нетрудно убедиться, что уравнение КдФ представимо в виде

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dx}\, \frac{\delta I_5[u,t]}{\delta u},$$

где символ $\dfrac{\delta}{\delta u}$ обозначает производную Фреше.

5. Регуляризованные интегралы движения для постоянного фона. Рассмотрим случай, когда решения задачи Коши стремятся к постоянному фону при $x \to -\infty$, т. е. $v(x,t) = c = \mathrm{const}$. Тогда, учитывая (4.5) и рекуррентные соотношения (2.5), нетрудно убедиться, что нечетные интегралы движения зависят от времени явно по линейному закону. Первые семь интегралов имеют вид

$$I_1[u,t] = \int\limits_{-\infty}^{0} (u(\xi,t) - c)\, d\xi + \int\limits_{0}^{\infty} u(\xi,t) d\xi + 3c^2 t, \quad I_2[u,t] = c,$$

$$I_3[u,t] = \int\limits_{-\infty}^{0} \left(-u^2(\xi,t) + c^2\right) d\xi + \int\limits_{0}^{\infty} \left(-u^2(\xi,t)\right) d\xi - 4c^3 t, \quad I_4[u,t] = -2c^2,$$

$$I_5[u,t] = \int\limits_{-\infty}^{0} \left(2u^3(\xi,t) + u_\xi^2(\xi,t) - 2c^3\right) d\xi + \int\limits_{0}^{\infty} \left(2u^3(\xi,t) + u_\xi^2(\xi,t)\right) d\xi + 9c^4 t,$$

$$I_6[u,t] = \frac{16}{3}\, c^3,$$

$$I_7[u,t] = \int\limits_{-\infty}^{0} \left(-5u^4(\xi,t) - 10u(\xi,t)(u'_\xi(\xi,t))^2 - (u''_{\xi\xi}(x,t))^2 + 5c^4\right) d\xi +$$

$$+ \int\limits_{0}^{\infty} \left(-5u^4(\xi,t) - 10u(\xi,t)(u'_\xi(\xi,t))^2 - (u''_{\xi\xi}(x,t))^2\right) d\xi - 24c^5 t.$$

Учитывая это, легко построить последовательность интегралов, не зависящую явно от времени. Запишем три первых из них:

$$J_1[u] = I_3[u,t] + \frac{4}{3}\, cI_1[u,t] = \int\limits_{-\infty}^{0} \left(-u^2(\xi,t) + \frac{4}{3}\, cu(\xi,t) - \frac{1}{3}\, c^2\right) d\xi +$$

$$+ \int\limits_{0}^{\infty} \left(-u^2(\xi,t) + \frac{4}{3}\, cu(\xi,t)\right) d\xi,$$

$$J_2[u] = I_5[u,t] - 3c^2 I_1[u,t] = \int\limits_{-\infty}^{0} \left(2u^3(\xi,t) - 3c^2 u(\xi,t) + u_\xi^2(\xi,t) + c^3\right) d\xi +$$

$$+ \int\limits_{0}^{\infty} \left(2u^3(\xi,t) - 3c^2 u(\xi,t) + u_\xi^2(\xi,t)\right) d\xi,$$

$$J_3[u] = I_7[u,t] + 8c^3 I_1[u,t] =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} \left(-5u^4(\xi,t) - 10u(\xi,t)u_\xi^2(\xi,t) + 8c^3u(\xi,t) - u_{\xi\xi}^2(\xi,t) - 3c^4\right) d\xi +$$

$$+ \int\limits_{0}^{\infty} \left(-5u^4(\xi,t) - 10u(\xi,t)u_\xi^2(\xi,t) + 8c^3u(\xi,t) - u_{\xi\xi}^2(\xi,t)\right) d\xi.$$

Легко проверить, что решение задачи Коши может быть представлено в гамильтоновой форме

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dx}\frac{\delta J_2[u]}{\delta u}.$$

В дальнейшем интегралы движения $J_j[u]$, $j = 1,2,3,\ldots$, будут выражены через данные рассеяния и построена симплектическая структура.

1. *Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.* Method for solving the Korteweg – de Vries equation // Phys. Rev. Lett. – 1967. – **19**. – P. 1095 – 1097.
2. *Miura R. M., Gardner C. S., Kruskal M. D.* Kortewed – de Vries equation and generelizations, II. Extistence of conversation laws and constants motion // J. Math. Phys. – 1968. – **9**, № 8. – P. 1204 – 1209.
3. *Kruskal M. D., Miura R. M., Gardner C. S., Zabusky N. J.* Korteweg – de Vries equation and generalizations. V. Uniqueness and nonexistense of polynomial conservation laws // J. Math. Phys. – 1970. – **11**, № 3. – P. 952 – 960.
4. *Lax P. D.* Integrals of nonlinear equations and solitary waves // Communs Pure and Appl. Math. – 1968. – **21**, № 2. – P. 467 – 490.
5. *Захаров В. Е. , Фаддеев Л. Д.* Уравнение Кортевега – де Фриса — вполне интегрируемая гамильтонова система // Функцион. анализ и его прил. – 1971. – **5**, № 4. – P. 18 – 27.
6. *Титчмарш Э. Ч.* Разложение по собственным функциям, связанным с дифференциальными уравнения второго порядка: В 2 т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – Т. 2. – 555 с.
7. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977.
8. *Ермакова В. Д.* Дис. Обратная задача рассеяния для уравнения Шредингера с неубывающим потенциалом и ее применение к интегрированию уравнения Кортевега – де Фриза: Дис... канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1983.
9. *Фирсова Н. Е.* Обратная задача рассеяния для возмущенного оператора Хилла // Мат. заметки — 1974. – **18**, № 6. – С. 831 – 843.
10. *Egorova I., Teshl G.* On the Cauchy problem for the Korteweg – de Vries equation with steplike finite-gap initial data II. Perturbations with finite moments // J. d'Anal. Math. – 2011. – **115**, № 1. – P. 71 – 101.
11. *Новиков С. П.* Периодическая задача для уравнения Кортевега – де Фриза // Функцион. анализ и его прил. – 1974. – **8**, вып. 3. – P. 54 – 66.
12. *Марченко В. А.* Периодическая задача Кортевега – де Фриза // Мат. сб., 1974 — **8**, вып. 3. – С. 331 – 356.

Получено 25.11.14