УДК 519.21

М. В. Працьовитий, О. П. Макарчук (Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, Київ)

РОЗПОДІЛ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ, ЗОБРАЖЕНОЇ ДВІЙКОВИМ ДРОБОМ ІЗ ТРЬОМА НАДЛИШКОВИМИ ОДНАКОВО РОЗПОДІЛЕНИМИ ЦИФРАМИ

We present the complete solution of the problem of pure Lebesgue type of the distribution of random variable χ represented by a binary fraction with three identically distributed redundant digits.

Получено полное решение задачи о чистом лебеговском типе распределения случайной величины χ, представленной двоичной дробью с тремя избыточными цифрами, которые имеют одинаковое распределение.

1. Вступ. Нехай (χ_k) — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0, 1, 2, 3, 4 з імовірностями p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 відповідно. Величина

$$\chi = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k 2^{-k}$$

називається випадковою величиною, зображеною двійковим дробом із трьома надлишковими цифрами, які мають однаковий розподіл.

Нехай (ξ_k) — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0, 1, 2, 3 з імовірностями p_0, p_1, p_2, p_3 відповідно. Величина

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k 2^{-k}$$

називається випадковою величиною, зображеною двійковим дробом із двома надлишковими цифрами, які мають однаковий розподіл.

За теоремою Джессена – Вінтнера [1] випадкова величина χ має чистий розподіл: або чисто дискретний, або чисто абсолютно неперервний, або чисто сингулярний. За теоремою П. Леві [2] випадкова величина χ має чисто дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли

$$p_{\max} = \max_{0 \le i \le 4} p_i = 1.$$

Характеристичною функцією випадкової величини ξ називається комплекснозначна функція $f_\xi(t) = M(e^{it\xi})$, де $M(\cdot)$ — математичне сподівання.

Відомо [3], що коли випадкова величина ξ має дискретний розподіл, то

$$L_\xi = \lim_{|t|\to\infty} \sup \left| f_\xi(t) \right| = 1.$$

Якщо розподіл випадкової величини ξ є абсолютно неперервним, то $L_\xi = 0$, якщо — сингулярним, то $0 \le L_\xi \le 1$. У випадку чистоти розподілу випадкової величини ξ умова $L_\xi = 0$ є необхідною для абсолютної неперервності, а умова $0 < L_\xi < 1$ — достатньою для сингулярності розподілу випадкової величини ξ. Якщо випадкова величина ξ має чистий і неперервний розподіл, то з $L_\xi > 0$ випливає сингулярність розподілу випадкової величини ξ. Отже, за поведінкою модуля характеристичної функції випадкової величини ξ на нескінченності (тобто за величиною L_ξ) можна частково судити про тип її розподілу.

Задача про тип розподілу випадкової величини ξ розглядалась у роботі [4].

Теорема 1 [4]. *Випадкова величина* ξ *має чистий розподіл, причому*

1) *дискретний* $\Leftrightarrow p_{\max} = \max_{0\le i\le 3}\{p_i\} = 1$;

2) $\begin{cases} \max_{0\le i\le 4}\{p_i\} \neq 1, \\ p_0 - p_1 + p_2 - p_3 \neq 0, \\ (p_0-p_2)^2 + (p_1-p_3)^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ *сингулярний*;

3) $(p_0-p_2)^2 + (p_1-p_3)^2 = 0 \Rightarrow$ *абсолютно неперервний.*

Зауважимо, що випадкова величина ξ є частковим випадком випадкової величини χ при умові $p_4 = 0$.

2. Тип розподілу випадкової величини χ.

Теорема 2 [4]. *Нехай* $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k s^{-k}$, *де* μ_k — *незалежні дискретно розподілені випадкові величини, які набувають значень* $0, 1, \ldots, m-1$ *з імовірностями* $p_0, p_1, \ldots, p_m$ *відповідно. Якщо для будь-якого* $k \in \{0, 1, \ldots, k_0 - 1\}$, *де* k_0 — *найменший натуральний розв'язок нерівності* $2(m-1)s^{-k} < 1$, *мають місце співвідношення*

$$\sum_{n=0}^{m-1} p_n \cos 2\pi n s^{-k} \neq 0$$

або

$$\sum_{n=0}^{m-1} p_n \sin 2\pi n s^{-k} \neq 0,$$

то $L_\mu > 0$.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови*

$$\max_{0\le i\le 4} p_i \neq 1,$$

$$p_0 - p_1 + p_2 - p_3 + p_4 \neq 0,$$

$$(p_0 - p_2 + p_4)^2 + (p_1 - p_3)^2 \neq 0,$$

$$\left(p_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(p_4 - \frac{1}{2}\right)^2 \neq 0,$$

то розподіл випадкової величини χ *є сингулярним.*

Доведення. З рівності $L_\chi = 0$ і теореми 2 випливають умови

$$\begin{cases} p_0 \cos\frac{2\pi\cdot 0}{2} + p_1 \cos\frac{2\pi\cdot 1}{2} + p_2 \cos\frac{2\pi\cdot 2}{2} + p_3 \cos\frac{2\pi\cdot 3}{2} + p_4 \cos\frac{2\pi\cdot 4}{2} = 0, \\ p_0 \sin\frac{2\pi\cdot 0}{2} + p_1 \sin\frac{2\pi\cdot 1}{2} + p_2 \sin\frac{2\pi\cdot 2}{2} + p_3 \sin\frac{2\pi\cdot 3}{2} + p_4 \sin\frac{2\pi\cdot 4}{2} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_0 \cos\frac{2\pi\cdot 0}{4} + p_1 \cos\frac{2\pi\cdot 1}{4} + p_2 \cos\frac{2\pi\cdot 2}{4} + p_3 \cos\frac{2\pi\cdot 3}{4} + p_4 \cos\frac{2\pi\cdot 4}{4} = 0, \\ p_0 \sin\frac{2\pi\cdot 0}{4} + p_1 \sin\frac{2\pi\cdot 1}{4} + p_2 \sin\frac{2\pi\cdot 2}{4} + p_3 \sin\frac{2\pi\cdot 3}{4} + p_4 \sin\frac{2\pi\cdot 4}{4} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_0 \cos\dfrac{2\pi\cdot 0}{8} + p_1\cos\dfrac{2\pi\cdot 1}{8} + p_2\cos\dfrac{2\pi\cdot 2}{8} + p_3\cos\dfrac{2\pi\cdot 3}{8} + p_4\cos\dfrac{2\pi\cdot 4}{8} = 0, \\ p_0 \sin\dfrac{2\pi\cdot 0}{8} + p_1\sin\dfrac{2\pi\cdot 1}{8} + p_2\sin\dfrac{2\pi\cdot 2}{8} + p_3\sin\dfrac{2\pi\cdot 3}{8} + p_4\sin\dfrac{2\pi\cdot 4}{8} = 0, \end{cases}$$

$$L_\chi = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p_0 - p_1 + p_2 - p_3 + p_4 = 0, \\ \begin{cases} p_0 - p_2 + p_4 = 0, \\ p_0 - p_3 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} p_0 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}p_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}p_3 - p_4 = 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}p_1 + p_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}p_3 = 0, \end{cases} \end{array}\right.$$

$$L_\chi = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p_0 - p_1 + p_2 - p_3 + p_4 = 0, \\ \begin{cases} p_0 - p_2 + p_4 = 0, \\ p_1 - p_3 = 0, \end{cases} \\ p_0 = \dfrac{1}{2} = p_4. \end{array}\right.$$

Таким чином, якщо

$$\max_{0\le i\le 4} p_i \ne 1,$$

$$p_0 - p_1 + p_2 - p_3 + p_4 \ne 0,$$

$$(p_0 - p_2 + p_4)^2 + (p_1 - p_3)^2 \ne 0,$$

$$\left(p_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(p_4 - \frac{1}{2}\right)^2 \ne 0,$$

то $L_\chi > 0$ і розподіл випадкової величини χ, будучи неперервним, є сингулярним.

Теорему 3 доведено.

Означення 1. *Нехай n — натуральне число, m — невід'ємне число, яке не перевищує $4 \times$ $\times\, (2^n - 1)$, $\|\alpha_{ij}\|$ — матриця розмірності $k \times n$ (з максимально можливим k), елементами якої є цифри алфавіту $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, причому для кожного $i \in \{1, \ldots, k\}$ виконується умова*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_{ij}}{2^j} = \frac{m}{2^n}.$$

Для ймовірнісного вектора $\bar p = (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4)$ означимо величину (число)

$$S^{\bar p}_{m,n} = \sum_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{n} p_{\alpha_{ij}},$$

яку називатимемо сумою всіх можливих добутків.

Покладемо $S^{\bar{p}}_{-1,n} = S^{\bar{p}}_{-2,n} = S^{\bar{p}}_{-3,n} = 0$ для кожного натурального n.

Лема 1. *Якщо $p_0 - p_1 + p_2 - p_3 + p_4 = 0$, то для кожного натурального n і довільного $m \in \{0, 1, \ldots, 4 \cdot (2^n - 1)\}$ виконується нерівність*

$$S^{\bar{p}}_{m,n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Доведення. Розглянемо многочлен

$$g(z) = \prod_{i=1}^{n} \left(p_0 + p_1 z^{2^{i-1}} + p_2 z^{2\cdot 2^{i-1}} + p_3 z^{3\cdot 2^{i-1}} + p_4 z^{4\cdot 2^{i-1}}\right).$$

Нехай $g(z) = \sum_{i=0}^{4(2^n-1)} a_i z^i$. Якщо в k-му $\left(k \in \{1, \ldots, n\}\right)$ множнику добутку $\prod_{i=1}^{n} \big(p_0 + p_1 z^{2^{i-1}} + p_2 z^{2\cdot 2^{i-1}} + p_3 z^{3\cdot 2^{i-1}} + p_4 z^{4\cdot 2^{i-1}}\big)$ взяти член $p_{i_{k-1}} z^{2^{k-1}}$, де $i_{k-1} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ для кожного $k \in \{1, \ldots, n\}$, і всі ці члени перемножити, отримаємо вираз $z^m \prod_{k=1}^{n} p_{\alpha_{i_{k-1}}}$, де $m = i_0 + 2i_1 + \ldots + 2^{n-1} i_{n-1}$, тобто $a_m = \sum \prod_{k=1}^{n} p_{\alpha_{i_{k-1}}}$, де сума береться за всіма можливими наборами $(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1})$, для яких $m = i_0 + 2i_1 + \ldots + 2^{n-1} i_{n-1}$, або за всіма можливими наборами $(i_{n-1}, i_{n-2}, \ldots, i_1, i_0)$, для яких $\frac{m}{2^n} = \frac{i_{n-1}}{2} + \frac{i_{n-2}}{2^2} + \ldots + \frac{i_1}{2^{n-1}} + \frac{i_0}{2^n}$.

Отже, $a_m = S^{\bar{p}}_{m,n}, m \in \{0, 1, \ldots, 4 \cdot (2^n - 1)\}$.

Тому для доведення потрібного твердження достатньо показати, що

$$a_m \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in N \quad \forall m \in \{0, 1, \ldots, 4 \cdot (2^n - 1)\}.$$

Доведення проведемо за індукцією по n.

Якщо $n = 1$, то $a_j = p_j \leq \frac{1}{2}$ для кожного $j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, бо $p_0 - p_1 + p_2 - p_3 + p_4 = 0$, що рівносильно $p_0 + p_2 + p_4 = \frac{1}{2} = p_1 + p_3$.

Нехай твердження є правильним при $n = k$, тобто $a_l \leq \frac{1}{2^k}$ для кожного $l \in \{0, 1, \ldots, 4 \times \times (2^k - 1)\}$, де

$$\prod_{i=1}^{k} \left(p_0 + p_1 z^{2^{i-1}} + p_2 z^{2\cdot 2^{i-1}} + p_3 z^{3\cdot 2^{i-1}} + p_4 z^{4\cdot 2^{i-1}}\right) = \sum_{i=0}^{4(2^k-1)} a_i z^i. \tag{1}$$

Доведемо, що твердження є правильним при $n = k + 1$, тобто $b_l \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ $\forall l \in \{0, 1, \ldots, 4 \times \times (2^{k+1} - 1)\}$, де

$$\prod_{i=1}^{k+1} \left(p_0 + p_1 z^{2^{i-1}} + p_2 z^{2\cdot 2^{i-1}} + p_3 z^{3\cdot 2^{i-1}} + p_4 z^{4\cdot 2^{i-1}}\right) = \sum_{i=0}^{4(2^{k+1}-1)} b_i z^i.$$

Виконавши заміну $z \to z^2$ в рівності (1), отримаємо

$$\prod_{i=1}^{k} \left(p_0 + p_1 z^{2^i} + p_2 z^{2\cdot 2^i} + p_3 z^{3\cdot 2^i} + p_4 z^{4\cdot 2^i}\right) = \sum_{i=0}^{4(2^k-1)} a_i z^{2i}.$$

Отже,

$$\sum_{i=0}^{4(2^{k+1}-1)} b_i z^i = \left(p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + p_4 z^4\right) \sum_{i=0}^{4(2^k-1)} a_i z^{2i}.$$

Маємо

$$b_{2m} = p_0 a_m + p_2 a_{m-1} + p_4 a_{m-2}, \quad m \in \{1, 2, \ldots, 2 \cdot 2^k - 2\},$$

$$b_{2r+1} = p_1 a_r + p_3 a_{r-1}, \quad r \in \big\{1, 2, \ldots, 2 \cdot 2^k - 2)\big\},$$

де $a_j = 0$, якщо $j < 0$ або $j > 4(2^k - 1)$.

Враховуючи припущення індукції, одержуємо

$$b_{2m} = p_0 a_m + p_2 a_{m-2} + p_4 a_{m-2} \leq (p_0 + p_2 + p_4) \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k+1}}$$

для кожного $m \in \{1, 2, \ldots, 2 \cdot 2^{k+1} - 2\}$,

$$b_{2r+1} = p_1 a_r + p_3 a_{r-2} \leq (p_1 + p_3) \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k+1}}$$

для кожного $r \in \{1, 2, \ldots, 2 \cdot 2^{k+1} - 2\}$.

Лему доведено.

Лема 2. *Якщо розподіл випадкової величини χ є неперервним, то для кожного натурального n і довільного $m \in \big\{0, 1, \ldots, 4 \cdot (2^n - 1)\big\}$ виконується рівність*

$$\mathrm{P}\left\{\chi \in \left[\frac{m}{2^n}; \frac{m+1}{2^n}\right]\right\} = \mathrm{P}\big\{\chi \in [0;1]\big\} \cdot S^{\bar{p}}_{m,n} + \mathrm{P}\big\{\chi \in [1;2]\big\} \cdot S^{\bar{p}}_{m-1,n} +$$

$$+ \mathrm{P}\big\{\chi \in [2;3]\big\} \cdot S^{\bar{p}}_{m-2,n} + \mathrm{P}\big\{\chi \in [3;4]\big\} \cdot S^{\bar{p}}_{m-3,n}.$$

Доведення. Нехай $\Delta^2_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\ldots} \in \left[\frac{m}{2^n}; \frac{m+1}{2^n}\right]$.

Оскільки $\Delta^2_{0,00\ldots0\alpha_{n+1},\alpha_{n+2}\ldots} \in \left[0; \frac{4}{2^n}\right]$, то можливі наступні випадки:

1) $\Delta^2_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)} = \frac{m}{2^n}$ і $\Delta^2_{0,00\ldots0\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots} \in \left[0; \frac{1}{2^n}\right]$,

2) $\Delta^2_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)} = \frac{m}{2^n} - \frac{1}{2^n}$ і $\Delta^2_{0,00\ldots0\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots} \in \left[\frac{1}{2^n}; \frac{2}{2^n}\right]$,

3) $\Delta^2_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)} = \frac{m}{2^n} - \frac{2}{2^n}$ і $\Delta^2_{0,00\ldots0\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots} \in \left[\frac{2}{2^n}; \frac{3}{2^n}\right]$,

4) $\Delta^2_{0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)} = \frac{m}{2^n} - \frac{3}{2^n}$ і $\Delta^2_{0,00\ldots0\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots} \in \left[\frac{3}{2^n}; \frac{4}{2^n}\right]$.

Оскільки $\mathrm{P}\left\{\frac{r}{2^n} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\chi_i}{2^i} \leq \frac{r+1}{2^n}\right\} = \mathrm{P}\left\{r \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\chi_{n+j}}{2^j} \leq r+1\right\} = \mathrm{P}\{r \leq \leq \chi \leq r+1\}$, $r \in \{0,1,2,3\}$, і $\mathrm{P}\left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{\chi_{n+j}}{2^j} = \frac{m-r}{2^n}\right\} = S^{\bar{p}}_{m-r,n}$, де $r \in \{0,1,2,3\}$, то

$$\mathrm{P}\left\{\chi\in\left[\frac{m}{2^n};\frac{m+1}{2^n}\right]\right\}=\mathrm{P}\bigl\{\chi\in[0;1]\bigr\}\cdot S^{\bar p}_{m,n}+\mathrm{P}\bigl\{\chi\in[1;2]\bigr\}\cdot S^{\bar p}_{m-1,n}+$$

$$+\mathrm{P}\bigl\{\chi\in[2;3]\bigr\}\cdot S^{\bar p}_{m-2,n}+\mathrm{P}\bigl\{\chi\in[3;4]\bigr\}\cdot S^{\bar p}_{m-3,n}.$$

Лему доведено.

Лема 3. *Якщо* $p_0-p_1+p_2-p_3+p_4=0$, *то виконується нерівність*

$$F_\chi\left(\frac{m}{2^n}\right)-F_\chi\left(\frac{k}{2^n}\right)\le\frac{m}{2^n}-\frac{k}{2^n}\quad \textit{для всіх } m,k\in\{0,1,\ldots,4\cdot 2^n-3\},\quad m\ge k.$$

Доведення. З огляду на леми 1 і 2 отримуємо

$$\left(F_\chi\left(\frac{t+1}{2^n}\right)-F_\chi\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)=\mathrm{P}\left\{\chi\in\left[\frac{t}{2^n};\frac{t+1}{2^n}\right]\right\}\le\sum_{j=0}^{3}\frac{1}{2^n}\mathrm{P}\bigl\{\chi\in[j;j+1]\bigr\}=$$

$$=\frac{1}{2^n}\mathrm{P}\bigl\{\chi\in[0;4]\bigr\}=\frac{1}{2^n}.$$

Отже, для будь-якого $t\in\bigl\{0,1,\ldots,4\cdot(2^n-1)\bigr\}$ та $n\in N$ виконується нерівність

$$F_\chi\left(\frac{t+1}{2^n}\right)-F_\chi\left(\frac{t}{2^n}\right)\le\frac{1}{2^n}.$$

Нехай $m,k\in\{0,1,\ldots,4\cdot 2^n-3\}$. Якщо $m>n$, то, враховуючи останню нерівність, маємо

$$\left(F_\chi\left(\frac{m}{2^n}\right)-F_\chi\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)=\sum_{i=0}^{m-k-1}\left(F_\chi\left(\frac{m-i}{2^n}\right)-F_\chi\left(\frac{m-i-1}{2^n}\right)\right)\le\frac{m-k}{2^n}=\frac{m}{2^n}-\frac{k}{2^n},$$

тобто $F_\chi\left(\frac{m}{2^n}\right)-F_\chi\left(\frac{k}{2^n}\right)\le\frac{m}{2^n}-\frac{k}{2^n}$. Якщо $m=k$, то $F_\chi\left(\frac{m}{2^n}\right)-F_\chi\left(\frac{k}{2^n}\right)=\frac{m}{2^n}-\frac{k}{2^n}$.

Отже, $F_\chi\left(\frac{m}{2^n}\right)-F_\chi\left(\frac{k}{2^n}\right)\le\frac{m}{2^n}-\frac{k}{2^n}$ для всіх $m,k\in\{0,1,\ldots,4\cdot 2^n-3\}$, $m\ge k$.

Лему доведено.

Лема 4. *Для довільного* $x\in R$ *виконується рівність*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[2^nx]}{2^n}=x.$$

Доведення. Оскільки для будь-якого $t\in R$ $t-1<[t]\le t$, то

$$x-\frac{1}{2^n}=\frac{2^nx-1}{2^n}<\frac{[2^nx]}{2^n}\le\frac{2^nx}{2^n}=x,$$

причому $\lim_{n\to\infty}\left(x-\frac{1}{2^n}\right)=x=\lim_{n\to\infty}x$, тому $\lim_{n\to\infty}\frac{[2^nx]}{2^n}=x$.

Лему доведено.

Теорема 4. *Якщо* $p_0-p_1+p_2-p_3+p_4=0$, *то розподіл випадкової величини* χ *є абсолютно неперервним.*

Доведення. Нехай $x_2, x_1 \in [0;4)$, $x_2 \geq x_1$. Враховуючи лему 4, маємо $\lim_{n\to\infty} \dfrac{[2^n x_2]}{4\cdot 2^n - 3} = = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{[2^n x_2]}{2^n}}{4 - \dfrac{2}{2^n}} = \dfrac{x_2}{4} < 1$. Нехай $\varepsilon = 1 - \dfrac{x_2}{4} > 0$, тоді існує $N_0 \in N$ таке, що для будь-якого $n \in N$, $n > N_0$, $\dfrac{[2^n x_2]}{4\cdot 2^n - 2} = \dfrac{x_2}{4} + \varepsilon < 1$, тобто $[2^n x_2] < 4\cdot 2^n - 3\ \forall n \in N, n > N_0$. Зрозуміло, що $[2^n x_2] \geq [2^n x_1]\ \forall n \in N$, тому $[2^n x_1], [2^n x_2] \in \{0, 1, \ldots, 4\cdot 2^n - 3\}\ \forall n \in N$, $n > N_0$, і за лемою 3

$$F_\chi\left(\frac{[2^n x_2]}{2^n}\right) - F_\chi\left(\frac{[2^n x_1]}{2^n}\right) \leq \left(\frac{[2^n x_2]}{2^n} - \frac{[2^n x_1]}{2^n}\right) \quad \forall n \in N, \quad n > N_0. \tag{2}$$

За лемою 4

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[2^n x_1]}{2^n} = x_1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{[2^n x_2]}{2^n} = x_2.$$

Оскільки функція $F_\xi(x)$ є неперервною, то

$$\lim_{n\to\infty} F_\chi\left(\frac{[2^n x_1]}{2^n}\right) = F_\chi\left(\lim_{n\to\infty} \frac{[2^n x_1]}{2^n}\right) = F_\chi(x_1), \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} F_\chi\left(\frac{[2^n x_2]}{2^n}\right) = F_\chi\left(\lim_{n\to\infty} \frac{[2^n x_2]}{2^n}\right) = F_\chi(x_2). \tag{4}$$

Виконавши граничний перехід у нерівності (2) при $n \to \infty$ і врахувавши рівності (3) та (4), отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} F_\chi\left(\frac{[2^n x_2]}{2^n}\right) - \lim_{n\to\infty} F_\chi\left(\frac{[2^n x_1]}{2^n}\right) \leq \left(\lim_{n\to\infty} \frac{[2^n x_2]}{2^n} - \lim_{n\to\infty} \frac{[2^n x_1]}{2^n}\right),$$

$$F_\chi(x_2) - F_\chi(x_1) \leq x_2 - x_1 \quad \forall x_2, x_1 \in [0;4), \quad x_2 \geq x_1. \tag{5}$$

Покажемо, що $F_\chi(x_2) - F_\chi(x_1) \leq (x_2 - x_1)\ \forall x_2, x_1 \in [0;4]$, $x_2 \geq x_1$. Для цього достатньо показати, що $F_\chi(4) - F_\chi(x_1) \leq (4 - x_1)\ \forall x_1 \in [0;4]$. Оскільки остання нерівність при $x_1 = 4$ виконується, розглянемо випадок $x_1 \in [0;4)$. Розглянемо послідовність $a_n = 4 - \dfrac{1}{n}$. Оскільки $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(4 - \dfrac{1}{n}\right) = 4$, то для $\varepsilon = 4 - x_1 > 0$ існує $N_1 \in N$ таке, що для будь-якого $n \in N$, $n > N_1$, $a_n > 4 - \varepsilon = x_1$, але $a_n = 4 - \dfrac{1}{n} < 4\ \forall n \in N$. Тому, використавши нерівність (5), отримаємо

$$F_\chi\left(4 - \frac{1}{n}\right) - F_\chi(x_1) \leq 4 - \frac{1}{n} - x_1 \quad \forall n \in N, \quad n > N_1.$$

Виконавши граничний перехід в останній нерівності при $n \to \infty$ та врахувавши, що $\lim_{n\to\infty} F_\chi\left(4 - \dfrac{1}{n}\right) = F_\chi\left(\lim_{n\to\infty}\left(4 - \dfrac{1}{n}\right)\right) = F_\chi(4)$, будемо мати

$$F_\chi(4) - F_\chi(x_1) \leq 4 - x_1.$$

Отже,

$$F_\chi(x_2) - F_\chi(x_1) \le x_2 - x_1 \quad \forall x_2, x_1 \in [0;4], \quad x_2 \ge x_1.$$

Оскільки функція $F_\chi(x)$ є неспадною, то останню нерівність можна записати у вигляді

$$\bigl|F_\chi(x_2) - F_\chi(x_1)\bigr| \le |x_2 - x_1| \quad \forall x_1, x_2 \in [0;4].$$

Отже, $F_\chi(x)$ задовольняє умову Ліпшиця на проміжку $[0;4]$.

Оскільки $F_\chi(x) = 0$ при $x \le 0$, $F_\chi(x) = 1$ при $x \ge 4$, на проміжку $[0;4]$ $F_\chi(x)$ задовольняє умову Ліпшиця, що, як відомо [4], означає абсолютну неперервність $F_\chi(x)$ на проміжку $[0;4]$, приходимо до висновку, що функція розподілу $F_\chi(x)$ є абсолютно неперервною.

Теорема 5. *Якщо виконуються умови*

$$p_0 - p_2 + p_4 = 0,$$

$$p_1 - p_3 = 0,$$

то розподіл випадкової величини χ є абсолютно неперервним.

Доведення. *Перший спосіб.* Якщо виконується умова (5), то випадкову величину χ_k можна записати у вигляді суми $\chi_k = \psi_k + \tau_k$, де ψ_k, τ_k — незалежні випадкові величини, перша з яких набуває значень 0, 1, 2 з імовірностями $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$ відповідно, а друга — 0, 1, 2 з імовірностями $2p_0$, $2p_3$, $2p_4$.

Таким чином, $\chi = \psi + \tau$, де $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k 2^{-k}$, $\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k 2^{-k}$ — незалежні випадкові величини, причому ψ має рівномірний розподіл, що, як відомо, свідчить про абсолютну неперервність розподілу χ.

Другий спосіб. Нехай $g(z) = \sum_{i=0}^{4(2^n-1)} a_i z^i$ — канонічний розклад многочлена

$$g(z) = \prod_{i=1}^{n} \bigl(p_0 + p_1 z^{2^{i-1}} + p_2 z^{2\cdot 2^{i-1}} + p_3 z^{3\cdot 2^{i-1}} + p_4 z^{4\cdot 2^{i-1}}\bigr).$$

Враховуючи доведення теореми 4, для доведення потрібного твердження достатньо показати, що виконується нерівність

$$a_p \le \frac{1}{2^n} \quad \forall p \in \bigl\{0, 1, \ldots, 4\cdot(2^n - 1)\bigr\} \quad \forall n \in N.$$

Ми доведемо більш сильну нерівність:

$$a_p \le \frac{1}{2^{n+1}} \quad \forall p \in \bigl\{0, 1, \ldots, 4\cdot(2^n - 1)\bigr\} \quad \forall n \in N.$$

Оскільки $p_0 - p_2 + p_4 = 0$ та $p_1 = p_3$, то

$$p_4 t^4 + p_3 t^3 + p_2 t^2 + p_1 t + p_0 = p_4 t^4 + p_1 t^3 + (p_4 + p_0) t^2 + p_1 t + p_0 = (t^2 + 1)(p_4 t^2 + p_1 t + p_0).$$

Оскільки

$$(1 + z^2)\ldots(1 + z^{2^n}) = \frac{(1 - z^2)(1 + z^2)\ldots(1 + z^{2^n})}{1 - z^2} =$$

$$= \frac{(1-z^4)\ldots(1+z^{2^n})}{1-z^2} = \ldots = \frac{1-z^{2^{n+1}}}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + \ldots + z^{2^{n+1}-2},$$

де на початку використано формулу різниці квадратів, а в кінці — формулу для суми геометричної прогресії, маємо

$$g(z) = \prod_{i=1}^{n} \left(p_0 + p_1 z^{2^{i-1}} + p_2 z^{2 \cdot 2^{i-1}} + p_3 z^{3 \cdot 2^{i-1}} + p_4 z^{4 \cdot 2^{i-1}} \right) =$$

$$= \prod_{k=0}^{n} \left(1 + z^{2^{k+1}} \right) \prod_{k=0}^{n} \left(p_4 z^{2^{k+1}} + p_1 z^{2^k} + p_0 \right) = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} z^{2k} \prod_{k=0}^{n} \left(p_4 z^{2^{k+1}} + p_1 z^{2^k} + p_0 \right).$$

Нехай $h(z) = \prod_{k=0}^{n} \left(p_4 z^{2^{k+1}} + p_1 z^{2^k} + p_0 \right)$ та $h(z) = \sum_{j=0}^{2^{n+2}-1} b_j z^j$. Тоді

$$g(z) = h(z) \sum_{j=0}^{2^{n+2}-1} b_j z^j, \qquad \sum_{i=0}^{4(2^n-1)} a_i z^i = \sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} z^{2j} \sum_{j=0}^{2^{n+2}-1} b_j z^j.$$

Маємо

$$a_p = \sum_{j=0}^{[p/2]} b_{2j} \quad \forall p \in \{0, 1, \ldots, 2^{n+2} - 2\},$$

$$a_p = \sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} b_{p-2j} \quad \forall p \in \left\{ 2^{n+2} - 1, 2^{n+1}, \ldots, 4 \cdot (2^{n+1} - 1) \right\}.$$

Легко бачити, що $b_p \geq 0 \; \forall p \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. Також зрозуміло, що $\sum_{j=0}^{2^{n+2}-2} b_j = h(1) =$ $= (p_4 + p_2 + p_0)^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$, бо

$$1 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 2(p_0 + p_2 + p_4) \Rightarrow p_0 + p_2 + p_4 = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$a_p = \sum_{j=0}^{[p/2]} b_{2j} \leq \sum_{j=0}^{2^{n+2}-2} b_j = \frac{1}{2^{n+1}} \quad \forall p \in \{0, 1, \ldots, 2^{n+2} - 2\},$$

$$a_p = \sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} b_{p-2j} \leq \sum_{j=0}^{2^{n+2}-2} b_j = \frac{1}{2^{n+1}} \quad \forall p \in \left\{ 2^{n+2} - 1, 2^{n+1}, \ldots, 4 \cdot (2^n - 1) \right\}.$$

Оскільки при $p_0 = \frac{1}{2} = p_4$ випадкова величина χ має рівномірний розподіл, то на підставі теорем 1 – 5 отримуємо такий наслідок.

Наслідок. *Випадкова величина χ має чистий розподіл, причому*

1) *дискретний* $\Leftrightarrow p_{\max} = \max_{0\le i\le 4} p_i = 1$;

$$2)\ \begin{cases} \max\limits_{0\le i\le 4} p_i \ne 1, \\ p_0 - p_1 + p_2 - p_3 + p_4 \ne 0, \\ (p_0 - p_2 + p_4)^2 + (p_1 - p_3)^2 \ne 0, \\ \left(p_0 - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(p_4 - \dfrac{1}{2}\right)^2 \ne 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \textit{сингулярний};$$

$$3)\ \begin{cases} p_0 - p_1 + p_2 - p_3 + p_4 = 0, \\ \begin{cases} p_0 - p_2 + p_4 = 0, \\ p_1 - p_3 = 0, \end{cases} \\ p_0 = \dfrac{1}{2} = p_4 \end{cases} \quad \Rightarrow \textit{абсолютно неперервний}.$$

1. *Jessen B., Wintner A.* Distribution function and Riemann Zeta-function // Trans. Amer. Math. Soc. – 1935. – **38**. – P. 48 – 88.
2. *Levy P.* Sur les sries don't les termes sont des variables independantes // Stud. math. – 1931. – **3**. – P. 119 – 155.
3. *Лукач Е.* Характеристические функции. – М.: Наука, 1979. – 424 с.
4. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ ім. М. П Драгоманова, 1998. – 296 с.

Одержано 22.11.12