УДК 517.5

Е. С. Афанасьева (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ОТОБРАЖЕНИЙ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

We study the problem of extension to the boundary of continually ring Q-homeomorphisms relative to a p-module between continual domains in metric spaces with measures. The conditions on the function Q and the boundaries of domains under which every continually ring Q-homeomorphism admits continuous or homeomorphic extension to the boundary are formulated. The accumulated results yield, in particular, important applications to fractals in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Досліджується проблема продовження на межу континуально кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модуля між континуальними областями у метричних просторах із мірами. Сформульовано умови на функцію Q та межі областей, при яких будь-який континуально кільцевий Q-гомеоморфізм допускає неперервне або гомеоморфне продовження на межу. Отримані результати ведуть, зокрема, до важливих застосувань до фракталів у $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

1. Введение. В прошедшее десятилетие в теории отображений началось интенсивное изучение так называемых отображений с конечным искажением, характеристики которых не являются ограниченными, а лишь конечными почти всюду в области задания (см., например, [1 – 5] и дальнейшие ссылки в монографии [3]). Параллельно происходил переход к исследованию отображений в метрических пространствах с мерами. Отметим, что эти исследования ведут к важным приложениям к фракталам в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и римановым многообразиям, которые тесно связаны с современной теоретической физикой. Важный вклад в это направление внесла донецкая школа по теории отображений. В данной статье развивается техника p-модулей применительно к семействам континуумов в метрических пространствах, которые, вообще говоря, не являются линейно связными (с помощью непрерывных путей) и на этой основе строится теория граничного поведения континуально кольцевых Q-гомеоморфизмов.

Напомним, что в последнее время активно развивалась теория так называемых Q-гомеоморфизмов. В препринте [6], а затем в статье [7] для квазиконформных отображений было получено модульное неравенство, которое легло в основу определения Q-гомеоморфизмов, введенных впоследствии профессором О. Мартио (Финляндия). Основной целью теории Q-гомеоморфизмов является изучение взаимосвязей свойств отображения f и свойств функции Q. Развитие этой теории начиналось в работах [8, 9]. Высокий уровень абстракции теории Q-отображений позволяет применять эту теорию ко всем современным классам отображений, где удается установить оценку модуля с подходящей функцией Q, связанной с теми или иными характеристиками (дилатациями) отображений, в том числе к отображениям с конечным искажением по Иванцу и отображениям с конечным искажением длины (см., например, [3, 10]). Определение Q-гомеоморфизма относительно p-модуля в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, при $p \neq n$ во внутренних точках областей впервые встречается в [11]. Затем в [12] неравенство вида $M_p(f\Gamma) \leq \int_D Q(x)\rho^p(x)dm(x)$ было установлено для отображений, квазиконформных в среднем при $p \neq n$.

В последние годы активно изучаются так называемые кольцевые Q-гомеоморфизмы, мотивированные кольцевым определением квазиконформности по Герингу в [13], которые были впервые введены на плоскости в связи с исследованием уравнения Бельтрами с вырождением условия строгой эллиптичности (см., например, [14]), а затем и в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ [15]. Впоследствии понятие кольцевого гомеоморфизма было распространено в граничные точки областей на плоскости [16, 17]. Как известно, теория граничного поведения всегда была наиболее трудной и интересной частью теории отображений (см., например, монографии [3, 18] и приведенную в них библиографию). Отметим также, что кольцевые Q-гомеоморфизмы в последнее время нашли приложения к теории граничного поведения классов Соболева и Орлича – Соболева на римановых многообразиях (см., например, [19]). В работе [20] также исследовались кольцевые Q-гомеоморфизмы относительно p-модуля при $p \neq n$ во внутренних точках областей в $\mathbb{R}^n$ и был приведен критерий принадлежности классу кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля.

Автор продолжил исследование граничного поведения кольцевых Q-гомеоморфизмов, начатое в работе [21], но уже относительно p-модулей между континуальными областями в метрических пространствах с мерами.

2. Определения и предварительные результаты. Прежде чем формулировать результаты работы, напомним, что топологическое пространство *связно*, если его нельзя разбить на два непустых непересекающихся открытых множества. Напомним также, что топологическое пространство T называется *локально связным*, если для любой его точки x_0 и любой ее окрестности U найдется ее связная окрестность $V \subseteq U$. Компактные связные хаусдорфовы пространства называются *континуумами.* Напомним, что топологическое пространство называется *хаусдорфовым*, если для любой пары точек найдутся их взаимно не пересекающиеся окрестности. В дальнейшем для любых множеств A, B и C в топологическом пространстве T через $\Gamma(A, B; C)$ обозначаем семейство всех континуумов γ, соединяющих A и B в C, т. е. таких, что $\gamma \cap A \neq \varnothing$, $\gamma \cap B \neq \varnothing$ и $\gamma \setminus \{A \cup B\} \subseteq C$.

Пространство T будем называть *континуально связным*, если любую пару его точек можно погрузить в континуум γ в T. Под *континуальной областью* в топологическом пространстве T будем понимать открытое континуально связное множество D. Также пространство T будем называть *локально континуально связным* в точке x_0, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$, которая является континуальной областью в T. Пространство T будем называть *континуально связным* в точке x_0, если для любой ее окрестности U найдется ее окрестность $V \subseteq U$ такая, что $V \setminus \{x_0\}$ является континуальной областью (ср. с [3, с. 274]). Наконец, континуальную область D будем называть *континуально связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ этой точки такая, что $V \cap D$ является континуальной областью.

Говорим, что семейство континуумов Γ_1 из произвольного топологического пространства T *минорируется* семейством континуумов Γ_2 из T (пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$), если для каждого континуума $\gamma_1 \in \Gamma_1$ существует континуум $\gamma_2 \in \Gamma_2$ такой, что γ_2 является подконтинуумом γ_1, т. е. $\gamma_2 \subseteq \gamma_1$.

Далее приведем континуальный аналог предложения 2.3 из работы [22] (см. также предложение 13.3 в монографии [3]).

Предложение 1. *Пусть Ω — открытое множество в топологическом пространстве T. Тогда*

$$\Gamma(\Omega, T \setminus \Omega; T) > \Gamma(\Omega, \partial\Omega; \Omega)\,. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть Γ_1 — семейство континуумов γ, соединяющих Ω и $T \setminus \Omega$ в T, и Γ_2 — семейство континуумов γ^*, соединяющих Ω и $\partial\Omega$ в Ω. Прежде всего заметим, что $\overline{\Omega}$ — замкнутое множество и, следовательно, множества $E_\gamma = \overline{\Omega} \cap \gamma$, $\gamma \in \Gamma_1$, — компакты, так как γ — континуумы (см., например, предложение I.9.3 в [23]). Компоненты связности E_γ являются замкнутыми попарно непересекающимися множествами (см., например, теорему 5.46.III.1 в [24]) и, следовательно, взаимно непересекающимися континуумами (см. также предложение I.9.3 в [23]). Хотя бы одна из них E_0 содержит точку из Ω. Эта компонента связности E_0 обязана также, по теореме Янишевского, содержать точку $\partial\Omega$ (см., например, теорему 47.III.1 в [24]).

Таким образом, найден подконтинуум E_0 исходного континуума $\gamma \in \Gamma_1$, который лежит в $\overline{\Omega}$ и соединяет Ω с $\partial\Omega$, т. е. $E_0 \in \Gamma_2$ и, следовательно, $\Gamma_1 > \Gamma_2$.

Далее H^k, $k \in [0, \infty)$, обозначает *k-мерную меру Хаусдорфа* множества A в метрическом пространстве (X, d). Точнее, пусть A — множество в (X, d). Тогда полагаем

$$H^k(A) = \sup_{\varepsilon > 0} H^k_\varepsilon(A)\,, \tag{2}$$

$$H^k_\varepsilon(A) := \inf \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_i)^k\,, \tag{3}$$

причем инфимум в (3) берется по всем покрытиям A множествами A_i с $\operatorname{diam} A_i < \varepsilon$ (см., например, [26]). Напомним, что $\operatorname{diam} A_i = \sup_{x,y \in A_i} d(x, y)$. Как известно, если для некоторого множества A и $k_1 \geq 0$ выполнено условие $H^{k_1}(A) < \infty$, то $H^{k_2}(A) = 0$ для произвольного числа $k_2 > k_1$ (см., например, разд. 1 в гл. VII в [26]). В связи с этим вводится величина

$$\dim_H A := \sup_{H^k(A) > 0} k,$$

которая называется *хаусдорфовой размерностью* множества A.

В дальнейшем говорим, что континуум в метрическом пространстве (X, d) является *k-спрямляемым*, если его мера Хаусдорфа H^k конечна. 1-Спрямляемые континуумы γ будем называть просто *спрямляемыми континуумами* или континуумами *конечной длины*, а $H^1(\gamma)$ — *длиной* γ. Фугледе рассматривал системы мер в абстрактном множестве $\mathcal{X}$ с фиксированной основной мерой (см., например, [27]). Нами будут рассмотрены системы борелевских мер, ассоциированных с континуумами в метрических пространствах (X, d). Именно, мера $m^{(k)}_\gamma$, ассоциированная с континуумом γ в (X, d), определяется для каждого борелевского множества B в (X, d) как хаусдорфова мера H^k пересечения $B \cap \gamma$ при фиксированном $k > 0$. В дальнейшем для любого континуума $\gamma \in \Gamma$ мера $m_\gamma := m^{(1)}_\gamma$.

Приведем также континуальный аналог предложения 2.4 из статьи [22] (см. также предложение 13.4 в монографии [3]).

Предложение 2. *Пусть γ — спрямляемый континуум в метрическом пространстве (X, d), соединяющий точки $x_1 \in \overline{B(x_0, r_1)}$ и $x_2 \in X \setminus B(x_0, r_2)$, где $x_0 \in X$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, и пусть $\eta\colon [0, \infty] \to [0, \infty]$ — борелева функция. Тогда*

$$\int\limits_\gamma \eta(d(x, x_0))dm_\gamma \;\geq\; \int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr. \tag{4}$$

Доказательство. По неравенству треугольника для любых точек y_1 и $y_2 \in X$

$$d(y_1, y_2) + d(y_1, x_0) \geq d(y_2, x_0)$$

и

$$d(y_1, y_2) + d(y_2, x_0) \geq d(y_1, x_0),$$

т. е.

$$d(y_1, y_2) \geq |d(y_1, x_0) - d(y_2, x_0)|. \tag{5}$$

Заметим, что функция $d(x, x_0)$ каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие некоторое число в $\mathbb{R}^+$ и в силу (5) при этом отображении длина множества не возрастает. Напомним также, что по свойству Дарбу о связных множествах непрерывная функция $d(x, x_0)$ принимает все промежуточные значения на γ (см., например, следствие 5.46.3a в [24]). Следовательно,

$$dH^1 \geq dr, \tag{6}$$

где $r = d(x, x_0)$, $dr = \Delta r$ и dH^1 — длина той части континуума γ, которая расположена в кольце $\{x \in X : r \leq |x - x_0| < r + \triangle r\}$. Таким образом, неравенство (4) следует из (6).

***Замечание* 1.** В частности, из неравенства (4) следует, что для любого континуума γ

$$H^1(\gamma) \ \geq \ \text{diam}\, \gamma\ . \tag{7}$$

Однако неравенство вида

$$H^k(\gamma) \ \geq \ [\text{diam}\, \gamma]^{\alpha_k} \tag{8}$$

не выполняется для невырожденных континуумов ни при каком другом k, кроме $k = 1$, и ни при каком $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Действительно, при $k < 1$ по теореме VII.2 в [26] $1 > \dim_H \gamma \geq \dim \gamma = 0$, где $\dim \gamma$ — топологическая размерность γ, т. е. γ — полностью разрывное множество (см. II.4.D в [26]). Однако последнее противоречит тому, что γ — невырожденный континуум. Как показывает следующий контрпример, если $k > 1$, неравенство (7) также не выполняется. Пусть $I = [0, 1]$. Очевидно, что $H^1(I) = 1 < \infty$ и потому $H^k(I) = 0$ для любого $k > 1$ (см. разд. 1 гл. VII в [26]), а $\text{diam}\, I = 1$, т. е. (8) не выполнено для простейшего континуума I.

Неотрицательную μ-измеримую функцию $\rho\colon X \to [0, \infty]$ называем *допустимой* для семейства континуумов Γ в (X, d) (пишем $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$), если

$$\int\limits_X \rho \, dm_\gamma \geq 1 \qquad \forall \, \gamma \in \Gamma.$$

Пусть теперь (X, d, μ) — метрическое пространство с борелевой мерой μ. Напомним, что пространство (X, d, μ) называется *α-регулярным по Альфорсу*, если существует постоянная $C \geq 1$ такая, что

$$C^{-1} r^\alpha \leq \mu(B_r) \leq C r^\alpha$$

для всех шаров B_r в X радиуса $r < \operatorname{diam} X$. Как известно, α-регулярные пространства имеют хаусдорфову размерность α (см., например, [28, с. 61]). Пространство (X, d, μ) называется *регулярным по Альфорсу*, если оно α-регулярно для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$.

Говорят также, что пространство (X, d, μ) *α-регулярно сверху в точке* $x_0 \in X$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\mu(B(x_0, r)) \leq C r^\alpha \tag{9}$$

для всех шаров $B(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r < r_0$. Будем также говорить, что пространство (X, d, μ) *регулярно сверху*, если условие (9) выполнено в каждой точке x для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$.

p-Модуль, $0 < p < \infty$, семейства Γ континуумов γ в (X, d, μ) определим следующим образом:

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \,\in\, \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_X \rho^p(x)\, d\mu(x).$$

Здесь мы доопределим $M_p(\Gamma) = +\infty$, если $\Gamma = \varnothing$.

Из соотношения (1) по [27, с. 178] получаем следующее заключение из предложения 2.

***Следствие* 1.** *Для любого открытого множества Ω в метрическом пространстве с борелевой мерой (X, d, μ)*

$$M_p(\Gamma(\Omega, X \setminus \Omega; X)) \le M_p(\Gamma(\Omega, \partial\Omega; \Omega)) \qquad \forall\, p \in (0, \infty).$$

Пусть всюду далее D и D' — континуальные области в пространствах (X, d, μ) и (X', d', μ') соответственно, $Q\colon X \to (0, \infty)$ — μ-измеримая функция и $p \in (0, \infty)$. Говорим, что гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ является *континуально кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in \overline{D}$ относительно p-модуля, если неравенство

$$M_p(\Gamma(f(C_0),\, f(C_1);\, D')) \le \int\limits_{A \cap D} Q(x)\, \eta^p(d(x, x_0))\, d\mu(x)$$

выполняется для любого кольца $A = A(x_0, r_1, r_2) := \{x_0 \in X \colon r_1 < d(x, x_0) < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, любых двух континуумов $C_0 \subset \overline{B(x_0,\, r_1)} \cap D$ и $C_1 \subset D \setminus B(x_0, r_2)$ и любой борелевой функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \ge 1.$$

Наконец, говорим, что гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ является *континуально кольцевым Q-гомеоморфизмом,* если f — континуально кольцевой Q-гомеоморфизм в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$.

Аналогично [22] говорим, что граница континуальной области D *континуально слабо плоская в точке* $x_0 \in \partial D$ относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, если для любого числа $N > 0$ и любой окрестности U точки x_0 найдется ее окрестность $V \subset U$ такая, что

$$M_p(\Gamma(E, F; D)) \ge N \tag{10}$$

для любых континуумов E и F в D, пересекающих ∂U и ∂V.

Аналогично [22] также говорим, что граница континуальной области D *континуально сильно достижима* в точке $x_0 \in \partial D$ относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, если для любой окрестности U точки x_0 найдутся компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что

$$M_p(\Gamma(E, F; D)) \ge \delta$$

для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V.

Наконец, границу континуальной области D называем *континуально сильно достижимой* относительно p-модуля, $p \in (0,\infty)$, и *континуально слабо плоской* относительно p-модуля, $p \in (0,\infty)$, если соответствующие свойства имеют место в каждой точке ее границы.

Приведем далее некоторые вспомогательные утверждения.

Предложение 3. *Если граница континуальной области D континуально слабо плоская в точке $x_0 \in \partial D$ относительно p-модуля, $p \in (0,\infty)$, то ∂D континуально сильно достижима в точке x_0 относительно p-модуля.*

Доказательство. Полагаем $U = B(x_0, r_0)$, где $0 < r_0 < d_0 = \sup_{x\in D} d(x,x_0)$. Тогда, по условию, существует $r \in (0, r_0)$ такое, что выполнено неравенство (10) для всех континуумов E и F, пресекающих $\partial B(x_0,r_0)$ и $\partial B(x_0,r)$. Далее, по свойству Дарбу о связных множествах непрерывная функция $d(x,x_0)$ принимает все промежуточные значения в D (см. следствие 5.46.3a в [24]). Следовательно, существуют точки $y_1 \in D \cap \partial B(x_0,r_0)$ и $y_2 \in D\cap\partial B(x_0,r)$. Выберем в качестве компакта E произвольный континуум γ, содержащий y_1 и y_2 в D. Тогда для каждого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V, где $V = B(x_0,r)$, выполнено неравенство (10).

Лемма 1. *Пусть D — континуальная область в (X,d,μ). Если ∂D континуально слабо плоская в точке $x_0 \in \partial D$ относительно p-модуля, $p\in(0,\infty)$, то D континуально связна в x_0.*

Доказательство. Предположим, что D не является континуально связной в точке x_0. Тогда найдется $r_0 \in (0,d_0)$, $d_0 = \sup_{x\in D} d(x,x_0)$, такое, что $\mu_0 := \mu(D\cap B(x_0,r_0)) < \infty$, и для любой окрестности $V \subseteq U := B(x_0,r_0)$ точки x_0 выполняется одно из следующих условий:

1) $V\cap D$ имеет по меньшей мере две связные компоненты K_1 и K_2 такие, что $x_0 \in \overline{K_1}\cap\overline{K_2}$;

2) $V\cap D$ имеет бесконечное число связных компонент $K_1,\ldots,K_m,\ldots$ таких, что $x_0 = \lim_{m\to\infty} x_m$ для некоторых $x_m \in K_m$ и $x_0 \notin \overline{K_m}$ для всех $m = 1,2,\ldots$. Заметим, что $\overline{K_m}\cap\partial V \neq \varnothing$ для всех $m=1,2,\ldots$ вследствие связности D (см. предложение 1).

В частности, пункты 1 или 2 верны для окрестности $V = U = B(x_0,r_0)$. Пусть, далее, $r_* \in (0,r_0)$. Тогда

$$M_p(\Gamma(K_i^*,K_j^*;D)) \le M_0 := \frac{\mu_0}{[2(r_0-r_*)]^p} < \infty\,,$$

где $K_i^* = K_i\cap\overline{B(x_0,r_*)}$ и $K_j^* = K_j\cap\overline{B(x_0,r_*)}$ для всех $i\neq j$. Действительно, по предложению 2 одной из допустимых функций для $\Gamma(K_i^*,K_j^*;D)$ является

$$\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(r_0-r_*)}, & \text{если } x\in B_0\setminus\overline{B_*},\\ 0, & \text{если } x\in X\setminus(B_0\setminus\overline{B_*}),\end{cases}$$

где $B_0 = B(x_0,r_0)$ и $B_* = B(x_0,r_*)$, так как компоненты K_i и K_j не могут быть связаны континуумом в $V = B(x_0,r_0)$ и любой континуум, соединяющий K_i^* и K_j^* в D, по крайней мере дважды пересекает кольцо $B_0\setminus\overline{B_*}$, поскольку по свойству Дарбу о связных множествах непрерывная функция $d(x,x_0)$ принимает все промежуточные значения на γ (см. следствие 5.46.3a в [24]).

В силу пунктов 1 и 2 приведенная выше модульная оценка противоречит условию континуальной слабой плоскости в точке x_0. Действительно, по этому условию найдется $r\in(0,r_*)$ такое, что

$$M_p(\Gamma(K_{i_0}^*,K_{j_0}^*;D)) \ge M_0+1$$

для каждой достаточно большой пары i_0 и j_0, $i_0 \neq j_0$, так как в соответствующих $K^*_{i_0}$ и $K^*_{j_0}$ с $d(x_0, x_{i_0})$ и $d(x_0, x_{j_0}) < r$ найдется по континууму, пересекающему $\partial B(x_0, r_*)$ и $\partial B(x_0, r)$ (см. предложение 1).

Таким образом, предположение о нарушении континуальной связности континуальной области D в точке x_0 было неверным.

***Следствие* 2.** *Континуальные области с континуально слабо плоскими границами относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, континуально связны во всех точках границы.*

Следуя [22], говорим, что функция $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in X$ (сокращенно $\varphi \in FMO(x_0)$), если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \quad \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \widetilde{\varphi}_\varepsilon| \; d\mu(x) < \infty\,, \tag{11}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_\varepsilon = \fint_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x) d\mu(x) = \frac{1}{\mu(B(x_0,\varepsilon))} \int_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x) d\mu(x)$$

— среднее значение функции φ по шару $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in X\colon d(x, x_0) < \varepsilon\}$ относительно меры μ. Здесь условие (11) включает предположение, что φ интегрируема относительно меры μ по некоторому шару $B(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Предложение 4. *Если для некоторого набора чисел $\varphi_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$,*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \; \frac{1}{\mu(B(x_0,\varepsilon))} \int_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon| \; d\mu(x) < \infty\,,$$

то $\varphi \in FMO(x_0)$.

***Следствие* 3.** *В частности, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \; \frac{1}{\mu(B(x_0,\varepsilon))} \int_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x)| \; d\mu(x) < \infty\,,$$

то $\varphi \in FMO(x_0)$.

Варианты следующей леммы из [22] были сначала доказаны для BMO функций и внутренних точек области D в $\mathbb{R}^n$ при $n = 2$ и $n \geq 3$ соответственно, а затем для граничных точек D в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с условием удвоения меры и FMO функций (см. историю вопроса более подробно в главе 13 монографии [3]).

Лемма 2. *Пусть пространство (X, d, μ) p-регулярно сверху с $p \geq 2$ в точке x_0 и*

$$\mu(B(x_0, 2r)) \leq \gamma \cdot \log^{p-2}\frac{1}{r} \cdot \mu(B(x_0, r)) \qquad \forall\, r \in (0, r_0)\,. \tag{12}$$

Тогда для любой неотрицательной функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ класса $FMO(x_0)$

$$\int_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{\varphi(x)\, d\mu(x)}{\left(d(x,x_0)\log\frac{1}{d(x,x_0)}\right)^p} = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

при $\varepsilon \to 0$ и некотором $\varepsilon_0 \in (0, \delta_0)$, где $\delta_0 = \min\,(e^{-e}, d_0)$, $d_0 := \sup\limits_{x\in D} d(x, x_0)$.

Замечание 2. Условие (12) слабее *условия удвоения меры* μ:

$$\mu(B(x_0, 2r)) \leq \gamma\, \mu(B(x_0, r)) \qquad \forall\, r \in (0, r_0), \tag{13}$$

которое использовалось ранее в контексте $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, в работе [29] (см. также секцию 6.2 в монографии [3]). Заметим также, что условие (13) автоматически выполняется в точках пространства X, где X регулярно по Альфорсу.

3. Граничное поведение континуально кольцевых Q-гомеоморфизмов. Далее $C(x_0, f)$ обозначает предельное множество отображения $f\colon D \to D'$ в точке x_0,

$$C(x_0, f) := \left\{ x' \in X' \colon x' = \lim_{n\to\infty} f(x_n), x_n \to x_0, x_n \in D \right\}.$$

Лемма 3. *Пусть $f\colon D \to D'$ — континуально кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, с $Q \in L^1_\mu(D)$. Если D континуально связна в точках x_1 и $x_2 \in \partial D$, $x_1 \neq x_2$, а D' имеет континуально слабо плоскую границу относительно p-модуля, то $C(x_1, f) \cap C(x_2, f) = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $E_i = C(x_i, f)$, $i = 1, 2$, и $\delta = d(x_1, x_2)$. Предположим, что $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$. Поскольку D континуально связна в точках x_1 и x_2, существуют окрестности U_1 и U_2 точек x_1 и x_2 соответственно такие, что $W_1 = D \cap U_1$ и $W_2 = D \cap U_2$ — континуальные области и $U_1 \subset B_1 = B\left(x_1, \dfrac{\delta}{3}\right)$ и $U_2 \subset B_2 = B\left(x_2, \dfrac{\delta}{3}\right)$. Тогда по неравенству треугольника $\operatorname{dist}(W_1, W_2) \geq \dfrac{\delta}{3}$. Пусть также

$$\eta(t) = \begin{cases} \dfrac{3}{\delta}, & t \in \left(\dfrac{\delta}{3}; \dfrac{2\delta}{3}\right), \\[2ex] 0, & t \notin \left(\dfrac{\delta}{3}; \dfrac{2\delta}{3}\right). \end{cases}$$

Тогда имеем $\displaystyle\int_{\delta/3}^{2\delta/3} \eta(t)dt = \int_{\delta/3}^{2\delta/3} \frac{3}{\delta}\, dt = 1$. Следовательно, для любых континуумов $K_1 \subset W_1$ и $K_2 \subset W_2$

$$M_p(\Gamma(f(K_1), f(K_2); D')) \leq \int\limits_{D\cap A(x_1,\, \delta/3,\, 2\delta/3)} Q(x)\eta^p(d(x_1, x))\, d\mu(x) \leq$$

$$\leq \frac{3^p}{\delta^p} \int\limits_D Q(x)\, d\mu(x) < \infty,$$

так как $Q \in L^1_\mu(D)$.

Однако последняя оценка противоречит условию континуальной слабой плоскости (10), если найдется $y_0 \in E_1 \cap E_2$. Действительно, тогда $y_0 \in \overline{fW_1} \cap \overline{fW_2}$ и в континуальных областях $W_1^* = fW_1$ и $W_2^* = fW_2$ найдется по континууму, пересекающему любые наперед заданные сферы $\partial B(y_0, r_0)$ и $\partial B(y_0, r_*)$ с достаточно малыми радиусами r_0 и r_*. Поэтому предположение, что $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$, неверно.

Опираясь на лемму 3 и рассуждая от противного, получаем, в частности, следующее заключение.

Теорема 1. *Пусть D континуально связна во всех своих граничных точках и $\overline{D}$ — компакт, D' имеет континуально слабо плоскую границу относительно p-модуля, $p \in (0,\infty)$, а $f\colon D \to D'$ — континуально кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля с $Q \in L^1_\mu(D)$. Тогда обратное отображение $g = f^{-1}\colon D' \to D$ допускает непрерывное продолжение $\overline{g}\colon \overline{D'} \to \overline{D}$.*

***Замечание* 3.** Известно (см. пример предложения 6.3 в монографии [3]), что никакая сколь угодно высокая степень интегрируемости Q в D не гарантирует продолжения прямых отображений на границу. Условия для этого имеют гораздо более тонкий характер, чем для продолжимости обратных отображений f^{-1}. Некоторые из этих условий приведены ниже.

Лемма 4. *Пусть D континуально связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\overline{D'}$ — компакт, а $f\colon D \to D'$ — континуально кольцевой Q-гомеоморфизм в x_0 относительно p-модуля, $p \in (0,\infty)$, такой, что $\partial D'$ континуально сильно достижима относительно p-модуля хотя бы в одной точке предельного множества $C(x_0,f)$, $Q\colon X \to (0,\infty)$ — μ-измеримая функция, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\,\psi^p_{x_0,\varepsilon}(d(x,x_0))\,d\mu(x) = o(I^p_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)) \tag{14}$$

при $\varepsilon \to 0$ для некоторого $\varepsilon_0 \in (0, d(x_0))$, где $d(x_0) := \sup_{x\in D} d(x,x_0)$ и $\psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ — семейство неотрицательных измеримых (по Лебегу) функций на $(0,\infty)$ таких, что

$$0 < I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)\colon = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{x_0,\varepsilon}(t)\,dt \,<\, \infty \qquad \forall\, \varepsilon \in (0,\varepsilon_0), \quad \varepsilon_0 \in (0, d(x_0)).$$

Тогда f продолжим в точку x_0 по непрерывности в (X', d').

Доказательство. Покажем, что предельное множество $E = C(x_0,f)$ состоит из единственной точки. Отметим, что $E \neq \varnothing$ в силу компактности $\overline{D'}$ (см., например, замечание 3, п. 41 в [24]). По условию леммы $\partial D'$ континуально сильно достижима в некоторой точке $y_0 \in E$. Допустим, что существует хотя бы еще одна точка $y^* \in E$. Пусть $U = B(y_0, r_0)$, где $0 < r_0 < d'(y_0, y^*)$.

В силу континуальной связности континуальной области D в точке x_0 найдется последовательность окрестностей V_k точки x_0 такая, что $D_k = D \cap V_k$ — континуальные области и $\operatorname{diam} V_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда найдутся точки y_k и $y_k^* \in F_k = fD_k$, близкие к y_0 и y^* соответственно, для которых $d'(y_0,y_k) < r_0$ и $d'(y_0,y_k^*) > r_0$ и которые можно соединить континуумами C_k в областях F_k, $k = 1,2,\ldots$. По построению

$$C_k \cap \partial B(y_0, r_0) \neq \varnothing$$

вследствие связности C_k.

По условию континуальной сильной достижимости точки y_0 найдутся компакт $C_0 \subset D'$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$M_p(\Gamma(C_0, C_k; D')) \geq \delta \tag{15}$$

для достаточно больших k, так как $\operatorname{dist}(y_0, C_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Поскольку любое компактное множество C_0 может быть вложено в континуум (в силу леммы 1 в [21]), можно считать, что C_0 — континуум. Заметим, что $K_0 = f^{-1}(C_0)$ также является континуумом как непрерывный образ континуума. Таким образом, $\varepsilon_0 = \min(d(x_0, K_0)) > 0$ в D. Пусть $\psi^*_{x_0,\varepsilon}$ — борелевская функция, такая, что $\psi^*_{x_0,\varepsilon}(t) = \psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ для почти всех $t \in (0,\infty)$ и $\psi^*_{x_0,\varepsilon}(t) = 0$ для остальных t, которая существует по теореме Лузина (см., например, 2.3.5 в [30]).

Заметим, что $I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) > 0$ при малых ε в силу (14) и для функции

$$\eta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \psi^*_{x_0,\varepsilon}(t)/I_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon), & t \in (\varepsilon, \varepsilon_0), \\ 0, & t \notin (\varepsilon, \varepsilon_0), \end{cases}$$

выполнено условие $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta_\varepsilon(t)\, dt \ = 1.$

Пусть $B_\varepsilon := \{x \in X \colon d(x, x_0) < \varepsilon\}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Рассмотрим произвольный континуум $K \subset \subset B_\varepsilon \cap D$. Отметим, что функция $\eta_\varepsilon(d(x, x_0))$ является допустимой для семейства континуумов $\Gamma(f(K_0), f(K); D')$ по предложению 2. Таким образом,

$$M_p(\Gamma(f(K_0), f(K); D')) \leqslant \int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\, \eta^p_\varepsilon(d(x, x_0))\, d\mu(x) \le$$

$$\le \frac{1}{I^p_{x_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)} \int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\, \psi^p_{x_0,\varepsilon}(d(x, x_0))\, d\mu(x) \to 0 \tag{16}$$

при $\varepsilon \to 0$ по (14).

С другой стороны, для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ при больших k имеет место включение $D_k \subset B_\varepsilon$ и, следовательно, $f^{-1}(C_k) \subset B_\varepsilon \cap D$. Таким образом, получаем противоречие между (15) и (16), т. е. предположение о существовании второй точки y^* в $C(x_0, f)$ было неверным.

***Следствие* 4.** *В частности, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\, \psi^p(d(x, x_0))\, d\mu(x) \ < \ \infty\,, \tag{17}$$

где $\psi(t)$ — неотрицательная измеримая функция на $(0,\infty)$ такая, что

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) \ := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt \ < \ \infty \qquad \forall\, \varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)\ ,$$

и $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, то континуально кольцевой Q-гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности в (X', d').

***Замечание* 4.** Другими словами, достаточно, чтобы сингулярный интеграл в (17) сходился в точке x_0 хотя бы для одного ядра ψ с неинтегрируемой особенностью в нуле. Более того, как видно из леммы 4, достаточно, чтобы указанный интеграл даже расходился, но с контролируемой скоростью:

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\, \psi^p(d(x, x_0))\, d\mu(x) \ = \ o(I^p(\varepsilon, \varepsilon_0)).$$

Выбирая в лемме 4 $\psi(t) \equiv 1/t$, приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть D континуально связна в точке $x_0 \in \partial D$, $\partial D'$ континуально сильно достижима относительно p-модуля, $p \in (0,\infty)$, и $\overline{D'}$ компактно. Если измеримая функция $Q\colon X \to (0,\infty)$ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} \frac{Q(x)d\mu(x)}{d(x,x_0)^p} = o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^p\right)$$

при $\varepsilon \to 0$ для некоторого $\varepsilon_0 < d(x_0) := \sup_{x\in D} d(x,x_0)$, то любой континуальный кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля $f\colon D \to D'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности в (X', d').

***Следствие* 5.** *В частности, заключение теоремы 2 остается в силе, если сингулярный интеграл*

$$\int \frac{Q(x)d\mu(x)}{d(x,x_0)^p}$$

сходится в окрестности точки x_0.

Комбинируя леммы 2 и 4, выбирая $\psi_\varepsilon(t) \equiv t\log\dfrac{1}{t}$, $t \in (0,\delta_0)$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Пусть X p-регулярно сверху в точке $x_0 \in \partial D$, $p \geq 2$, где D континуально связна и удовлетворяет условию* (12), *а $\partial D'$ континуально сильно достижима относительно p-модуля и $\overline{D'}$ — компакт. Если $Q \in FMO(x_0)$, то любой континуально кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, $p \in [2,\infty)$, $f\colon D \to D'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности в (X', d').*

Комбинируя теорему 3 и следствие 3, получаем следующее утверждение.

***Следствие* 6.** *В частности, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \frac{1}{\mu(B(x_0,\varepsilon))} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\ d\mu(x) < \infty\,,$$

то любой континуально кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, $p \in (0,\infty)$, $f\colon D \to D'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности в (X', d').

Комбинируя предыдущие результаты о продолжении на границу прямых и обратных отображений, получаем следующие утверждения.

Лемма 5. *Пусть D континуально связна на границе, D' имеет континуально слабо плоскую границу, а $\overline{D}$ и $\overline{D'}$ — компакты. Если функция $Q\colon X \to (0,\,\infty)$ класса $L^1_\mu(D)$ удовлетворяет условию* (14) *в каждой точке $x_0 \in \partial D$, то любой континуально кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, $p \in (0,\infty)$, $f\colon D \to D'$ продолжим до гомеоморфизма $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D'}$.*

Теорема 4. *Пусть D и D' имеют континуально слабо плоские границы относительно p-модуля, $p \in (0,\infty)$, $\overline{D}$ и $\overline{D'}$ — компакты и $Q\colon X \to (0,\,\infty)$ — функция класса $L^1_\mu(D)$ с*

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} \frac{Q(x)d\mu(x)}{d(x,x_0)^p} = o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^p\right), \quad p \in (0,\infty),$$

в каждой точке $x_0 \in \partial D$ для некоторого $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) < d(x_0)\colon = \sup_{x\in D} d(x,x_0)$. Тогда любой континуально кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля $f\colon D \to D'$ допускает продолжение до гомеоморфизма $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D'}$.

***Следствие* 7.** *В частности, заключение теоремы* 4 *имеет место, если сингулярный интеграл*

$$\int \frac{Q(x)d\mu(x)}{d(x,x_0)^p}$$

сходится в окрестности каждой точки $x_0 \in \partial D$.

Теорема 5. *Пусть* D — *континуальная область в* p*-регулярном сверху пространстве* (X,d,μ), $p \geq 2$, *которая континуально связна на границе и удовлетворяет условию* (14) *во всех граничных точках,* D' — *область с континуально слабо плоской границей относительно* p*-модуля в пространстве* (X',d',μ'), *а* $\overline{D}$ *и* $\overline{D'}$ — *компакты. Если функция* $Q\colon X \to (0,\infty)$ *имеет конечное среднее колебание во всех граничных точках континуальной области* D, *то любой континуально кольцевой* Q*-гомеоморфизм относительно* p*-модуля,* $p \in [2,\infty)$, $f\colon D \to D'$ *продолжим до гомеоморфизма* $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D'}$.

***Следствие* 8.** *В частности, заключение теоремы* 5 *имеет место, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \frac{1}{\mu(B(x_0,\varepsilon))} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\,d\mu(x) < \infty \qquad \forall\, x_0 \in \partial D.$$

1. *Iwaniec T., Koskela P., Onninen J.* Mappings of finite distortion: Compactness // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2002. – **27**, № 2. – P. 391 – 417.
2. *Koskela P., Onninen J.* Mappings of finite distortion: Capacity and modulus inequalities // J. reine und angew. Math. – 2006. – **599**. – S. 1 – 26.
3. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory // Springer Monogr. Math. – New York: Springer, 2009.
4. *Onninen J.* Mappings of finite distortion: continuity: Dissertation. – Jyvaskyla, 2002.
5. *Rajala K.* Mappings of finite distortion: removable singularities: Dissertation. – Jyvaskyla, 2003.
6. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space. – Helsinki, 2000. – **256**. – 22 p. – (Preprint / Univ. Helsinki).
7. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397 – 1420.
8. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 2005. – **30**, № 1. – P. 49 – 69.
9. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Q-homeomorphisms // Contemp. Math. – 2004. – **364**. – P. 193 – 203.
10. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical function theory and non-linear analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001.
11. *Golberg A.* Differential properties of (α, Q)-homeomorphisms // Further Progress in Analysis (Proc. 6th ISAAC Congr.). – Hackensack, NJ: World Sci. Publ, 2009. – P. 218 – 228.
12. *Golberg A.* Integrally quasiconformal mappings in space // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 2. – С. 53 – 64.
13. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 353 – 393.
14. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation and ring homeomorphisms // Укр. мат. вестн. – 2007. – **4**, № 1. – P. 97 – 115.
15. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн. – 2007. – **48**, № 6. – С. 1361 – 1376.
16. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On strong solutions of the Beltrami equations // Complex Variables and Elliptic Equat. – 2010. – **55**, № 1-3. – P. 219 – 236.
17. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* To strong ring solutions of the Beltrami equations // Uzbek. Math. J. – 2009. – № 1. – P. 127 – 137.
18. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation: a geometric approach // Developments Math. – New York: Springer, 2012. – **26**.

19. *Афанасьева Е. С., Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Об отображениях в классах Орлича – Соболева на римановых многообразиях // Укр. мат. вестн. – 2011. – **8**, № 3. – С. 319 – 342.
20. *Салимов Р. Р.* Об оценке меры образа шара // Сиб. мат. журн. – 2012. – **53**, № 4. – С. 920 – 930.
21. *Смоловая Е. С.* Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 5. – С. 682 – 689.
22. *Рязанов В., Салимов Р.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2007. – **4**, № 2. – С. 199 – 234.
23. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. – М.: Наука, 1969.
24. *Куратовский К.* Топология. – М.: Мир, 1969. – Т. 2.
25. *Whyburn G. T.* Analytic topology. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1942.
26. *Hurewicz W., Wallman H.* Dimension theory. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1948.
27. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – **98**. – P. 171 – 219.
28. *Heinonen J.* Lectures on analysis on metric spaces. – New York: Springer, 2001.
29. *Игнатьев А. А., Рязанов В. И.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395 – 417.
30. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987.

Получено 28.12.12