УДК 517.925.52

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІ ТА СТІЙКІ ЗА ПУАССОНОМ РОЗВ'ЯЗКИ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ У МЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ

We introduce a new class of almost periodic operators and establish the conditions of existence of almost periodic and Poisson stable solutions of difference equations in metric spaces that can be not almost periodic in Bochner's sense.

Введен новый класс почти периодических операторов, а также получены условия существования почти периодических и устойчивых по Пуассону решений разностных уравнений в метрическом пространстве, которые могут не быть почти периодическими по Бохнеру.

1. Основні позначення, означення та об'єкт досліджень. Нехай M — метричний простір із метрикою ρ_M, $\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел, $\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел і $\mathbb{N}$ — множина всіх натуральних чисел. Зафіксуємо довільний елемент $m \in M$. Позначимо через $\mathfrak{C}$ метричний простір усіх неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в M, для кожної з яких

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \rho_M(x(t), m) < \infty,$$

з метрикою

$$\rho(x_1, x_2) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \rho_M(x_1(t), x_2(t)).$$

У просторі $\mathfrak{C}$ визначимо оператор зсуву S_h, $h \in \mathbb{R}$, за допомогою формули

$$(S_h x)(t) = x(t+h), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Означення 1. *Функція $y \in \mathfrak{C}$ називається майже періодичною (за Бохнером) (див.* [1, 2]), *якщо замикання множини $\{S_h y\colon h \in \mathbb{R}\}$ у просторі $\mathfrak{C}$ є компактною підмножиною цього простору.*

Множина $\mathfrak{B}$ майже періодичних елементів простору $\mathfrak{C}$ є підпростором цього простору з метрикою $\rho_{\mathfrak{C}}$.

Нехай $B[a, r]$ — замкнена куля у просторі $\mathfrak{C}$ з центром у точці $a \in \mathfrak{C}$ радіуса r, тобто множина $\{x \in \mathfrak{C}\colon \rho_{\mathfrak{C}}(x, a) \le r\}$.

Означення 2. *Оператор $H : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ називається майже періодичним, якщо для кожних функції $a \in \mathfrak{C}$, числа $r > 0$ і послідовності $(h_k)_{k\ge1}$ дійсних чисел існує така підпослідовність $(h_{k_l})_{l\ge1}$, що*

$$\lim_{\substack{l_1\to\infty \\ l_2\to\infty}} \sup_{x\in B[a,r]} \rho_{\mathfrak{C}}\left(S_{h_{l_1}} H S_{-h_{l_1}} x, S_{h_{l_2}} H S_{-h_{l_2}} x\right) = 0.$$

Це означення у випадку лінійного майже періодичного оператора H рівносильне означенню, що використовувалось Є. Мухамадієвим при дослідженні оборотності лінійних функціональних операторів у просторі обмежених на $\mathbb{R}$ функцій зі значеннями у скінченновимірному банаховому просторі [3, 4].

Нехай $\mathcal{K}$ — множина всіх непорожніх компактних підмножин $K \subset M$ і $R(x)$ — множина значень функції $x = x(t)$, тобто множина $\{x(t)\colon t \in \mathbb{R}\}$. Для компактної множини $K \subset \mathcal{K}$ позначимо через $\mathfrak{D}_K$ множину всіх функцій $x \in \mathfrak{C}$, для кожної з яких $R(x) \subset K$.

У подальшому будемо використовувати наступне означення майже періодичного оператора.

Означення 3. *Оператор $H : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ називається майже періодичним, якщо для кожних множини $K \in \mathcal{K}$ і послідовності $(h_k)_{k\geq 1}$ дійсних чисел існує така підпослідовність $(h_{k_l})_{l\geq 1}$, що*

$$\lim_{l_1\to\infty,\ l_2\to\infty} \sup_{x\in\mathfrak{D}_K} \rho_{\mathfrak{C}}\left(S_{h_{l_1}} H S_{-h_{l_1}} x, S_{h_{l_2}} H S_{-h_{l_2}} x\right) = 0.$$

Зазначимо, що майже періодичний за означенням 3 оператор H може не бути майже періодичним за означенням 2 (відповідний приклад наведено в пункті 2). Однак майже періодичний за означенням 2 оператор H є майже періодичним і за означенням 3.

Позначимо через Ω множину всіх числових послідовностей $(\omega_n)_{n\geq 1}$, кожна з яких прямує до $+\infty$ або $-\infty$.

Означення 4. *Функція $y \in \mathfrak{C}$ називається стійкою за Пуассоном, якщо існує послідовність $(\omega_n)_{n\geq 1} \in \Omega$, для якої*

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{\mathfrak{C}}(y, S_{\omega_n} y) = 0.$$

Очевидно, що кожна майже періодична функція $x \in \mathfrak{C}$ є стійкою за Пуассоном.

Означення 5. *Оператор $H : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ називається стійким за Пуассоном, якщо для кожної множини $K \in \mathcal{K}$ існує залежна від цієї множини послідовність $(\omega_n)_{n\geq 1} \in \Omega$, для якої*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathfrak{D}_K} \rho_{\mathfrak{C}}(Hx, S_{\omega_n} H S_{-\omega_n} x) = 0.$$

Очевидно, що кожний майже періодичний оператор $H : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ є стійким за Пуассоном.

Розглянемо різницевий оператор $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$, що визначається за допомогою формули

$$(\mathcal{F}x)(t) = F(t, x(t), x(t+h_1), \ldots, x(t+h_k)), \quad t \in \mathbb{R},$$

де $x \in \mathfrak{C}$, $k \in \mathbb{N}$, $h_1, \ldots, h_k \in \mathbb{R}$ і $F : \mathbb{R} \times M^{k+1} \to M$ — відображення, для якого множина $F(\mathbb{R} \times M_1 \times \ldots \times M_{k+1})$ є обмеженою для всіх обмежених множин $M_1, \ldots, M_{k+1} \subset M$. Оператору $\mathcal{F}$ поставимо у відповідність різницеве рівняння

$$\mathcal{F}x = h, \tag{1}$$

де $h \in \mathfrak{C}$.

Зазначимо, що оператор $\mathcal{F}$ може не бути неперервним.

Метою статті є встановлення умов, при виконанні яких обмежені розв'язки рівняння (1) є майже періодичними або стійкими за Пуассоном. При дослідженні рівняння (1) будемо використовувати один функціонал, визначений на множині розв'язків цього рівняння, множини значень яких є підмножинами компактних множин.

2. Приклад майже періодичного за означенням 3 оператора, що не є майже періодичним за означенням 2. Нехай метричний простір M є таким, що існують функція $y \in \mathfrak{C}$ і число $\mu > 0$, для яких:

1) $y(t) = y(1)$ для всіх $t < 1$;

2) $\rho_M(y(n_1), y(n_2)) \geq \mu$, якщо $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ і $n_1 \neq n_2$.

Таким простором є кожний нескінченновимірний банаховий простір E, якщо метрику ρ визначити за допомогою формули

$$\rho(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in E$$

(див. [5, с. 203]).

Розглянемо множину $\mathfrak{S}$ усіх функцій $x \in \mathfrak{C}$, замикання множин значень яких є компактними підмножинами простору M.

Зафіксуємо довільний елемент c простору M і розглянемо функцію $b = b(t)$, для якої

$$b(t) \equiv c.$$

Визначимо оператор $\mathcal{G} \colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ за допомогою рівності

$$\mathcal{G}x = \begin{cases} b, & \text{якщо} \quad x \in \mathfrak{S}, \\ y, & \text{якщо} \quad x \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{S}. \end{cases}$$

Очевидно, що для кожної компактної множини $K \subset M$

$$\{S_h \mathcal{G} S_{-h} x \colon h \in \mathbb{R}, x \in \mathfrak{D}_K\} = \{S_h \mathcal{G} S_{-h} x \colon h \in \mathbb{R}, x \in \mathfrak{S}\} = \{b\}.$$

Тому оператор $\mathcal{G} \colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ є майже періодичним у сенсі означення 3. Однак цей оператор не є майже періодичним у сенсі означення 2. Справді, зафіксуємо довільну функцію $z \in \mathfrak{C} \setminus \mathfrak{S}$. Очевидно, що

$$S_h \mathcal{G} S_{-h} z = S_h y \tag{2}$$

для кожного $h \in \mathbb{R}$. Тому

$$\rho_{\mathfrak{C}}(S_{m_1} y, S_{m_2} y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \rho_M(y(t + m_1), y(t + m_2)) \geq \rho_M(y(m_1), y(m_2)) \geq \mu,$$

якщо $m_1 \neq m_2$ і $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$.

Отже, якщо $m_1 \neq m_2$ і $\{S_h z \colon h \in \mathbb{R}\} \subset B[b, r]$ (r — деяке додатне число), то

$$\sup_{x \in B[b,r]} \rho_{\mathfrak{C}} \left(S_{m_1} \mathcal{G} S_{-m_1} x, S_{m_2} \mathcal{G} S_{-m_2} x\right) \geq \mu > 0.$$

Звідси та із співвідношення (2) випливає, що оператор $\mathcal{G}$ не є майже періодичним у сенсі означення 2.

3. Функціонал $\boldsymbol{\delta}$. Зафіксуємо довільну множину $K \in \mathcal{K}$. Позначимо через $N(\mathcal{F}, K)$ множину всіх розв'язків рівняння (1), для кожного з яких $R(x) \subset K$. Вважатимемо, що

$$N(\mathcal{F}, K) \neq \varnothing.$$

Розглянемо функцію $x^* \in N(\mathcal{F}, K)$, для якої

$$\sup \left\{ \rho_M(x, y) \colon x, y \in \overline{R(x^*)} \right\} \neq 0,$$

і додатне число

$$r(x^*, K) = \sup \left\{ \rho_M(x, y) \colon x \in \overline{R(x^*)}, y \in K \right\}.$$

Зафіксуємо довільне число $\varepsilon \in [0, r(x^*, K)]$. Позначимо через $\Omega(x^*, K, \varepsilon)$ множину всіх функцій $y \in \mathfrak{C}$, для кожної з яких

$$R(y) \subset K$$

і

$$\rho_{\mathfrak{C}}(y, x^*) \geq \varepsilon.$$

Розглянемо функціонал

$$\delta(x^*, K, \varepsilon) = \inf_{y \in \Omega(x^*, K, \varepsilon)} \rho_{\mathfrak{C}}(\mathcal{F}y, \mathcal{F}x^*). \tag{3}$$

Цей функціонал будемо використовувати для дослідження рівняння (1).

4. Основні результати. За допомогою визначеного рівністю (3) функціонала δ отримаємо умови існування майже періодичних розв'язків рівняння (1), в яких на відміну від відомої теореми Амеріо про майже періодичні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь (див. [6, 7]) не використовуються $\mathcal{H}$-клас рівняння (1) та відокремленість розв'язків рівнянь $\mathcal{H}$-класу цього рівняння. Також наведемо умови існування стійких за Пуассоном розв'язків рівняння (1).

Нехай Λ — обмежена підмножина простору $\mathfrak{C}$. Визначимо діаметр $\operatorname{diam}\Lambda$ множини Λ рівністю

$$\operatorname{diam}\Lambda = \sup\{\rho_M(x, y) \colon x, y \in \Lambda\}.$$

Теорема 1. *Нехай оператор $\mathcal{F} \colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ є майже періодичним у сенсі означення* 3, $h \in \mathfrak{B}$ *і* $K \in \mathcal{K}$.

Якщо для розв'язку $x^* \in \mathcal{N}(\mathcal{F}, K)$ різницевого рівняння (1) $\operatorname{diam} R(x^*) \neq 0$ *і виконується співвідношення*

$$\delta(x^*, K, \varepsilon) > 0 \tag{4}$$

для кожного $\varepsilon \in (0, r(x^*, K))$, то цей розв'язок є майже періодичним.

***Зауваження* 1.** Розв'язок $x^* \in \mathcal{N}(\mathcal{F}, K)$ рівняння (1), для якого $\operatorname{diam} R(x^*) = 0$, є сталим і, отже, майже періодичним.

***Доведення теореми* 1.** Припустимо, що розв'язок $x^* \in \mathcal{N}(\mathcal{F}, K)$ рівняння (1) не є елементом простору $\mathfrak{B}$. Тоді існує послідовність $\left(S_{h_p}x^*\right)_{p\geq 1}$, для якої кожна підпослідовність $\left(S_{\tau_p}x^*\right)_{p\geq 1}$ буде розбіжною. Отже, для деяких послідовностей $(p_r)_{r\geq 1}$, $(q_r)_{r\geq 1}$ натуральних чисел і числа $\gamma \in (0, \operatorname{diam} R(x^*))$

$$\rho_{\mathfrak{C}}\left(S_{\tau_{p_r}}x^*, S_{\tau_{q_r}}x^*\right) \geq \gamma, \quad r \geq 1.$$

Тому

$$\rho_{\mathfrak{C}}\left(x^*, S_{-\tau_{p_r}}S_{\tau_{q_r}}x^*\right) \geq \gamma, \quad r \geq 1,$$

і, отже,

$$S_{-\tau_{p_r}}S_{\tau_{q_r}}x^* \in \Omega(x^*, K, \gamma), \quad r \geq 1. \tag{5}$$

Не обмежуючи загальності доведення, можна на підставі включення $h \in \mathfrak{B}$ вважати, що

$$\lim_{r\to\infty} \rho_{\mathfrak{C}}\left(S_{-\tau_{p_r}}h, S_{-\tau_{q_r}}h\right) = 0. \tag{6}$$

Зазначимо, що $\operatorname{diam} R(x^*)) \leq r(x^*, K))$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що послідовність $(S_{\tau_p}\mathcal{F}S_{-\tau_p}x)_{p\geq 1}$ збігається рівномірно на $\mathfrak{D}_K$. Тому

$$\lim_{p,q\to\infty} \sup_{x\in\mathfrak{D}_K} \rho_{\mathfrak{C}}\left(S_{\tau_p}\mathcal{F}S_{-\tau_p}x, S_{\tau_q}\mathcal{F}S_{-\tau_q}x\right) = 0. \tag{7}$$

Покажемо, що

$$\delta(x^*, K, \gamma) = 0. \tag{8}$$

Очевидно, що завдяки (3) і (5)

$$\delta(x^*, K, \gamma) = \inf_{y\in\Omega(x^*,K,\gamma)} \rho_{\mathfrak{C}}(\mathcal{F}y, \mathcal{F}x^*) \le \rho_{\mathfrak{C}}\left(\mathcal{F}S_{-\tau_{p_r}}S_{\tau_{q_r}}x^*, \mathcal{F}x^*\right), \quad r\ge 1. \tag{9}$$

Оскільки

$$\rho_{\mathfrak{C}}(\mathcal{F}S_{-\tau_{p_r}}S_{\tau_{q_r}}x^*, \mathcal{F}x^*) =$$

$$= \rho_{\mathfrak{C}}\left(S_{-\tau_{p_r}}\left(S_{\tau_{p_r}}\mathcal{F}S_{-\tau_{p_r}}\right)S_{\tau_{q_r}}x^*, S_{-\tau_{q_r}}\left(S_{\tau_{q_r}}\mathcal{F}S_{-\tau_{q_r}}\right)S_{\tau_{q_r}}x^*\right) \le$$

$$\le \rho_{\mathfrak{C}}\left(S_{-\tau_{p_r}}\left(S_{\tau_{p_r}}\mathcal{F}S_{-\tau_{p_r}}\right)S_{\tau_{q_r}}x^*, S_{-\tau_{p_r}}\left(S_{\tau_{q_r}}\mathcal{F}S_{-\tau_{q_r}}\right)S_{\tau_{q_r}}x^*\right) +$$

$$+\rho_{\mathfrak{C}}\left(S_{-\tau_{p_r}}\left(S_{\tau_{q_r}}\mathcal{F}S_{-\tau_{q_r}}\right)S_{\tau_{q_r}}x^*, S_{-\tau_{q_r}}\left(S_{\tau_{q_r}}\mathcal{F}S_{-\tau_{q_r}}\right)S_{\tau_{q_r}}x^*\right) =$$

$$= \rho_{\mathfrak{C}}\left(\left(S_{\tau_{p_r}}\mathcal{F}S_{-\tau_{p_r}}\right)S_{\tau_{q_r}}x^*, \left(S_{\tau_{q_r}}\mathcal{F}S_{-\tau_{q_r}}\right)S_{\tau_{q_r}}x^*\right) + \rho_{\mathfrak{C}}\left(S_{-\tau_{p_r}}S_{\tau_{q_r}}h, S_{-\tau_{q_r}}S_{\tau_{q_r}}h\right) \le$$

$$\le \sup_{x\in\mathfrak{D}_K} \rho_{\mathfrak{C}}\left(S_{\tau_{p_r}}\mathcal{F}S_{-\tau_{p_r}}x, S_{\tau_{q_r}}\mathcal{F}S_{-\tau_{q_r}}x\right) + \rho_{\mathfrak{C}}\left(S_{-\tau_{p_r}}h, S_{-\tau_{q_r}}h\right), \quad r\ge 1,$$

то на підставі (6), (7) і (9) справджується рівність (8). Це суперечить (4). Отже, припущення, що розв'язок $x^* \in N(\mathcal{F}, K)$ рівняння (1) не є елементом простору $\mathfrak{B}$, хибне.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай $K \in \mathcal{K}$ та існує послідовність $(\omega_n)_{n\ge1} \in \Omega$, для якої виконуються співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{\mathfrak{C}}(h, S_{\omega_n}h) = 0 \tag{10}$$

і

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathfrak{D}_K} \rho_{\mathfrak{C}}(\mathcal{F}x, S_{\omega_n}\mathcal{F}S_{-\omega_n}x) = 0. \tag{11}$$

Якщо для розв'язку $x^* \in \mathcal{N}(\mathcal{F}, K)$ різницевого рівняння (1) $\operatorname{diam} R(x^*) \ne 0$ *і*

$$\delta(x^*, K, \varepsilon) > 0 \tag{12}$$

для кожного $\varepsilon \in (0, r(x^*, K))$, то цей розв'язок є стійким за Пуассоном і

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{\mathfrak{C}}(x^*, S_{\omega_n}x^*) = 0. \tag{13}$$

Зауваження 2. Розв'язок $x^* \in \mathcal{N}(\mathcal{F}, K)$ рівняння (1), для якого $\operatorname{diam} R(x^*) = 0$, є сталим і, отже, цей розв'язок є стійким за Пуассоном.

***Зауваження* 3.** У теоремі 2 функція h і розв'язок x^* рівняння (1) є сумісно стійкими за Пуассоном.

***Доведення теореми* 2.** Припустимо, що співвідношення (13) не виконується. Тоді

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\rho_{\mathfrak{C}}(x^*, S_{\omega_n}x^*) > 0$$

та існують число $\mu \in (0, r(x^*, K)]$ і підпослідовність $(\omega_{n_k})_{k\geq 1}$ послідовності $(\omega_n)_{n\geq 1}$, для яких

$$\rho_{\mathfrak{C}}\left(x^*, S_{\omega_{n_k}}x^*\right) \geq \mu, \quad k \geq 1,$$

і, отже,

$$\rho_{\mathfrak{C}}\left(x^*, S_{-\omega_{n_k}}x^*\right) \geq \mu, \quad k \geq 1.$$

Звідси випливає, що

$$S_{-\omega_{n_k}}x^* \in \Omega(x^*, K, \mu), \quad k \geq 1,$$

і тому завдяки (3)

$$\delta(x^*, K, \mu) = \inf_{y\in\Omega(x^*,K,\mu)} \rho_{\mathfrak{C}}(\mathcal{F}y, \mathcal{F}x^*) \leq \rho_{\mathfrak{C}}\left(\mathcal{F}S_{-\omega_{n_k}}x^*, \mathcal{F}x^*\right), \quad k \geq 1. \tag{14}$$

Покажемо, що

$$\delta(x^*, K, \mu) = 0. \tag{15}$$

Оскільки для кожного $k \geq 1$

$$\rho_{\mathfrak{C}}\left(\mathcal{F}S_{-\omega_{n_k}}x^*, \mathcal{F}x^*\right) = \rho_{\mathfrak{C}}\left(S_{-\omega_{n_k}}\left(S_{\omega_{n_k}}\mathcal{F}S_{-\omega_{n_k}}\right)x^*, \mathcal{F}x^*\right) \leq$$

$$\leq \rho_{\mathfrak{C}}\left(S_{-\omega_{n_k}}\left(S_{\omega_{n_k}}\mathcal{F}S_{-\omega_{n_k}}\right)x^*, S_{-\omega_{n_k}}\mathcal{F}x^*\right) + \rho_{\mathfrak{C}}\left(S_{-\omega_{n_k}}\mathcal{F}x^*, \mathcal{F}x^*\right) =$$

$$= \rho_{\mathfrak{C}}\left(\left(S_{\omega_{n_k}}\mathcal{F}S_{-\omega_{n_k}}\right)x^*, \mathcal{F}x^*\right) + \rho_{\mathfrak{C}}\left(S_{-\omega_{n_k}}h, h\right) =$$

$$= \rho_{\mathfrak{C}}\left(\left(S_{\omega_{n_k}}\mathcal{F}S_{-\omega_{n_k}}\right)x^*, \mathcal{F}x^*\right) + \rho_{\mathfrak{C}}\left(h, S_{\omega_{n_k}}h\right)$$

(тут використано нерівність трикутника), то на підставі (10) і (11)

$$\lim_{k\to\infty} \rho_{\mathfrak{C}}\left(\mathcal{F}S_{-\omega_{n_k}}x^*, \mathcal{F}x^*\right) = 0.$$

Звідси та з (14) випливає (15), що суперечить (12).

Отже, припущення, що не виконується співвідношення (13), є хибним.

Теорему 2 доведено.

***Зауваження* 4.** Якщо для метрики ρ_M метричного простору M виконується співвідношення

$$\inf\{\rho_M(x, y) \colon x \neq y\} > 0, \tag{16}$$

то

$$x(t) \equiv c \tag{17}$$

для кожної функції $x = x(t) \in \mathfrak{C}$, де c — елемент простору M, що залежить від x. Тому для неперервних на $\mathbb{R}$ майже періодичних або стійких за Пуассоном розв'язків рівняння (1) (у теоремах 1 і 2) також справджується тотожність (17).

Зазначимо, що співвідношення (16) виконується, якщо, наприклад, метричний простір M є скінченною множиною.

5. Додаткові зауваження та літературні вказівки. Функціонали, аналогічні функціоналу δ, введено автором у статтях [8 – 12] для дослідження нелінійних майже періодичних рівнянь

$$x(t+1) = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

$$f(t, x(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

і

$$G(t, x(t), x(t-\Delta_1), \ldots, x(t-\Delta_m)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Тут $f\colon \mathbb{R} \times E \to E$ і $G\colon \mathbb{R} \times E^{m+1} \to E$ — неперервні оператори, E — банаховий простір і $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ — довільні дійсні числа. Аналогічний функціонал для дослідження нелінійних рівнянь

$$x(n+1) = g(n, x(n)), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{22}$$

і

$$S\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{23}$$

використано автором у [13] та [14]. У цих рівняннях g і S — відображення, що діють із $\mathbb{Z} \times E$ і $\mathbb{R} \times E \times E$ відповідно в E й аналогічні відображенню F із пункту 1, за допомогою якого визначається оператор $\mathcal{F}$.

Наведені в пункті 4 умови існування майже періодичних та стійких за Пуассоном розв'язків рівняння (1) у метричному просторі, що використовують функціонал δ, є новими. У теоремі 1 на відміну від теореми Амеріо не використовуються $\mathcal{H}$-клас рівняння (1) та умова відокремлення розв'язків рівнянь $\mathcal{H}$-класу цього рівняння.

Дослідженню розв'язків майже періодичних рівнянь присвячено багато публікацій. Для звичайних лінійних диференціальних рівнянь перші теореми про майже періодичні розв'язки були доведені Фаваром у роботі [15], для нелінійних диференціальних рівнянь — Амеріо в роботі [6]. У цих роботах суттєво використовуються $\mathcal{H}$-класи досліджуваних рівнянь, а в [6] використовується також вимога відокремленості обмежених розв'язків рівнянь. Результати Фавара були покращені Е. Мухамадієвим [3, 4]. Узагальненням теорем Мухамадієва присвячено роботи [16 – 18]. Важливі результати в цьому напрямку також належать Б. М. Левітану [2], Амеріо [19] та В. В. Жикову [20]. Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних рівнянь (18) – (23) без використання $\mathcal{H}$-класів цих рівнянь отримано автором у [8 – 14].

Стійкі за Пуассоном траєкторії динамічних систем та функціональні оператори досліджувались відповідно в [21] і [22].

1. *Bochner S.* Beitrage zur Theorie der fastperiodischen // Math. Ann. – 1927. – **96**. – I Teil. – P. 119 – 147. II Teil. – P. 383 – 409.
2. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
3. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269 – 274.
4. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Мат. заметки. – 1981. – **30**, № 3. – С. 443 – 460.
5. *Колмогоров А. М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – Київ: Вища шк., 1974. – 456 с.
6. *Amerio L.* Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. mat. pura ed appl. – 1955. – **39**. – P. 97 – 119.
7. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
8. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання. – 2013. – **16**, № 1. – С. 118 – 124.
9. *Slyusarchuk V. Yu.* Conditions of almost periodicity for bounded solutions of nonlinear difference equations with continuous argument // J. Math. Sci. – 2014. – **197**, № 1. – P. 122 – 128.
10. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 2. – С. 307 – 312.
11. *Слюсарчук В. Ю.* Критерій існування майже періодичних розв'язків нелінійних рівнянь, що не використовує $\mathcal{H}$-класи цих рівнянь // Буков. мат. журн. – 2013. – **1**, № 1 – 2. – С. 136 – 138.
12. *Слюсарчук В. Ю.* Дослідження майже періодичних різницевих рівнянь з неперервним аргументом, що не використовує $\mathcal{H}$-класи цих рівнянь // Буков. мат. журн. – 2013. – **1**, № 3 – 4. – С. 137 – 143.
13. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з дискретним аргументом // Нелінійні коливання. – 2013. – **16**, № 3. – С. 416 – 425.
14. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків не розв'язаних відносно похідної нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 3. – С. 384 – 393.
15. *Favard J.* Sur leséquations différentielles á coefficients presquepériodiques // Acta math. – 1927. – **51**. – P. 31 – 81.
16. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. – 1981. – **116(158)**, № 4(12). – С. 483 – 501.
17. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. – 1986. – **130(172)**, № 1(5). – С. 86 – 104.
18. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 2. – С. 262 – 267.
19. *Amerio L.* Sull equazioni differenziali quasi-periodiche astratte // Ric. mat. – 1960. – **30**. – P. 288 – 301.
20. *Жиков В. В.* Доказательство теоремы Фавара о существовании почти-периодического решения в случае произвольного банахова пространства // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 1. – С. 121 – 126.
21. *Щербаков Б. А.* Устойчивость по Пуассону движений динамических систем и решений дифференциальных уравнений. – Кишинев: Штиинца, 1985. – 148 с.
22. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость устойчивых по Пуассону функциональных операторов // Некоторые вопросы теории асимптотических методов нелинейной механики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 173 – 174.

Одержано 22.03.14