УДК 517.956.4

Е. В. Степанова (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ЗАТУХАНИЕ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ АБСОРБЦИОННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

We study the behavior of solutions for the parabolic equation of nonstationary diffusion with double nonlinearity and a degenerate absorption term:

$$\big(|u|^{q-1}u\big)_t - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla_x u|^{q-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + a_0(x)|u|^{\lambda-1}u = 0,$$

where $a_0(x) \geq d_0 \exp\Big(-\dfrac{\omega(|x|)}{|x|^{q+1}}\Big)$, $d_0 = \mathrm{const} > 0$, $0 \leq \lambda < q$, and $\omega(\cdot) \in C([0,+\infty))$, $\omega(0) = 0$, $\omega(\tau) > 0$ when $\tau > 0$, $\displaystyle\int_{0+} \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau < \infty$. Using the local-energy method, we show that a Dini-type condition imposed on the function $\omega(\cdot)$ guarantees the extinction of an arbitrary solution in a finite period of time.

Вивчається поведінка розв'язків подвійно нелінійних параболічних рівнянь нестаціонарної дифузії з виродженим абсорбційним членом:

$$\big(|u|^{q-1}u\big)_t - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla_x u|^{q-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + a_0(x)|u|^{\lambda-1}u = 0,$$

де $a_0(x) \geq d_0 \exp\Big(-\dfrac{\omega(|x|)}{|x|^{q+1}}\Big)$, $d_0 = \mathrm{const} > 0$, $0 \leq \lambda < q$, $\omega(\cdot) \in C([0,+\infty))$, $\omega(0) = 0$, $\omega(\tau) > 0$ при $\tau > 0$, $\displaystyle\int_{0+} \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau < \infty$. Методом локальних енергетичних оцінок отримано умову типу Діні на функцію $\omega(\cdot)$, що гарантує згасання довільного розв'язку за скінченний час.

1. Введение: постановка задачи и история вопроса. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$, с C^1-гладкой границей $\partial\Omega$. В полуограниченном цилиндре $Q = (0,+\infty) \times \Omega$ рассматривается задача Коши – Неймана

$$\big(|u|^{q-1}u\big)_t - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla_x u|^{q-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + a_0(x)|u|^{\lambda-1}u = 0 \quad \text{в} \quad Q, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{[0,+\infty)\times\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Здесь $0 \leq \lambda < q$, $a_0(x)$ — непрерывная неотрицательная функция, $u_0(x) \in L_{q+1}(\Omega)$.

Определение 1. *Согласно* [1], *энергетическим* (*слабым*) *решением задачи* (1)–(3) *называется функция*

$$u(t,x) \in L_{q+1,\,\mathrm{loc}}\big([0,+\infty); W^1_{q+1}(\Omega)\big)$$

такая, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(|u|^{q-1}u\big) \in L_{\frac{q+1}{q},\,\mathrm{loc}}\big([0,+\infty); \big(W^1_{q+1}(\Omega)\big)^*\big)$$

$\big($и, следовательно, в силу [2], $u(t,x) \in C\big([0,+\infty); L_{q+1}(\Omega)\big)\big)$, выполняется начальное условие $u(0,x) = u_0(x)$ и справедливо интегральное равенство

$$\int\limits_0^T \langle (|u|^{q-1}u)_t, \varphi\rangle dt + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^N |\nabla_x u|^{q-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0(x)|u|^{\lambda-1} u\varphi \right) dxdt = 0$$

для произвольной функции $\varphi(t,x) \in L_{q+1,\,\mathrm{loc}}([0,+\infty); W^1_{q+1}(\Omega))$ и произвольного $T < +\infty$.

В интегральном равенстве определения 1, как это принято, через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначена билинейная операция спаривания элементов пространства V и его сопряженного V^*.

Определение 2. *Если для произвольного решения $u(t,x)$ рассматриваемой задачи существует $T > 0$ такое, что $u(t,x) = 0$ почти всюду в Ω для любого $t \geq T$, то говорят, что решение задачи затухает за конечное время.*

Известно, что качественные свойства решений нелинейных параболических уравнений могут существенно отличаться от свойств линейных уравнений. Важным отличием является конечность скорости распространения носителей решений, появляющаяся при определенных условиях на структуру соответствующих уравнений (например, при подходящих соотношениях на параметры q, λ в (1)). С конечностью скорости распространения связаны многие другие специфические свойства: наличие конечной или бесконечной временной задержки начала распространения носителя решения, компактификация носителя решения, полное затухание решения за конечное время и т. д. В рамках этой работы изучается эффект затухания энергетического решения задачи (1)–(3) за конечное время.

Вопросы детальной характеризации эффекта затухания решения (оценки времени затухания, асимптотическое поведение решения вблизи времени затухания и т. п.) для различных классов полулинейных параболических уравнений типа диффузии-абсорбции изучались во многих работах (см., например, [3–8] и имеющиеся там ссылки). Так, для вырождающегося параболического уравнения (или уравнения фильтрации газа в пористой среде, или уравнения нелинейной диффузии с абсорбцией)

$$u_t - (a(u))_{xx} + c(u) = 0 \quad \text{в полуплоскости} \quad \mathbb{R}^2_+ = \left\{(t,x)\colon t > 0,\ x \in \mathbb{R}^1\right\}, \tag{4}$$

где функции $a(u) \geq 0$, $c(u) \geq 0$ определены и непрерывны для $u \geq 0$, с начальными данными

$$u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad u_0 \in C(\mathbb{R}^1),$$

А. С. Калашниковым [9] была доказана достаточность условия $P := \displaystyle\int_{0+} \frac{ds}{c(s)} < \infty$ для полного остывания (затухания решения) за конечное время. Хорошо изучена также первая краевая задача в ограниченной области с нулевыми граничными данными на латеральных границах для уравнения (4) с $c(u) \equiv 0$. Доказано, что сходимость интеграла $\displaystyle\int_{0+} \frac{ds}{a(s)}$ является необходимым и достаточным условием затухания решения (см. [10–12] в случае $a(u) = u^\mu$, $0 < \mu < 1$).

Для параболического уравнения высокого порядка с сильной абсорбцией Ф. Бернисом [13] доказан эффект компактификации носителя решения за конечное время (или коротко КНРВ).

Зависимость свойства мгновенной компактификации носителя решения для параболического уравнения высокого порядка от локальной структуры начальной функции изучена в работах

[14, 15]. Затухание решения для полулинейного параболического уравнения типа диффузии-абсорбции с невырождающимся потенциалом изучалось также в [16 – 19]. В. А. Кондратьев и Л. Верон [20] первыми начали изучение условий затухания за конечное время решения задачи Неймана для полулинейного параболического уравнения с вырождающимся абсорбционным потенциалом. Так, они установили в терминах спектральных характеристик, что общее достаточное условие, гарантирующее наличие КНРВ-свойства для уравнения

$$u_t - \Delta u + a_0(x)|u|^{\lambda-1}u = 0 \quad \text{в} \quad (0,+\infty)\times\Omega, \tag{5}$$

где $0 < \lambda < 1$, Ω — ограниченная область, в случае вырождающегося потенциала $a_0(x) \geq 0$ имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^{-1} \ln \mu_n < \infty$, где

$$\mu_n = \inf\left\{ \int\limits_\Omega (|\nabla\psi|^2 + 2^n a_0(x)\psi^2)\,dx \colon \psi \in W^{1,2}(\Omega), \quad \int\limits_\Omega \psi^2 dx = 1 \right\}, \qquad n \in N.$$

Используя метод [20], авторам работы [21] удалось найти точное достаточное условие затухания решения задачи Коши – Неймана для уравнения (5):

$$\ln a_0(x)^{-1} \in L_p(\Omega), \qquad p > \frac{N}{2}, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^N, \quad N \geq 1. \tag{6}$$

Кроме того, они показали, что если $a_0(x) \geq a_\alpha(|x|) := \exp\left(-\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$ $\forall x \in \Omega$, то условие (6) выполняется при произвольном $\alpha < 2$. В случае, когда $\alpha > 2$, эффект зануления решения не имеет места. В [22] с помощью двух различных методов: полуклассического для произвольного вырождающегося потенциала и локально энергетического для радиального потенциала $\left(a_0(x) \geq \exp\left(-\frac{\omega(|x|)}{|x|^2}\right),\right.$ где ω — положительная непрерывная радиальная функция$\Big)$ была изучена начально-краевая задача для уравнения (5) и получено достаточное условие типа Дини $\int_0^c \frac{\omega(s)}{s} ds < \infty$ для полного затухания решения.

Отметим, что до сих пор изучались свойства затухания решения для полулинейных уравнений с вырождающимся потенциалом. В настоящей работе рассматривается параболическое уравнение с двойной нелинейностью, которое содержит вырождающийся абсорбционный потенциал, устанавливается достаточное условие (условие типа Дини), гарантирующее полное затухание решения за конечное время. Метод исследования рассматриваемой задачи (1) – (3) основан на получении подходящих локальных интегральных априорных оценок решений и связан с комбинацией идей и построений работ [22 – 24].

2. Формулировка основного результата. Пусть $0 \in \Omega$, для произвольного абсорбционного потенциала рассматриваемого уравнения (1) существует радиальная миноранта

$$a_0(x) \geq d_0 \exp\left(-\frac{\omega(|x|)}{|x|^{q+1}}\right) := a(|x|) \quad \forall\, x \in \Omega, \qquad d_0 = \text{const} > 0, \tag{7}$$

где $\omega(\cdot)$ — определенная и непрерывная на $[0,+\infty)$ функция, которая является непрерывно дифференцируемой на $(0,+\infty)$ и неубывающей, а также удовлетворяет условиям

$$(A) \quad \omega(\tau) > 0 \quad \forall \tau > 0, \quad (B) \quad \omega(0) = 0, \quad (C) \quad \omega(\tau) \leq \omega_0 = \text{const} < \infty \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^1_+.$$

Теорема. *Пусть* $0 \le \lambda < q$ *в уравнении* (1), *начальные данные* $u_0(x) \in L_{q+1}(\Omega)$, *функция* $\omega(\cdot)$ *из* (7) *удовлетворяет предположениям* (A) – (C), *главному условию типа Дини*

$$\int\limits_{0+} \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau < \infty,$$

а также техническому условию

$$\overline{\lim_{\tau \to 0}} \frac{\tau\, \omega'(\tau)}{\omega(\tau)} < q + 1. \tag{8}$$

Тогда произвольное энергетическое решение $u(t, x)$ *задачи* (1) – (3) *затухает за конечное время.*

***Замечание* 1.** Отметим, что данная теорема является обобщением соответствующего утверждения для уравнения (5), полученного в работе [22], и совпадает с ним при $q = 1$.

***Замечание* 2.** Типичным примером функции ω, которая удовлетворяет условиям теоремы, является функция $\omega(\tau) = \mu\tau^{\kappa}$, $\tau > 0$, где μ и κ — произвольные постоянные такие, что выполняются неравенства $\mu > 0$, $0 < \kappa < q + 1$.

3. Доказательство теоремы. ***3.1. Вывод основного интегрального локально энергетического соотношения.*** Отметим, что непосредственным следствием (которое будет использовано в этом пункте) определения 1 слабого решения является тот факт, что $u_{x_i} \in L_{q+1,\,\mathrm{loc}}\big([0, +\infty) \times \overline{\Omega}\big)$.

Введем семейство подобластей, связанных с областью Ω,

$$\Omega(\tau) := \Omega \cap \left\{x \in \mathbb{R}^N \colon |x| > \tau\right\},$$

а также энергетические функции, связанные с рассматриваемым решением $u(t, x)$ исходной задачи (1) – (3):

$$H_s(\tau) := \int\limits_{\Omega(\tau)} |u(s, x)|^{q+1}\, dx,$$

$$E_s(\tau) := \int\limits_{\Omega(\tau)} \left(|\nabla_x u(s, x)|^{q+1} + a(|x|)|u(s, x)|^{\lambda+1}\right) dx \quad \text{для почти всех} \quad s, \tag{9}$$

$$I_s^b(\tau) := \int\limits_s^b \int\limits_{\Omega(\tau)} \left(|\nabla_x u(t, x)|^{q+1} + a(|x|)|u(t, x)|^{\lambda+1}\right) dx\, dt,$$

а также функцию

$$J_s^b(\tau) := \int\limits_s^b \int\limits_{\partial_0\Omega(\tau)} |\nabla_x u(t, x)|^{q+1} d\sigma\, dt \quad \text{для почти всех} \quad \tau,$$

где $a(\cdot)$ — определяемая в (7) миноранта, $\partial_0\Omega(\tau) = \partial\Omega(\tau) \cap \{x \in \mathbb{R}^N \colon |x| = \tau\}$.

Лемма 1. *Пусть функции* $H_s(\cdot)$, $E_s(\cdot)$, $I_s^b(\cdot)$, $J_s^b(\cdot)$ *в* (9) *определяются по рассматриваемому решению* $u(t, x)$ *задачи* (1) – (3) *и выполнено условие* (8). *Тогда для произвольного* $T > 0$ *при почти всех* $s \le T$ *и почти всех* $\tau \ge 0$ *справедливо следующее основное энергетическое соотношение*:

$$H_T(\tau)+I_s^T(\tau)\leqslant 3d_1\,\left(a(\tau)^{-1}E_s(\tau)\right)^{\frac{q+1}{\lambda+1}}+3d_2\,\left(a(\tau)^{-(1-\theta_2)}E_s(\tau)\right)^{\frac{q+1}{(q+1)-(q-\lambda)(1-\theta_2)}}+$$
$$+c_7\left(a(\tau)^{-\frac{(1-\theta_1)}{q}}J_s^T(\tau)\right)^{\frac{q(q+1)}{q(q+1)-(q-\lambda)(1-\theta_1)}}+c_8\left(a(\tau)^{-\frac{1}{q}}J_s^T(\tau)\right)^{\frac{q(q+1)}{q(q+1)-(q-\lambda)}}, \qquad (10)$$

где

$$0<\theta_1:=\frac{N(q-\lambda)+(\lambda+1)}{N(q-\lambda)+(\lambda+1)(q+1)}<1, \qquad 0<\theta_2:=\frac{N(q-\lambda)}{N(q-\lambda)+(\lambda+1)(q+1)}<1,$$

c_i, d_i *— конечные постоянные.*

Доказательство. В силу следового интерполяционного неравенства (см. [23]) имеем

$$\left(\int\limits_{\partial_0\Omega(\tau)}|u(t,x)|^{q+1}\,d\sigma\right)^{\frac{1}{q+1}}\leqslant c\left(\int\limits_{\Omega(\tau)}|\nabla_x u(t,x)|^{q+1}\,dx\right)^{\frac{\theta_1}{q+1}}\left(\int\limits_{\Omega(\tau)}|\,u(t,x)|^{\lambda+1}\,dx\right)^{\frac{1-\theta_1}{\lambda+1}}+$$
$$+c\left(\int\limits_{\Omega(\tau)}|\,u(t,x)|^{\lambda+1}\,dx\right)^{\frac{1}{\lambda+1}}, \qquad (11)$$

где θ_1 взято из леммы 1, $c=c(N,q,\lambda)=\mathrm{const}<\infty$. Теперь в силу неравенства Гельдера

$$\int\limits_{\partial_0\Omega(\tau)}|u(t,x)||\nabla_x u(t,x)|^q\,d\sigma\le\left(\int\limits_{\partial_0\Omega(\tau)}|\nabla_x u(t,x)|^{q+1}\,d\sigma\right)^{\frac{q}{q+1}}\left(\int\limits_{\partial_0\Omega(\tau)}|u(t,x)|^{q+1}\,d\sigma\right)^{\frac{1}{q+1}},$$

и после подстановки в (11), с учетом монотонности функции $a(\cdot)$ и того факта, что в ограниченной области для $1<\lambda+1<q+1$ имеет место непрерывное вложение $L_{q+1}(\Omega(\tau))\subset$ $\subset L_{\lambda+1}(\Omega(\tau))$, имеем

$$\int\limits_{\partial_0\Omega(\tau)}|u(t,x)|\,|\nabla_x u(t,x)|^q\,d\sigma\le c\left(\int\limits_{\partial_0\Omega(\tau)}|\nabla_x u(t,x)|^{q+1}\,d\sigma\right)^{\frac{q}{q+1}}\sup_{|x|>\tau}a(|x|)^{-\frac{1-\theta_1}{q+1}}\times$$
$$\times\left(\int\limits_{\Omega(\tau)}|u(t,x)|^{q+1}\,dx\right)^{\frac{(q-\lambda)(1-\theta_1)}{(q+1)^2}}\left\{\int\limits_{\Omega(\tau)}(|\nabla_x u(t,x)|^{q+1}+a(|x|)|u(t,x)|^{\lambda+1})\,dx\right\}^{\frac{1}{q+1}}+$$
$$+c\left(\int\limits_{\partial_0\Omega(\tau)}|\nabla_x u(t,x)|^{q+1}\,d\sigma\right)^{\frac{q}{q+1}}\sup_{|x|>\tau}a(|x|)^{-\frac{1}{q+1}}\left(\int\limits_{\Omega(\tau)}|u(t,x)|^{q+1}\,dx\right)^{\frac{q-\lambda}{(q+1)^2}}\times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{\Omega(\tau)} (|\nabla_x u(t,x)|^{q+1} + a(|x|)|u(t,x)|^{\lambda+1})\,dx \right\}^{\frac{1}{q+1}}. \tag{12}$$

Интегрируя (12) по t и используя неравенство Юнга с ε, а также определение энергетических функций (9), получаем

$$\int\limits_s^b \int\limits_{\partial_0\Omega(\tau)} |u(t,x)|\,|\nabla_x u(t,x)|^q\,d\sigma dt \le 2\,\varepsilon\, I_s^b(\tau) +$$

$$+\,c(\varepsilon_1)\,a(\tau)^{-\frac{1-\theta_1}{q}}\,J_s^b(\tau)\max_{s\le t\le b}\left(\int\limits_{\Omega(\tau)} |u(t,x)|^{q+1}\,dx\right)^{\frac{(q-\lambda)(1-\theta_1)}{q(q+1)}} +$$

$$+\,c(\varepsilon_2)\,a(\tau)^{-\frac{1}{q}}\,J_s^b(\tau)\max_{s\le t\le b}\left(\int\limits_{\Omega(\tau)} |u(t,x)|^{q+1}\,dx\right)^{\frac{q-\lambda}{q(q+1)}}. \tag{13}$$

Теперь фиксируем $s \le \bar v = \bar v(s,b) \le b$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{\nu}\max_{s\le t\le b}\int\limits_{\Omega(\tau)} |u(t,x)|^{q+1}\,dx \le \int\limits_{\Omega(\tau)} |u(\bar v,x)|^{q+1}\,dx = H_{\bar v}(\tau), \qquad \nu > 1. \tag{14}$$

Из (13) и (14) имеем

$$\int\limits_s^b \int\limits_{\partial_0\Omega(\tau)} |u(t,x)|\,|\nabla_x u(t,x)|^q\,d\sigma dt \le 2\,\varepsilon\, I_s^b(\tau) \;+\; c(\varepsilon_1)\,a(\tau)^{-\frac{1-\theta_1}{q}}\,J_s^b(\tau) H_{\bar v}(\tau)^{\frac{(q-\lambda)(1-\theta_1)}{q(q+1)}} +$$

$$+\,c(\varepsilon_2)\,a(\tau)^{-\frac{1}{q}}\,J_s^b(\tau) H_{\bar v}(\tau)^{\frac{q-\lambda}{q(q+1)}}. \tag{15}$$

Из оценки (A.2) при $a = s$, $b = \bar v$ и достаточно малом ε из (15) следует следующее соотношение для энергетических функций, введенных в (9):

$$H_{\bar v}(\tau) \;+\; I_s^{\bar v}(\tau) \leqslant H_s(\tau) \;+\; c_1\,a(\tau)^{-\frac{1-\theta_1}{q}}\,J_s^{\bar v}(\tau) H_{\bar v}(\tau)^{\frac{(q-\lambda)(1-\theta_1)}{q(q+1)}} +$$

$$+\,c_2\,a(\tau)^{-\frac{1}{q}}\,J_s^{\bar v}(\tau) H_{\bar v}(\tau)^{\frac{q-\lambda}{q(q+1)}}. \tag{16}$$

Из (16), используя неравенство Юнга с ε, получаем соотношение

$$H_{\bar v}(\tau) \;+\; I_s^{\bar v}(\tau) \leqslant H_s(\tau) \;+\; c_3\varepsilon_1\, H_{\bar v}(\tau) + c_6\,a(\tau)^{-\frac{(q+1)}{q(q+1)-(q-\lambda)}}\,J_s^{\bar v}(\tau)^{\frac{q(q+1)}{q(q+1)-(q-\lambda)}} +$$

$$+ c_4\,a(\tau)^{-\frac{(1-\theta_1)(q+1)}{q(q+1)-(q-\lambda)(1-\theta_1)}}\,J_s^{\bar v}(\tau)^{\frac{q(q+1)}{q(q+1)-(q-\lambda)(1-\theta_1)}} \;+\; c_5\varepsilon_2\, H_{\bar v}(\tau). \tag{17}$$

Фиксируя теперь в (13) $b = T$ и используя свойство (14), приходим к неравенству

$$\int\limits_s^T \int\limits_{\partial_0\Omega(\tau)} |u(t,x)|\,|\nabla_x u(t,x)|^q \, d\sigma dt \leq \, 2\,\varepsilon\, I_s^T(\tau) \; + \; c(\varepsilon_1)\, a(\tau)^{-\frac{1-\theta_1}{q}} \; J_s^T(\tau) H_{\bar{v}}(\tau)^{\frac{(q-\lambda)(1-\theta_1)}{q(q+1)}} +$$

$$+ \, c(\varepsilon_2)\, a(\tau)^{-\frac{1}{q}} \; J_s^T(\tau) H_{\bar{v}}(\tau)^{\frac{q-\lambda}{q(q+1)}}. \tag{18}$$

Из равенства (A.2) с учетом оценки (18) при $\varepsilon = \dfrac{1}{2q}$ вытекает соотношение

$$H_T(\tau) \, + \, I_s^T(\tau) \leqslant H_s(\tau) \, + \, c_3\, a(\tau)^{-\frac{1-\theta_1}{q}} \; J_s^T(\tau) H_{\bar{v}}(\tau)^{\frac{(q-\lambda)(1-\theta_1)}{q(q+1)}} +$$

$$+ \, c_4\, a(\tau)^{-\frac{1}{q}} \; J_s^T(\tau) H_{\bar{v}}(\tau)^{\frac{q-\lambda}{q(q+1)}}. \tag{19}$$

Благодаря (17) имеем

$$\frac{1}{2} H_{\bar{v}}(\tau)^{\mu} \leqslant H_s(\tau)^{\mu} \, + \, c_4^{\mu}\, a(\tau)^{-\frac{(1-\theta_1)(q+1)\mu}{q(q+1)-(q-\lambda)(1-\theta_1)}} \; J_s^{\bar{v}}(\tau)^{\frac{q(q+1)\mu}{q(q+1)-(q-\lambda)(1-\theta_1)}} +$$

$$+ \, c_6^{\mu}\, a(\tau)^{-\frac{(q+1)\mu}{q(q+1)-(q-\lambda)}} \; J_s^{\bar{v}}(\tau)^{\frac{q(q+1)\mu}{q(q+1)-(q-\lambda)}} \qquad \forall\, \mu > 0.$$

Используя последнее неравенство с $\mu_1 = \dfrac{(q-\lambda)(1-\theta_1)}{q(q+1)}$ и $\mu_2 = \dfrac{(q-\lambda)}{q(q+1)}$, из (19) с помощью неравенства Юнга после простых преобразований получаем соотношение

$$H_T(\tau) + I_s^T(\tau) \leqslant 3H_s(\tau) + \, c_7 \left(\frac{J_s^T(\tau)}{a(\tau)^{\frac{1-\theta_1}{q}}} \right)^{\frac{q(q+1)}{q(q+1)-(q-\lambda)(1-\theta_1)}} + \, c_8 \left(\frac{J_s^T(\tau)}{a(\tau)^{\frac{1}{q}}} \right)^{\frac{q(q+1)}{q(q+1)-(q-\lambda)}}. \tag{20}$$

Следующая наша цель — оценить функцию $H_s(\cdot)$ в правой части (20) некоторой функцией, связанной с основной энергетической функцией $I_s^T(\cdot)$. С помощью интерполяционного неравенства Гальярдо – Ниренберга (см. [25, 26]) получаем

$$\left(\int\limits_{\Omega(\tau)} |u(t,x)|^{q+1}\, dx \right)^{\frac{1}{q+1}} \leqslant d_1 \left(\int\limits_{\Omega(\tau)} |\nabla_x u(t,x)|^{q+1}\, dx \right)^{\frac{\theta_2}{q+1}} \left(\int\limits_{\Omega(\tau)} |\; u(t,x)|^{\lambda+1}\, dx \right)^{\frac{1-\theta_2}{\lambda+1}} +$$

$$+ d_1 \left(\int\limits_{\Omega(\tau)} |\; u(t,x)|^{\lambda+1}\, dx \right)^{\frac{1}{\lambda+1}},$$

где θ_2 взято из леммы 1, постоянная $d_1 > 0$ не зависит от τ при $\tau \to 0$. Благодаря монотонности $a(\cdot)$ из последнего неравенства выводим

$$\int\limits_{\Omega(\tau)} |u(t,x)|^{q+1}\,dx \leqslant d_1 \left(\int\limits_{\Omega(\tau)} (|\nabla_x u(t,x)|^{q+1} + a(|x|)|u(t,x)|^{\lambda+1})\,dx \right)^{\theta_2} \times$$

$$\times \sup_{|x|>\tau} a(|x|)^{-(1-\theta_2)} \left(\int\limits_{\Omega(\tau)} a(|x|)|u(t,x)|^{\lambda+1}\,dx \right)^{1-\theta_2} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\Omega(\tau)} |u(t,x)|^{\lambda+1} dx \right)^{\frac{(1-\theta_2)(q-\lambda)}{\lambda+1}} + d_1 \sup_{|x|>\tau} a(|x|)^{-\frac{q+1}{\lambda+1}} \left(\int\limits_{\Omega(\tau)} a(|x|)|u(t,x)|^{\lambda+1}\,dx \right)^{\frac{q+1}{\lambda+1}},$$

или с учетом определения энергетических функций (9)

$$H_s(\tau) \leq d_2\, a(\tau)^{-(1-\theta_2)}\, E_s(\tau) \left(\int\limits_{\Omega(\tau)} |u(t,x)|^{q+1}\,dx \right)^{\frac{(1-\theta_2)(q-\lambda)}{q+1}} + d_1 \Big(a(\tau)^{-1}\, E_s(\tau) \Big)^{\frac{q+1}{\lambda+1}}. \quad (21)$$

Оценивая теперь первое слагаемое в правой части (21) с помощью неравенства Юнга с ε, выводим соотношение

$$H_s(\tau) \leqslant d_1 \, \Big(a(\tau)^{-1} E_s(\tau) \Big)^{\frac{q+1}{\lambda+1}} + d_2 \, \Big(a(\tau)^{-(1-\theta_2)} E_s(\tau) \Big)^{\frac{q+1}{(q+1)-(q-\lambda)(1-\theta_2)}}. \quad (22)$$

Подставляя неравенство (22) в правую часть (20), получаем доказываемое соотношение (10).

Проведем теперь некоторую трансформацию полученного основного энергетического соотношения (10). С этой целью введем в рассмотрение параметрическую функцию $s(\tau)$ для $\tau \geq 0$:

$$s(\tau) = \frac{\tau^{q(q+2)+1}}{\omega(\tau)^q}, \qquad s(0) = 0, \quad (23)$$

и введем также основную „абсорбционную” энергетическую функцию для произвольного $\tau \in$ $\in [0, \hat{\tau})$:

$$P(\tau) := I^T_{s(\tau)}(\tau) := \int\limits_{s(\tau)}^{T} \int\limits_{\Omega(\tau)} \Big(|\nabla_x u(t,x)|^{q+1} + a(|x|)|u(t,x)|^{\lambda+1} \Big)\,dx\,dt, \quad (24)$$

где $T \geq \max_{\tau\in[0,\hat{\tau}]} s(\tau), \quad \hat{\tau} := \inf\{\tau > 0 \colon \Omega(\tau) = \varnothing\}$.

Отметим здесь, что введенная в (23) параметрическая функция $s(\tau)$ имеет следующие свойства:

$$0 \leq s(\tau) \leq T \qquad \forall \tau \in [0, \hat{\tau}], \qquad s'(\tau) > 0 \qquad \forall \tau > 0, \qquad s'(0) = 0.$$

Лемма 2. *Энергетическая функция* $P(\cdot)$ *из* (24) *удовлетворяет неравенствам*

$$P(\tau) \leqslant d \sum_{i=1}^{4} \left(-\frac{P'(\tau)}{\psi_i(\tau)} \right)^{1+\lambda_i} \quad \text{для } \tau \in (0, \hat{\tau}), \quad (25)$$

$$P(0) \leq \varphi_0 := \int\limits_{\Omega} |u_0(x)|^{q+1}\, dx, \tag{26}$$

где постоянные θ_i, $i = 1, 2$, *взяты из леммы* 1, $d = \mathrm{const} > 0$,

$$\psi_1(\tau) = a(\tau)^{\frac{1-\theta_1}{q}}, \qquad \psi_2(\tau) = a(\tau)^{1-\theta_2} s'(\tau), \qquad \psi_3(\tau) = a(\tau)s'(\tau), \qquad \psi_4(\tau) = a(\tau)^{\frac{1}{q}},$$

$$\lambda_1 := \frac{(1-\theta_1)(q-\lambda)}{q(q+1)-(1-\theta_1)(q-\lambda)}, \qquad \lambda_2 := \frac{(1-\theta_2)(q-\lambda)}{(q+1)-(1-\theta_2)(q-\lambda)},$$

$$\lambda_3 := \frac{q-\lambda}{\lambda+1}, \qquad \lambda_4 := \frac{q-\lambda}{q(q+1)-(q-\lambda)}.$$

Доказательство. Легко проверяем, что

$$0 \geq \frac{dP(\tau)}{d\tau} = -\int\limits_{s(\tau)}^{T} \int\limits_{\partial_0\Omega(\tau)} \left(\, |\nabla_x u(s(\tau),x)|^{q+1} \, + \, a(|x|)|u(s(\tau),x)|^{\lambda+1}\right) d\sigma\, dt -$$

$$-s'(\tau) \int\limits_{\Omega(\tau)} \left(\, |\nabla_x u(s(\tau),x)|^{q+1} \, + \, a(|x|)|u(s(\tau),x)|^{\lambda+1}\right) dx\, dt. \tag{27}$$

Поэтому, используя определение (9) и учитывая, что $s'(\tau) \geq 0$, из (27) выводим

$$E_{s(\tau)}(\tau) = \int\limits_{\Omega(\tau)} (|\nabla_x u(s(\tau),x)|^{q+1} + a(|x|)|u(s(\tau),x)|^{\lambda+1})\, dx \leq -\frac{1}{s'(\tau)}\frac{dP(\tau)}{d\tau}, \tag{28}$$

а также

$$J^T_{s(\tau)}(\tau) = \int\limits_{s(\tau)}^{T} \int\limits_{\partial_0\Omega(\tau)} |\nabla_x u(s(\tau),x)|^{q+1} d\sigma\, dt \leq -\frac{dP(\tau)}{d\tau} \ . \tag{29}$$

Подставляя неравенства (28), (29) в (10) и используя определение (24), получаем (25). Справедливость неравенства (26), очевидно, следует из глобальной априорной оценки (A.1).

3.2. Анализ задачи Коши для обыкновенного дифференциального неравенства. Далее будем изучать асимптотическое поведение произвольного решения системы (25), (26) аналогично тому, как это было сделано в работе [22]. Покажем, что существует непрерывная функция $\bar\tau = \bar\tau(\varphi_0)$ со значениями в промежутке $(0, \hat\tau)$, имеющая следующее свойство: $\bar\tau(\varphi_0) \to 0$ при $\varphi_0 \to 0$, для которой справедливо равенство

$$P(\tau) := I^T_{s(\tau)}(\tau) = 0 \qquad \forall\, \tau \geq \bar\tau(\varphi_0). \tag{30}$$

Для построения кривой $\tilde P(\tau)$, мажорирующей решение задачи (25), (26), рассмотрим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения для $i = 1, 2, 3, 4$:

$$P_i(\tau) = d\left(-\frac{P_i'(\tau)}{\psi_i(\tau)}\right)^{1+\lambda_i} \iff P_i'(\tau) = -\psi_i(\tau)\left(\frac{P_i(\tau)}{d}\right)^{\frac{1}{1+\lambda_i}} := -F_i(\tau, P_i(\tau)). \tag{31}$$

Определим подобласти Ω_i, $i = 1, 2, 3, 4$ $\big(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4 = \mathbb{R}^2_+ := \{\tau > 0,\ z > 0\}\big)$:

$$\Omega_1 = \left\{ (\tau, z) : z \leq d\, a(\tau)^{\frac{q+1}{q-\lambda}} s'(\tau)^{\frac{q(q+1)}{(q-\lambda)(q(1-\theta_2)-1+\theta_1)}} \right\}, \quad s'(\tau) = \frac{ds(\tau)}{d\tau},$$

$$\Omega_2 = \left\{ (\tau, z) : d\, a(\tau)^{\frac{q+1}{q-\lambda}} s'(\tau)^{\frac{q(q+1)}{(q-\lambda)(q(1-\theta_2)-1+\theta_1)}} \leq z \leq d\, a(\tau)^{\frac{q+1}{q-\lambda}} \right\},$$

$$\Omega_3 = \Omega_4 = \left\{ (\tau, z) : z \geq d\, a(\tau)^{\frac{q+1}{q-\lambda}} \right\} \quad \text{для произвольного} \quad q\colon q > \lambda \geq 0.$$

Кроме того, кривая $\tilde{P}(\tau)$, мажорирующая решение (25), (26), имеет следующий вид:

$$\tilde{P}(\tau) = \begin{cases} \varphi_0, & \text{если } \ 0 \leq \tau \leq \tau', \\ \tilde{P}_2(\tau), & \text{если } \ \tau' \leq \tau \leq \tau'', \\ \tilde{P}_1(\tau), & \text{если } \ \tau'' \leq \tau \leq \tau''', \end{cases}$$

где τ' определяется из равенства $\varphi_0 = d\, a(\tau')^{\frac{q+1}{q-\lambda}}$, т. е.

$$\frac{\tau'^{q+1}}{\omega(\tau')} = \frac{q+1}{q-\lambda} (\ln d - \ln \varphi_0)^{-1}.$$

$\tilde{P}_2(\tau)$ — решение задачи Коши

$$P_2'(\tau) = -\psi_2(\tau) \left(\frac{P_2(\tau)}{d} \right)^{\frac{1}{1+\lambda_2}}, \qquad P_2(\tau') = \varphi_0, \tag{32}$$

τ'' определяется из соотношения

$$\tilde{P}_2(\tau'') = d\, a(\tau'')^{\frac{q+1}{q-\lambda}} s'(\tau'')^{\frac{q(q+1)}{(q-\lambda)(q(1-\theta_2)-1+\theta_1)}}. \tag{33}$$

Наконец, $\tilde{P}_1(\tau)$ — решение задачи Коши

$$P_1'(\tau) = -\psi_1(\tau) \left(\frac{P_1(\tau)}{d} \right)^{\frac{1}{1+\lambda_1}}, \qquad P_1(\tau'') = \tilde{P}_2(\tau''), \tag{34}$$

где τ''' находим из условия $\tilde{P}_1(\tau) \geq 0 \; \forall \, \tau \geq \tau'''$. Решение задачи (32) имеет вид

$$\tilde{P}_2(\tau) = \left[\varphi_0^{\frac{\lambda_2}{1+\lambda_2}} - \frac{\lambda_2}{(1+\lambda_2) d^{\,\frac{1}{1+\lambda_2}}} \int\limits_{\tau'}^{\tau} \psi_2(r)\, dr \right]^{\frac{1+\lambda_2}{\lambda_2}} =$$

$$= \left[\varphi_0^{\frac{(1-\theta_2)(q-\lambda)}{q+1}} - \frac{(1-\theta_2)(q-\lambda)}{(q+1) d^{\,\frac{1}{1+\lambda_2}}} \int\limits_{\tau'}^{\tau} a(r)^{1-\theta_2} s'(r)\, dr \right]^{\frac{q+1}{(1-\theta_2)(q-\lambda)}}.$$

Поскольку $\dfrac{q(1-\theta_2)}{q(1-\theta_2)-1+\theta_1} = \dfrac{q+1}{q}$, уравнение (33) для нахождения τ'' приводит к равенству

$$\varphi_0^{\frac{(1-\theta_2)(q-\lambda)}{q+1}} - \frac{(1-\theta_2)(q-\lambda)}{(q+1)d^{\frac{1}{1+\lambda_2}}} \int\limits_{\tau'}^{\tau''} a(r)^{1-\theta_2} s'(r)\, dr = d^{\frac{(1-\theta_2)(q-\lambda)}{q+1}} a(\tau'')^{1-\theta_2} s'(\tau'')^{\frac{q+1}{q}}. \qquad (35)$$

Понятно, что $c(\tau) \approx f(\tau)$, если существует постоянная K такая, что выполняется двустороннее неравенство $0 < K^{-1}c(\tau) \le f(\tau) \le Kc(\tau) \quad \forall \tau : 0 < \tau < \tau_0$. Благодаря условию (8), которое эквивалентно неравенству

$$\frac{\tau\, \omega'(\tau)}{\omega(\tau)} \le 1 + q - \delta \qquad \forall\, \tau \in (0, \hat{\tau}), \qquad 0 < \delta < q, \qquad (36)$$

и в силу определения (23) функции $s(\cdot)$ приходим к двусторонней оценке

$$q(1+q-\delta)\frac{\tau^{q(q+2)}}{\omega(\tau)^q} \le s'(\tau) \le (1+q)^2 \frac{\tau^{q(q+2)}}{\omega(\tau)^q} \qquad \forall\, \tau < \hat{\tau}. \qquad (37)$$

С учетом (37) и леммы А.3 имеем

$$\int\limits_0^{\tau} a(r)^{1-\theta_2} s'(r)\, dr \approx a(\tau)^{1-\theta_2} (s'(\tau))^{\frac{q+1}{q}} \qquad \text{при} \qquad \tau \to 0. \qquad (38)$$

Из (35) и (38) получаем двустороннюю оценку для τ'':

$$c_1 \varphi_0^{\frac{(1-\theta_2)(q-\lambda)}{q+1}} \le a(\tau'')^{1-\theta_2} s'(\tau'')^{\frac{q+1}{q}} \le c_2 \varphi_0^{\frac{(1-\theta_2)(q-\lambda)}{q+1}},$$

где положительные постоянные $c_1,\ c_2$ не зависят от φ_0. Решение задачи Коши (34) имеет вид

$$\tilde{P}_1(\tau) = \left[\tilde{P}_2(\tau'')^{\frac{(1-\theta_1)(q-\lambda)}{q(q+1)}} - \frac{(1-\theta_1)(q-\lambda)}{q(q+1)(d)^{\frac{1}{1+\lambda_1}}} \int\limits_{\tau''}^{\tau} a(r)^{\frac{1-\theta_1}{q}}\, dr \right]^{\frac{2}{(1-\theta_1)(1-q)}}.$$

Найдем теперь τ''' из неравенства

$$\tilde{P}_2(\tau'')^{\frac{(1-\theta_1)(q-\lambda)}{q(q+1)}} - \frac{(1-\theta_1)(q-\lambda)}{q(q+1)(d)^{\frac{1}{1+\lambda_1}}} \int\limits_{\tau''}^{\tau'''} a(r)^{\frac{1-\theta_1}{q}}\, dr \ge 0. \qquad (39)$$

Согласно лемме А.3 имеем

$$\left(\int\limits_0^{\tau} a(r)^{\frac{1-\theta_1}{q}}\, dr \right)^{q+1} \approx s'(\tau)^{\frac{q+1}{q}} a(\tau)^{1-\theta_2} \qquad \text{при} \quad \tau \to 0, \qquad (40)$$

где $\dfrac{1-\theta_1}{q} = \beta = \dfrac{\lambda+1}{N(q-\lambda)+(\lambda+1)(q+1)} = \dfrac{1-\theta_2}{q+1}$. Наконец, благодаря (39) и (40) приходим к достаточному условию для нахождения τ''':

$$a(\tau''')^{1-\theta_2} s'(\tau''')^{\frac{q+1}{q}} \le c_4 \varphi_0^{\frac{(1-\theta_2)(q-\lambda)}{q+1}}, \quad \tau''' > 2\tau''. \tag{41}$$

Условие (41) можно записать в виде

$$\frac{\exp\Big(-\frac{(1-\theta_2)(1-\nu)\omega(\tau''')}{(\tau''')^{q+1}}\Big)\, \exp\Big(-\frac{(1-\theta_2)\,\nu\,\omega(\tau''')}{(\tau''')^{q+1}}\Big)\omega(\tau''')}{\big(\frac{\omega(\tau''')}{(\tau''')^{q+1}}\big)^{q+2}} \le c_5 \varphi_0^{\frac{(1-\theta_2)(q-\lambda)}{q+1}} \tag{42}$$

с произвольным $0 < \nu < 1$. Для выполнения неравенства (42) достаточно, чтобы

$$\exp\Big(-\frac{(1-\theta_2)(1-\nu)\omega(\tau''')}{(\tau''')^{q+1}}\Big) \le c_6 \varphi_0^{\frac{(1-\theta_2)(q-\lambda)}{q+1}}, \qquad c_6 = c_6(\nu, \omega_0, c_5),$$

или

$$\frac{(\tau''')^{q+1}}{\omega(\tau''')} \le c_7 (\ln \varphi_0^{-1})^{-1}, \quad c_7 = c_7(c_6, \nu, \omega_0), \qquad \omega_0 \quad \text{взято из условия} \quad (C).$$

Итак, равенство (30) доказано с $\bar\tau(\cdot)$:

$$\frac{\bar\tau(z)^{q+1}}{\omega(\bar\tau(z))} = c_7 (\ln z^{-1})^{-1} \qquad \forall\, z \in (0,1). \tag{43}$$

3.3. Вывод рекуррентного соотношения. Согласно лемме А.5 можем считать, что

$$\varphi_0 := \int\limits_\Omega |u_0(x)|^{q+1}\, dx \ll 1 \quad \text{и} \quad \bar\tau(\varphi_0) < 1.$$

Из равенства (30) с учетом определения (24) делаем вывод, что

$$I^T_{s(\bar\tau(\varphi_0))}(\bar\tau(\varphi_0)) = 0 \quad \text{для произвольного} \quad T < \infty.$$

Кроме того, энергетическое решение $u(t,x)$ имеет свойство

$$u(t,x) \equiv 0 \qquad \forall\, (t,x) \in \big\{|x| \ge \tau_1,\ t \ge s(\tau_1)\big\}, \quad \tau_1 = \bar\tau(\varphi_0).$$

Из тождества (А.2) выводим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega |u(t,x)|^{q+1}\, dx + \int\limits_\Omega (|\nabla_x u(t,x)|^{q+1} + a_0(x)|u(t,x)|^{\lambda+1})\, dx \le 0 \qquad \forall\, t > s(\tau_1),$$

откуда легко получаем оценку

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega |u(t,x)|^{q+1}\, dx + \int\limits_\Omega (|\nabla_x u(t,x)|^{q+1}\, dx \le 0 \qquad \forall\, t > s(\tau_1). \tag{44}$$

Согласно неравенству Пуанкаре из (44) следует соотношение

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega |u(t,x)|^{q+1}\, dx + \frac{\bar c}{\tau_1^{q+1}}\int\limits_\Omega |u(t,x)|^{q+1}\, dx \le 0 \qquad \forall\, t > s(\tau_1),$$

где постоянная $\bar{c} > 0$ не зависит от t. Отсюда с учетом того, что $H(t) := H_t(0)$ (определение энергетической функции $H_t(\tau)$ см. в (9)), имеем

$$H'(t) + \frac{\bar{c}}{\tau_1^{q+1}} H(t) \le 0 \quad \forall\, t > s(\tau_1). \tag{45}$$

Интегрируем обыкновенное дифференциальное неравенство (45):

$$H(t + s(\tau_1)) \le H(s(\tau_1)) \exp\Big(-\frac{\bar{c}t}{\tau_1^{q+1}}\Big) \quad \forall\, t > 0. \tag{46}$$

Из глобальной априорной оценки (A.1) с $\hat{t} = s(\tau_1) = s(\bar{\tau}(\varphi_0))$ заключаем, что неравенство (46) будет иметь вид

$$H(t + s(\tau_1)) \le \varphi_0 \exp\Big(-\frac{\bar{c}t}{\tau_1^{q+1}}\Big) \qquad \forall\, t > 0.$$

Определим теперь $t_1 > 0$ из равенства

$$\varphi_0 \exp\Big(-\frac{\bar{c}t_1}{\tau_1^{q+1}}\Big) = \varphi_0^{1+\gamma} \quad \iff \quad t_1 = \frac{\gamma \ln \varphi_0^{-1}}{\bar{c}} \tau_1^{q+1}, \quad \gamma = \mathrm{const} > 0. \tag{47}$$

Из (47) и (43) с $z = \varphi_0$, $\tau_1 = \bar{\tau}(\varphi_0)$ имеем

$$t_1 = \frac{\gamma c_7}{\bar{c}} \omega(\tau_1). \tag{48}$$

Вернемся теперь к (46) с t_1:

$$H(t_1 + s(\tau_1)) = \int\limits_\Omega |u(t_1 + s(\tau_1), x)|^{q+1}\, dx \le \varphi_0^{1+\gamma}, \qquad \gamma > 0, \tag{49}$$

и рассмотрим задачу (1)–(3) с начальными условиями (49) вместо (A.1) в области $\Omega \times$ $\times (t_1 + s(\tau_1), \infty)$. Повторяя предыдущие выкладки, приходим к неравенству

$$H(t_2 + s(\tau_2) + t_1 + s(\tau_1)) \le \varphi_0^{(1+\gamma)^2},$$

где

$$\tau_2^{q+1} = c_7 \omega(\tau_2) \big(\ln \varphi_0^{-(1+\gamma)}\big)^{-1} = \frac{c_7}{1+\gamma} \omega(\tau_2) \big(\ln \varphi_0^{-1}\big)^{-1}, \quad \tau_2 = \bar{\tau}(\varphi_0^{1+\gamma}).$$

Аналогично (48) получаем

$$t_2 = \frac{\gamma \ln \varphi_0^{-(1+\gamma)}}{\bar{c}} \tau_2^{q+1} = \frac{\gamma c_7}{\bar{c}} \omega(\tau_2).$$

Далее повторяя процедуру, находим $\tau_3,\ t_3, \tau_4,\ t_4$ и т. д. В результате j-го вычисления получаем рекуррентное соотношение

$$H\left(\sum_{i=1}^{j} t_i + \sum_{i=1}^{j} s(\tau_i)\right) \le \varphi_0^{(1+\gamma)^j} \to 0 \qquad \text{при} \qquad j \to \infty, \tag{50}$$

где

$$t_i = \frac{\gamma c_7}{\bar{c}} \omega(\tau_i), \qquad \tau_i^{q+1} = \frac{c_7 \omega(\tau_i)}{(1+\gamma)^{i-1}} \big(\ln \varphi_0^{-1}\big)^{-1}. \tag{51}$$

3.4. Доказательство сходимости рядов в рекуррентном соотношении. В этом пункте, завершающем доказательство теоремы, будет показано, что ряды, фигурирующие в рекуррентном соотношении (50), сходятся.

Рассмотрим сначала $\sum_{i=1}^{j} s(\tau_i)$, где τ_i взяты из (51). С учетом условия (С) на функцию $\omega(\cdot)$ в силу (51) следует, что

$$\tau_i^{q+1} \leq \frac{c_7 \omega_0 \big(\ln \varphi_0^{-1}\big)^{-1}}{(1+\gamma)^{i-1}}. \tag{52}$$

Согласно определению функции $s(\tau)$ (см. (23)) и неравенству (52) имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} s(\tau_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tau_0^{q(q+1)} \tau_i^{q+1}}{\omega(\tau_0)^q} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tau_0^{q(q+1)} c_7 \omega_0 \big(\ln \varphi_0^{-1}\big)^{-1}}{\omega(\tau_0)^q} \frac{1}{(1+\gamma)^{i-1}} =$$
$$= c_8 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\gamma)^{i-1}} < \tilde{c} < \infty \qquad \forall\, \tau_0 > 0 \qquad \forall\, \gamma > 0. \tag{53}$$

Теперь перейдем к ряду $\sum_{i=1}^{j} t_i = \dfrac{\gamma c_7}{\bar{c}} \omega(\tau_i)$. Из (51), а также условий (A)–(C) на функцию $\omega(\cdot)$ получаем неравенство

$$\tau_i^{q+1} = \frac{c_7 \omega(\tau_i)}{(1+\gamma)^{i-1}} \big(\ln \varphi_0^{-1}\big)^{-1} \leq \frac{c_7 \omega_0}{(1+\gamma)^{i-1} \ln \varphi_0^{-1}} \quad \Longrightarrow \quad \tau_i \leq \left(\frac{c_7 \omega_0}{\ln \varphi_0^{-1}}\right)^{\frac{1}{q+1}} \frac{(1+\gamma)^{\frac{1}{q+1}}}{(1+\gamma)^{\frac{i}{q+1}}}.$$

Таким образом, имеем

$$\sum_{i=1}^{j} t_i = \frac{\gamma c_7}{\bar{c}} \sum_{i=1}^{j} \omega(\tau_i) \leq c_9 \sum_{i=1}^{j} \omega(c_{10} \mu^i), \tag{54}$$

где $c_9 = \dfrac{\gamma c_7}{\bar{c}},\ c_{10} = \left(\dfrac{c_7 \omega_0 (1+\gamma)}{\ln \varphi_0^{-1}}\right)^{\frac{1}{q+1}},\ \mu = (1+\gamma)^{-\frac{1}{q+1}} < 1.$

В силу того, что $\omega(\cdot)$ — непрерывная и неубывающая функция, а $c_{10}\mu^x$ с $\mu < 1$ — убывающая, их суперпозиция $\omega(c_{10}\mu^x) = f(x)$ является убывающей функцией. Следовательно, выполняется двустороннее неравенство

$$(b-a) f(b) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq (b-a) f(a), \qquad a < b.$$

При $a = i-1 < b = i$ имеем

$$f(i) \leq \int_{i-1}^{i} f(x)\, dx \leq f(i-1), \qquad i = 1, \ldots, j\,,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{j} f(i) \leq \int_0^j f(x)\, dx \leq \sum_{i=1}^{j-1} f(i) \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}. \tag{55}$$

Далее, с помощью очевидной замены в подынтегральном выражении приходим к равенству

$$\int_0^j f(x)\,dx = \int_0^j \omega(c_{10}\mu^x)\,dx = \int_{c_{10}}^{c_{10}\mu^j} \frac{\omega(s)}{s\ln\mu}\,ds = -(\ln\mu)^{-1} \int_{c_{10}\mu^j}^{c_{10}} \frac{\omega(s)}{s}\,ds \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}. \tag{56}$$

Теперь из (54), (55) и (56) для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sum_{i=1}^{j} t_i = c_9 \sum_{i=1}^{j} \omega(c_{10}\mu^i) \le \int_0^j f(x)\,dx =$$

$$= -(\ln\mu)^{-1} \int_{c_{10}\mu^j}^{c_{10}} \frac{\omega(s)}{s}\,ds \quad \longrightarrow \quad -(\ln\mu)^{-1} \int_0^{c_{10}} \frac{\omega(s)}{s}\,ds < c < \infty \quad \text{при} \quad j \longrightarrow \infty. \tag{57}$$

Вернемся теперь к (50):

$$H(R) \le 0, \quad \text{где} \quad R = \sum_{i=1}^{\infty} t_i + \sum_{i=1}^{\infty} s(\tau_i) < \infty \qquad \text{(см. (53) и (57))},$$

откуда в силу того, что H — неотрицательная функция, делаем вывод, что

$$H(R) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_\Omega |u(R,x)|^{q+1}\,dx = 0.$$

Теорема доказана.

4. Приложение: вспомогательные построения и утверждения.

Лемма А.1. *Пусть* $u(t,x)$ *— произвольное энергетическое решение задачи* (1)–(3). *Тогда для произвольных* $\hat{t} > 0$ *справедлива следующая интегральная априорная оценка*:

$$\int_\Omega |u(\hat{t},x)|^{q+1}\,dx + \int_{(0,\hat{t})\times\Omega} \left(|\nabla_x u(t,x)|^{q+1} + a(|x|)|u(t,x)|^{\lambda+1}\right) dxdt \le \int_\Omega |u_0(x)|^{q+1}\,dx := \varphi_0. \tag{A.1}$$

Доказательство леммы А.1 стандартно в силу формулы интегрирования по частям [1] и предположения (7).

Лемма А.2. *Пусть* $u(t,x)$ *— произвольное энергетическое решение задачи* (1)–(3). *Тогда для всех* $0 \le a < b < +\infty$ *и почти всех* τ *имеет место соотношение*

$$\int_{\Omega(\tau)} |u(b,x)|^{q+1}\,dx + \frac{q+1}{q} \int_a^b \int_{\Omega(\tau)} \Big(|\nabla_x u(t,x)|^{q+1} + a_0(x)|u(t,x)|^{\lambda+1}\Big)\,dx\,dt =$$

$$= \int_{\Omega(\tau)} |u(a,x)|^{q+1}\,dx + \int_a^b \int_{\partial_0\Omega(\tau)} |\nabla_x u|^{q-1} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\sigma\,dt, \tag{A.2}$$

где $\partial_0\Omega(\tau) = \partial\Omega(\tau) \cap \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = \tau\}$, $\overrightarrow{\nu} = \overrightarrow{\nu}(x) = \{\nu_i\}$ *— единичный вектор внешней нормали к* $\partial_0\Omega(\tau)$ *в точке* x.

Доказательство. Зафиксируем числа τ, $\delta > 0$ и введем липшицеву срезающую функцию $\eta_{\tau,\delta}(\cdot)$:

$$\eta_{\tau,\delta}(r) = 0 \quad \forall\, r < \tau, \qquad \eta_{\tau,\delta}(r) = 1 \quad \forall\, r > \tau + \delta,$$
$$\eta_{\tau,\delta}(r) = \delta^{-1}(r - \tau) \quad \forall\, r\colon \tau < r < \tau + \delta.$$

Подставим в интегральное тождество пробную функцию

$$\xi(t,x) = \begin{cases} u(t,x)\eta_{\tau,\delta}(|x|), & a \le t \le b, \\ 0, & t \subset \{t < a\} \cup \{t > b\}. \end{cases}$$

Используя формулу интегрирования по частям из [1], приходим к равенству

$$\frac{q}{q+1} \int\limits_{\Omega(\tau)} |u(b,x)|^{q+1} \eta_{\tau,\delta}(|x|)\, dx +$$

$$+ \int\limits_a^b \int\limits_{\Omega(\tau)} \Big(|\nabla_x u(t,x)|^{q+1} + a_0(x)|u(t,x)|^{\lambda+1} \Big) \eta_{\tau,\delta}(|x|)\, dx\, dt =$$

$$= \frac{q}{q+1} \int\limits_{\Omega(\tau)} |u(a,x)|^{q+1} \eta_{\tau,\delta}(|x|)\, dx + \int\limits_a^b \int\limits_{\Omega(\tau)\setminus\Omega(\tau+\delta)} \sum_{i=1}^N |\nabla_x u|^{q-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} (\eta_{\tau,\delta}(|x|))_{x_i}\, dx\, dt.$$

Переходя теперь в последнем равенстве к пределу при $\delta \to 0$ (как это было сделано в работе [23]), устанавливаем, что при почти всех τ существует $\int_a^b \int_{\partial_0\Omega(\tau)} \sum_{i=1}^N |\nabla_x u|^{q-1} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i\, d\sigma\, dt$ и справедливо соотношение (A.2).

Лемма A.3. *Пусть неотрицательная неубывающая функция $\omega(s)$ удовлетворяет условиям* (A), (B), (C) *и* (8). *Тогда для любых $m \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$, $A > 0$, $q > 0$ справедливо*

$$\int\limits_0^\tau s^{m-q-1} \omega(s)^{l+1} \exp\Big(-\frac{A\omega(s)}{s^{q+1}} \Big) ds \approx \tau^{m+1} \omega(\tau)^l \exp\Big(-\frac{A\omega(\tau)}{\tau^{q+1}} \Big) \quad \textit{при} \quad \tau \to 0. \tag{A.3}$$

Доказательство. Легко проверить, что

$$\frac{d}{ds}\Big(s^{m+1}\omega(s)^l \exp\Big(-\frac{A\omega(s)}{s^{q+1}} \Big) \Big) = s^m \omega(s)^l \exp\Big(-\frac{A\omega(s)}{s^{q+1}} \Big) \Big[(m+1) + l\frac{s\omega'(s)}{\omega(s)} +$$
$$+ \frac{A\omega(s)}{s^{q+1}} \Big(q + 1 - \frac{s\omega'(s)}{\omega(s)} \Big) \Big] \equiv s^m \omega(s)^l \exp\Big(-\frac{A\omega(s)}{s^{q+1}} \Big) [I_1 + I_2 + I_3]. \tag{A.4}$$

Очевидно, что условие (8) эквивалентно условию $\dfrac{\tau\,\omega'(\tau)}{\omega(\tau)} \le 1 + q - \delta \quad \forall\, \tau \in (0, \tau_0)$, $0 < \delta < q$. Интегрируя последнее неравенство, приходим к $\omega(s) \ge \hat{c} s^{1+q-\delta}$ для достаточно малых положительных s, $\hat{c} = \mathrm{const} > 0$ и, следовательно, $\dfrac{\omega(s)}{s^{q+1}} \to \infty$ при $s \to 0$. С учетом этого факта делаем вывод, что

$$I_3 \gg |I_1|, \qquad I_3 \gg |I_2| \qquad \text{при} \qquad s \to 0.$$

Интегрируя (A.4), получаем (A.3).

Лемма A.4. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$, с C^1-границей, Ω_0 — подобласть Ω. Тогда для любого $v \in W^1_{q+1}(\Omega)$ выполняется интерполяционное неравенство*

$$\left(\int\limits_\Omega v^{q+1}\,dx\right)^{\frac{1}{q+1}} \le c_1 \left(\int\limits_\Omega |\nabla_x v|^{q+1}\,dx\right)^{\frac{1}{q+1}} + c_2 \left(\int\limits_{\Omega_0} |v|^{r+1}\,dx\right)^{\frac{1}{r+1}}, \tag{A.5}$$

где $1 < r+1 \le q+1$, положительные постоянные c_1, c_2 не зависят от v.

Доказательство. Согласно стандартному интерполяционному неравенству

$$\left(\int\limits_\Omega v^{q+1}\,dx\right)^{\frac{1}{q+1}} \le c_1 \left(\int\limits_\Omega |\nabla_x v|^{q+1}\,dx\right)^{\frac{1}{q+1}} + c_2 \left(\int\limits_{\Omega} |v|^{r+1}\,dx\right)^{\frac{1}{r+1}} \qquad \forall\, v \in W^1_{q+1}(\Omega). \tag{A.6}$$

Благодаря свойству аддитивности интеграла имеем

$$\left(\int\limits_\Omega |v|^{r+1}\,dx\right)^{\frac{1}{r+1}} \le \left(\int\limits_{\Omega_0} |v|^{r+1}\,dx\right)^{\frac{1}{r+1}} + \left(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_0} |v|^{r+1}\,dx\right)^{\frac{1}{r+1}}. \tag{A.7}$$

Неравенство (A.6) с учетом (A.7) принимает вид

$$\left(\int\limits_\Omega v^{q+1}dx\right)^{\frac{1}{q+1}} \le c_1\left(\int\limits_\Omega |\nabla_x v|^{q+1}dx\right)^{\frac{1}{q+1}} + c_2\left\{\left(\int\limits_{\Omega_0} |v|^{r+1}dx\right)^{\frac{1}{r+1}} + \left(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_0} |v|^{r+1}dx\right)^{\frac{1}{r+1}}\right\}. \tag{A.8}$$

Пусть Ω_0' — подобласть Ω_0 такая, что $\overline{\Omega'}_0 \subset \Omega_0$, функция $\xi(x) \in C^1$:

$$\xi(x) = \begin{cases} 0 & \forall\, x \in \overline{\Omega'}_0, \\ 1 & \forall\, x \in \Omega \setminus \Omega_0. \end{cases}$$

К последнему слагаемому в правой части (A.8) применим неравенство Пуанкаре:

$$\left(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_0} |v|^{r+1}\,dx\right)^{\frac{1}{r+1}} \le \left(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_0} |v\xi|^{r+1}\,dx\right)^{\frac{1}{r+1}} \le c \left(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_0'} |\nabla_x (v\xi)|^{r+1}\,dx\right)^{\frac{1}{r+1}} \le$$

$$\le c \left(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_0'} |\nabla v|^{q+1}\,dx\right)^{\frac{1}{q+1}} + \tilde{c} \left(\int\limits_{\Omega_0\setminus\Omega_0'} |v|^{r+1}\,dx\right)^{\frac{1}{r+1}}. \tag{A.9}$$

С учетом (A.9) и того, что $\Omega \setminus \Omega_0' \subseteq \Omega$, $\Omega_0 \setminus \Omega_0' \subseteq \Omega_0$, получаем (A.5).

Лемма A.5. *Пусть $u(t,x)$ — произвольное решение задачи* (1)–(3), *тогда*

$$H(t) = \int\limits_\Omega |u(t,x)|^{q+1}\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Доказательство. Из (44) и того факта, что $\Omega_0 \subset \Omega$, следует неравенство

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}|u(t,x)|^{q+1}\,dx+\int\limits_{\Omega}|\nabla_x u(t,x)|^{q+1}\,dx+d_0\int\limits_{\Omega_0}|u(t,x)|^{\lambda+1}\,dx\le 0, \tag{A.10}$$

где $d_0 = \mathrm{const} > 0$: $a(x) \ge d_0 > 0$ для всех $x \in \overline{\Omega}_0$. Согласно лемме A.4 при $r = \lambda$ имеем

$$\varepsilon\int\limits_{\Omega}|u(t,x)|^{q+1}\,dx\le\varepsilon c_1\int\limits_{\Omega}|\nabla_x u(t,x)|^{q+1}\,dx+\varepsilon c_2\left(\int\limits_{\Omega_0}|u(t,x)|^{\lambda+1}\,dx\right)^{\frac{1+q}{\lambda+1}}\qquad\forall\,\varepsilon>0. \tag{A.11}$$

Складывая (A.10) и (A.11), получаем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}|u(t,x)|^{q+1}\,dx+\varepsilon\int\limits_{\Omega}|u(t,x)|^{q+1}\,dx+(1-\varepsilon c_1)\int\limits_{\Omega}|\nabla_x u(t,x)|^{q+1}\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega_0}|u(t,x)|^{q+1}\,dx\left\{d_0-c_2\varepsilon\left(\int\limits_{\Omega_0}|u(t,x)|^{\lambda+1}\,dx\right)^{\frac{q-\lambda}{\lambda+1}}\right\}\le 0. \tag{A.12}$$

Покажем теперь, что

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}|u(t,x)|^{q+1}\,dx+\varepsilon\int\limits_{\Omega}|u(t,x)|^{q+1}\,dx\le 0\qquad\forall\,t>0. \tag{A.13}$$

С этой целью рассмотрим слагаемое в (A.12):

$$\int\limits_{\Omega_0}|u(t,x)|^{\lambda+1}\,dx\left\{d_0-c_2\varepsilon\left(\int\limits_{\Omega_0}|u(t,x)|^{\lambda+1}\,dx\right)^{\frac{q-\lambda}{\lambda+1}}\right\}\ge\int\limits_{\Omega}|u(t,x)|^{\lambda+1}\,dx(d_0-c_2\varepsilon\tilde{c})\ge 0,$$

если

$$d_0\ge c_2\varepsilon\tilde{c}\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{d_0}{c_2\tilde{c}}\ge\varepsilon. \tag{A.14}$$

Аналогично за счет выбора ε, а именно,

$$\varepsilon\le\frac{d_0}{c_2\tilde{c}^{\frac{1-q}{1+q}}}, \tag{A.15}$$

можно обеспечить

$$(1-\varepsilon c_1)\int\limits_{\Omega}|\nabla_x u(t,x)|^{q+1}\,dx\ge 0.$$

Итак, в силу (A.14) и (A.15) следует справедливость (A.13), что соответствует неравенству

$$\frac{dH(t)}{dt}\le-\varepsilon H(t),\quad\text{где}\quad H(t)=\int\limits_{\Omega}|u(t,x)|^{q+1}\,dx\qquad(\text{см. (A.13)}),$$

откуда

$$\ln |H(t)| \leq -\varepsilon t \quad \Longleftrightarrow \quad H(t) \leq \exp(-\varepsilon t)$$

и при $t \longrightarrow \infty$, что завершает доказательство леммы А.5.

1. *Alt H. W., Luckhaus S.* Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z. – 1983. – **183**, № 3. – S. 311 – 341.
2. *Bernis F.* Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domain // Math. Ann. – 1988. – **279**, № 3. – P. 373 – 394.
3. *Payne L. E.* Improperly posed problems in partial differential equations // Reg. Conf. Ser. Appl. Math. – 1975. – № 22. – P. 76.
4. *Knerr B. F.* The behavior of the support of solutions of the equation of nonlinear heat conduction with absorption in one dimension // Trans. Amer. Math. Soc. – 1979. – **249**, № 2. – P. 409 – 424.
5. *Straughan B.* Instability, nonexistence and weighted energy methods in fluid dynamics and related theories // Res. Notes Math. – London: Pitman, 1982. – **74**. – P. 169.
6. *Bandle C., Stakgold I.* The formation of the dead core in parabolic reaction-diffusion problems // Trans. Amer. Math. Soc. – 1984. – **286**, № 1. – P. 275 – 293.
7. *Friedman A., Herrero M. A.* Extinction properties of semilinear heat equations with strong absorption // J. Math. Anal. and Appl. – 1987. – **124**, № 2. – P. 530 – 546.
8. *Chen Xu-Yan, Matano H., Mimura M.* Finite-point extinction and continuity of interfaces in a nonlinear diffusion equation with strong absorption // J. reine und angew. Math. – 1995. – **459**, № 1. – S. 1 – 36.
9. *Калашников А. С.* О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1974. – **14**, № 4. – С. 891 – 905.
10. *Benilan Ph., Crandall M. G.* The continuous dependence on φ of solutions of $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$ // Indiana Univ. Math. J. – 1981. – **30**, № 2. – P. 161 – 177.
11. *Diaz G., Diaz I.* Finite extinction time for a class of nonlinear parabolic equations // Commun. Part. Different. Equat. – 1979. – **4**, № 11. – P. 1213 – 1231.
12. *Peletier L. A.* The porous media equation // Appl. Nonlinear Anal. Phys. Sci. (Bielefeld, 1979). Surv. Ref. Works Math. – 1981. – **6**. – P. 229 – 241.
13. *Bernis F.* Finite speed of propagation and asymptotic rates for some nonlinear higher order parabolic equations with absorption // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. – 1986. – **104 A**, № 1-2. – P. 1 – 19.
14. *Шишков А. Е.* Мертвые зоны и мгновенная компактификация носителей энергетических решений квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка // Мат. сб. – 1999. – **190**, № 12. – С. 129 – 156.
15. *Shishkov A., Kersner R.* Instantaneous shrinking of the support of energy solutions // J. Math. Anal. and Appl. – 1996. – **198**, № 3. – P. 729 – 750.
16. *Kersner R., Nicolosi F.* The nonlinear heat equation with absorption: effects of variable coefficients // J. Math. Anal. and Appl. – 1992. – **170**, № 2. – P. 551 – 566.
17. *Kalashnikov A. S.* Instantaneous shrinking of the support for solutions to certain parabolic equations and systems // Atti Accad. naz. Lincei Cl. sci., fis., mat. e natur. Rend. – 1997. – **8**, № 4. – P. 263 – 272.
18. *Li Jun-Jie.* Qualitative properties for solutions of semilinear heat equations with strong absorption // J. Math. Anal. and Appl. – 2003. – **281**, № 1. – P. 382 – 394.
19. *Li Jun-Jie.* Qualitative properties of solutions to semilinear heat equations with singular initial data // Electron. J. Different. Equat. – 2004. – № 53. – P. 1 – 12.
20. *Kondratiev V. A., Véron L.* Asymptotic behaviour of solutions of some nonlinear parabolic or elliptic equations // Asymptot. Anal. – 1997. – **14**. – P. 117 – 156.
21. *Belaud Y., Helffer B., Véron L.* Long-time vanishing properties of solutions of sublinear parabolic equations and semi-classical limit of Schrödinger operator // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Nonlinear. – 2001. – **18**, № 1. – P. 43 – 68.
22. *Belaud Y., Shishkov A.* Long-time extinction of solutions of some semilinear parabolic equations // J. Different. Equat. – 2007. – **238**. – P. 64 – 86.
23. *Diaz J. I., Veron L.* Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1985. – **290**, № 2. – P. 787 – 814.
24. *Антонцев С. Н.* О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений // Докл. АН СССР. – 1981. – **260**, № 6. – С. 1289 – 1293.
25. *Gagliardo E.* Ulteriori proprieta ‘di alcune classi di funzioni in piu’ variabili // Ric. mat. – 1959. – **8**. – P. 24 – 51.
26. *Nirenberg L.* On elliptic partial differential equations // Ann. Scuola norm. super. Pisa. – 1959. – **13**, № 3. – P. 115 – 162.

Получено 06.11.12,
после доработки — 18.09.13