УДК 517.956

В. В. Городецький, О. В. Мартинюк (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

НЕЛОКАЛЬНА БАГАТОТОЧКОВА ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧА ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ПСЕВДОБЕССЕЛЕВИМИ ОПЕРАТОРАМИ ЗІ ЗМІННИМИ СИМВОЛАМИ

We study the properties of the fundamental solution of a nonlocal problem multipoint in time for the evolutionary equations with pseudo-Bessel operators constructed on variable symbols. The solvability of this problem in the class of bounded continuous functions even on $\mathbb{R}$ is proved. The integral representation of solutions is established.

Исследованы свойства фундаментального решения нелокальной многоточечной по времени в полосе задачи для эволюционных уравнений с псевдобесселевыми операторами, построенными по переменным символам. Доказана разрешимость такой задачи в классе ограниченных непрерывных и четных на $\mathbb{R}$ функций. Найдено интегральное представление решения.

Упродовж останніх кількох десятиліть інтенсивно розвивається теорія псевдодиференціальних операторів (ПДО) та рівнянь з такими операторами (ПДР). ПДО формально можна зобразити у вигляді $F^{-1}_{\sigma\to x}\big[a(t,x,\sigma)F_{x\to\sigma}\big]$, $\{x,\sigma\}\subset\mathbb{R}^n$, $t>0$, де a — функція (символ), що задовольняє певні умови, F та F^{-1} — пряме та обернене перетворення Фур'є. До вказаного класу належать диференціальні оператори, оператори дробового диференціювання та інтегрування, оператори згортки тощо. Серед нових розділів цієї теорії особливої уваги заслуговує теорія як лінійних, так і нелінійних ПДР з негладкими і однорідними за змінною σ символами $a(t,x,\sigma)$. Як зазначено в [1], випадок однорідних символів має важливі застосування в теорії випадкових процесів. Наприклад, ПДО з символом $|\sigma|^\gamma$, $0<\gamma<2$, є твірним оператором симетричного стійкого процесу. Побудові розривних марковських процесів за твірними інтегро-диференціальними операторами і, зокрема, ПДО присвячено багато праць, в яких використовуються або стохастичні диференціальні рівняння, або теорія півгруп операторів. Теорія ПДО з негладкими символами тісно пов'язана також з сучасною теорією фракталів, яка останнім часом бурхливо розвивається [2, 3].

Широкий клас ПДО утворюють оператори вигляду $F^{-1}_{B_\nu,\sigma\to x}\big[a(t,x,\sigma)F_{B_\nu,x\to\sigma}\big]$, породжені перетвореннями Бесселя F_{B_ν}, $F^{-1}_{B_\nu}$. Якщо символ a є цілою функцією аргументу σ, то еволюційні рівняння із вказаним оператором містять сингулярні диференціальні рівняння (тобто рівняння, серед коефіцієнтів яких є такі, що необмежені в деякій області в $\mathbb{R}^n$), зокрема рівняння з оператором Бесселя $B_\nu=d^2/dx^2+(2\nu+1)x^{-1}d/dx$, $\nu>-1/2$, який містить вираз $1/x$ і формально зображується у вигляді $B_\nu=F^{-1}_{B_\nu}\big[-\sigma^2F_{B_\nu}\big]$. Якщо $a(t,x,\sigma)=P(t,x,\sigma)$, де P — поліном змінної σ при фіксованих t, x, що задовольняє певну умову „параболічності”, то таке рівняння відноситься до B-параболічних рівнянь, введених М. І. Матійчуком і В. В. Крехівським у 1968 р. Такі рівняння вироджуються на межі області й за внутрішніми властивостями близькі до рівномірно параболічних рівнянь. Еволюційні рівняння з оператором $A=F^{-1}_{B_\nu}[aF_{B_\nu}]$, де $a=a(\sigma)$ — однорідний, негладкий у точці 0 символ, що задовольняє певні умови, почали досліджувати В. В. Городецький та О. М. Ленюк [4]. Оператор A далі називатимемо псевдобесселевим оператором. У [4] встановлено основні властивості оператора A, доведено коректну розв'язність задачі Коші для еволюційних рівнянь з такими операторами у класі початкових даних, які є узагальненими функціями типу розподілів. Для подальшого розвитку теорії ПДО має науковий інтерес дослідження псевдобесселевих операторів, побудованих за змінними символами вигляду $a(t, x, \sigma)$, однорідними за змінною σ і негладкими у точці $\sigma = 0$.

Останнім часом значна увага приділяється дослідженню нелокальних багатоточкових крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними (до таких задач відносяться і нелокальні багатоточкові за часом задачі). Це зумовлено тим, що багато задач практики моделюються крайовими задачами для рівнянь з частинними похідними з нелокальними (у тому числі періодичними) умовами [5 – 9]. На доцільність використання нелокальних умов з точки зору загальної теорії крайових задач уперше вказав О. О. Дезін [10], який досліджував розв'язні розширення диференціальних операторів, породжених загальною диференціальною операцією зі сталими коефіцієнтами. Він показав, що для постановки коректної крайової задачі необхідно використовувати поряд з локальними і нелокальні умови. А. Х. Мамян встановив [11], що існують такі рівняння з частинними похідними в шарі, для яких неможливо сформулювати жодну коректну локальну задачу; водночас коректні задачі існують, якщо залучити нелокальні умови.

Двоточкову за часом задачу для рівняння теплопровідності та B-параболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами дослідив М. І. Матійчук [12, с. 148 – 152]. Двоточкову та m-точкову ($m \geq 2$) за часом задачі для еволюційних рівнянь з ПДО, які будуються за допомогою перетворення Бесселя та негладкими однорідними символами, не залежними від t та просторових змінних, дослідили В. В. Городецький, О. М. Ленюк та Д. І. Спіжавка [13, 14] у випадку, коли функція φ — права частина багатоточкової за часом задачі — узагальнена функція типу розподілів.

Нелокальні багатоточкові за часом задачі для еволюційних рівнянь із псевдобесселевими операторами, побудованими за змінними символами $a(t, x, \sigma)$ (негладкими у точці $\sigma = 0$ і однорідними по σ при фіксованих t, x), на теперішній час не вивчалися. Метою цієї роботи є побудова та дослідження властивостей фундаментального розв'язку нелокальної m-точкової ($m \geq 1$) за часом задачі для еволюційних рівнянь із вказаними операторами; встановлення розв'язності такої задачі у випадку, коли функція φ належить до класу неперервних, парних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій; відшукання інтегрального зображення розв'язку.

1. Попередні відомості. Нехай M, $\rho\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ — неперервні, парні на $\mathbb{R}$ функції, диференційовні й монотонно зростаючі на $(0, \infty)$, $M(0) = \rho(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} M(x) = \lim_{x\to+\infty} \rho(x) = +\infty$, причому $\rho(x) = \int_0^x \omega(\xi)d\xi$ для $x \geq 0$, де ω — зростаюча й неперервна на $[0, \infty)$ функція, $\omega(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \omega(x) = +\infty$. Функція ρ є опуклою на $[0, +\infty)$, тобто а) $\forall \{x_1, x_2\} \subset [0, \infty)\colon \rho(x_1) + \rho(x_2) \leq \rho(x_1 + x_2)$; б) $\forall \alpha \geq 1\ \forall x \in [0, +\infty)\colon \rho(\alpha x) \geq \alpha\rho(x)$; в) $\forall \alpha \in (0, 1)\ \forall x \in [0, \infty)\colon \rho(\alpha x) \leq \alpha\rho(x)$. Зауважимо, що оскільки похідна функції $\rho(x)$ (функція $\omega(x)$) при $x \to +\infty$ необмежено зростає, то сама функція ρ при $x \to +\infty$ зростає швидше за довільну лінійну функцію. Припускаємо також, що виконуються наступні умови:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 = x_0(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \geq x_0\colon\ \rho(\varepsilon x) \geq M(x),$$

$$\rho(x) \underset{x\to+0}{\sim} x^\gamma, \quad \gamma \in (1, +\infty), \qquad M(x) \underset{x\to+0}{\sim} x^\beta, \quad \beta \in (0, 1],$$

де γ та β — фіксовані параметри.

Символом $\theta_{M,\rho}$ позначимо сукупність усіх неперервних, парних на $\mathbb{R}$ функцій $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, для яких

$$\exists a_0>0 \quad \forall k\in\mathbb{Z}_+ \quad \exists c'_k>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\colon\; M^k(x)\big|D_x^k\varphi(x)\big|\le c'_k\sum_{l=1}^{k}\rho^l(x)e^{-\rho(a_0x)}, \qquad (1)$$

де $D_x^k=d^k/dx^k$ (якщо $k=0$, то суми немає, якщо $k=1$, то $l=1$, і т. д.; якщо $k=0$, то (1) справджується для всіх $x\in\mathbb{R}$; додатні сталі c'_k, a_0 залежать від φ). Наведемо приклад функції із простору $\theta_{M,\rho}$, побудованого за конкретними функціями M та ρ. Для цього розглянемо неперервну, парну на $\mathbb{R}$ функцію $\alpha\colon\mathbb{R}\to[0,\infty)$, однорідну порядку $\gamma>1$ і нескінченно диференційовну на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; похідні цієї функції задовольняють умову

$$\forall k\in\mathbb{N} \quad \exists b_k>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\colon\; \big|D_x^k\alpha(x)\big|\le b_k|x|^{\gamma-k}; \qquad (2)$$

крім того,

$$\exists\delta>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\colon\; \alpha(x)\ge\delta|x|^{\gamma}. \qquad (3)$$

Така функція використовується при побудові псевдодиференціальних операторів, для яких вона є негладким у точці 0 однорідним символом, що задовольняє умови „параболічності” (2), (3). Використовуючи формулу Фаа де Бруно диференціювання складної функції, переконуємося в тому, що справджується нерівність (див. також [15])

$$\big|D_x^{\alpha}e^{-\alpha(x)}\big|\le c_k\sum_{l=1}^{k}|x|^{\gamma l-k}e^{-\alpha(x)}.$$

Звідси та з умови (3) випливає нерівність

$$M^k(x)\Big|D_x^ke^{-\alpha(x)}\Big|\le c_k\sum_{l=1}^{k}\rho^l(x)e^{-\rho(\delta_0x)},$$

де $M(x)=|x|$, $\rho(x)=|x|^{\gamma}$, $\delta_0=\delta^{1/\gamma}$. Отже, функція $\exp\{-\alpha(x)\}$ належить до простору $\theta_{M,\rho}=\theta_{|x|,|x|^{\gamma}}$; така функція є важливою при дослідженні задачі Коші для еволюційних рівнянь із псевдодиференціальними операторами із символом $\alpha(x)$.

Відмітимо основні властивості функцій із простору $\theta_{M,\rho}$, встановлені у [15]: у функції $D_x^k\varphi,\varphi\in\theta_{M,\rho}$, $k\in\mathbb{N}$, існують скінченні односторонні границі $\lim_{x\to\pm0}D_x^k\varphi$, функція $D_x^{2k}\varphi$, $k\in\mathbb{N}$, у точці $x=0$ має усувний розрив, кожна функція $\varphi\in\theta_{M,\rho}$ у точці 0 задовольняє умову Діні.

Символом $\theta_{M,\rho,a}$ позначимо сукупність тих функцій φ з простору $\theta_{M,\rho}$, які при фіксованому $a>0$ та довільному $\delta\in(0,a)$ задовольняють нерівності

$$M^k(x)\big|D_x^k\varphi(x)\big|\le c_{k\delta}e^{-\rho((a-\delta)x)}, \qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad k\in\mathbb{Z}_+$$

(якщо $k=0$, то $x\in\mathbb{R}$). Введемо в $\theta_{M,\rho,a}$ структуру зліченно-нормованого простору, поклавши

$$\|\varphi\|_{p,a}:=\sup_{x\in(0,\infty)}\left\{\exp\left(\rho\Big(a\frac{p+1}{p+2}x\Big)\right)\sum_{k=0}^{p}M^{2k}(x)\big|D_x^{2k}\varphi(x)\big|\right\}, \qquad \varphi\in\theta_{M,\rho,a}, \quad p\in\mathbb{Z}_+.$$

Об'єднання просторів $\theta_{M,\rho,a}$ за індексами $a \in \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots\right\}$ збігається з простором $\theta_{M,\rho}$.

Нехай ν — фіксоване число з множини $\{3/2, 5/2, 7/2, \ldots\}$. На функціях з простору $\theta_{M,\rho}$ визначено перетворення Бесселя F_{B_ν} :

$$F_{B_\nu}[\varphi](\xi) = \int\limits_0^\infty \varphi(x) j_\nu(x\xi) x^{2\nu+1} dx, \quad \varphi \in \theta_{M,\rho},$$

де j_ν — нормована функція Бесселя. Нехай $F_{B_\nu}[\theta_{M,\rho}] := \Phi^\nu_{\beta,\gamma}$, β, γ — фіксовані параметри (див. початок п. 1). Елементами простору $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ є нескінченно диференційовні на $\mathbb{R}$ функції, які задовольняють нерівності [16]

$$\left|D^m_\xi F_{B_\nu}[\varphi](\xi)\right| \leq \alpha_m \big(1 + |\xi|\big)^{-(\omega_0+m)}, \qquad m \in \mathbb{Z}_+, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \theta_{M,\rho},$$

$\omega_0 = \tilde{p}_0 + \big[[\gamma]/\beta\big]$, $\tilde{p}_0 = 1 + p_0$, $p_0 = 2\nu + 1$, $[\cdot]$ — ціла частина числа.

$\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ перетворюється в зліченно-нормований простір із введенням системи норм за формулами

$$\|\varphi\|_p := \sup_{\xi \in [0,\infty)} \left\{ \sum_{k=0}^p \Lambda(\xi)^{\tilde{\omega}_0 + 2k} \left|D^{2k}_\xi \varphi(\xi)\right| \right\}, \qquad \varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}, \quad p \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\Lambda(\xi) := 1 + \xi$, $\xi \in [0, \infty)$, $\tilde{\omega}_0 = \omega_0 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ — фіксований параметр. Перетворення Бесселя неперервно відображає $\theta_{M,\rho}$ на $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ [16]; на функціях з простору $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ визначено обернене перетворення Бесселя $F^{-1}_{B_\nu}$:

$$F^{-1}_{B_\nu}[\psi](x) = c_\nu \int\limits_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma, \quad \psi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}, \qquad c_\nu = \big(2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)\big)^{-1}.$$

У просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ визначено неперервний оператор узагальненого зсуву аргументу T^ξ_x, який відповідає оператору Бесселя [17]:

$$T^\xi_x \varphi(x) = b_\nu \int\limits_0^\pi \varphi\left(\sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi\cos\omega}\right) \sin^{2\nu}\omega d\omega, \quad \varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma},$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/\big(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2)\big)$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція. Операція узагальненого зсуву аргументу $\varphi \to T^\xi_x \varphi$ диференційовна (навіть нескінченно диференційовна) у просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ в тому розумінні, що граничні співвідношення $\big(T^{\xi+\Delta\xi}_x \varphi(x) - T^\xi_x \varphi(x)\big)/\Delta\xi \to \partial T^\xi_x \varphi/\partial\xi$, $\Delta\xi \to 0$, справджуються у просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$.

Дотримуючись [18], згортку двох функцій із простору $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ визначимо формулою

$$(\varphi * \psi)(x) = \int\limits_0^\infty T^\xi_x \varphi(x) \psi(\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi, \quad \{\varphi, \psi\} \subset \Phi^\nu_{\beta,\gamma}.$$

Символом $(\Phi^\nu_{\beta,\gamma})'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями.

Оскільки у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ визначено операцію узагальненого зсуву аргументу, то згортку узагальненої функції $f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \big\langle f_\xi, T^{\xi}_{x}\varphi(x)\big\rangle \equiv \big\langle f_\xi, T^{x}_{\xi}\varphi(\xi)\big\rangle, \quad \varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$$

(тут індекс ξ у f_ξ означає, що функціонал f діє на $T^{\xi}_{x}\varphi(x)$ як на функцію аргументу ξ).

У просторі узагальнених функцій $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ можна також ввести операцію $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})' \ni f \to \to T^{\xi}_{x} f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ так: $\langle T^{\xi}_{x} f, \varphi\rangle := \langle f, T^{\xi}_{x}\varphi\rangle$ $\forall \varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$. Із властивості неперервності операції T^{ξ}_{x} в основному просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ випливає неперервність вказаної операції у просторі $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$. Аналогічно $\langle T^{x}_{\xi} f, \varphi\rangle := \langle f, T^{x}_{\xi}\varphi\rangle$. Оскільки $T^{x}_{\xi}\varphi(\xi) = T^{\xi}_{x}\varphi(x)$, то звідси отримуємо $T^{\xi}_{x} f = T^{x}_{\xi} f$ $\forall f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$, при цьому $\langle T^{\xi}_{x} f, \varphi\rangle = f * \varphi$.

2. Основні результати. Розглянемо функцію $a(t, x, \sigma)$, задану на $[0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, парну за змінними x, σ, яка задовольняє умови: 1) функція $a(t, x, \sigma)$ є однорідною порядку γ за аргументом σ рівномірно відносно t, x, тобто

$$a(t, x, \lambda\sigma) = \lambda^{\gamma} a(t, x, \sigma) \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Pi_T;$$

2) $a(t, x, \sigma)$ — неперервна функція аргументу t на відрізку $[0, T]$ (при фіксованих x, σ) і $a(t, x, \sigma)$ — неперервна, обмежена на $\mathbb{R}$ функція аргументу x (при фіксованих t, σ); 3) існують сталі c_0, $b_0 > 0$ такі, що справджуються нерівності

$$b_0\rho(\sigma) \leq a(t, x, \sigma) \leq \frac{c_0\big(1 + \rho(\sigma)\big)}{\big(1 + |x|\big)^{\omega_0}}, \qquad \omega_0 = 2\nu + 2 + \big[[\gamma]/\beta\big], \quad (t, x) \in \Pi_T;$$

4) при фіксованих t, x функція $a(t, x, \sigma)$, як функція σ, нескінченно диференційовна по σ при $\sigma \neq 0$, при цьому

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists c_k > 0\colon M^k(\sigma)\big|D^k_\sigma a(t, x, \sigma)\big| \leq c_k \frac{\rho(\sigma)}{\big(1 + |x|\big)^{\omega_0}}, \qquad (t, x) \in \Pi_T, \quad \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Із властивостей функції a випливає, що $a(t, x, \sigma)$, як функція σ (при фіксованих $(t, x) \in \Pi_T$), є мультиплікатором у просторі $\theta_{M,\rho}$.

Розглянемо оператор A_t, заданий на $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, залежний від параметра $t \in [0, T]$, який визначається співвідношенням

$$(A_t\varphi)(x) := F_{B_\nu, \sigma\to x}\big[a(t, x, \sigma) F^{-1}_{B_\nu, x\to\sigma}[\varphi](\sigma)\big](x), \quad \varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}.$$

Далі будемо використовувати позначення $A_t = A$. Із властивостей функції $a(t, x, \sigma)$ випливає, що $A\varphi \in \mathcal{K}$ при кожному $t \in [0, T]$, де $\mathcal{K}$ — нормований простір, який складається з неперервних парних на $\mathbb{R}$ функцій ψ, що задовольняють нерівність $\big|\psi(x)\big| \leq c\big(1 + |x|\big)^{-\omega_0}$, $c = c(\psi) > 0$, з нормою $\|\psi\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \big\{\Lambda(x)^{\omega_0}\big|\psi(x)\big|\big\}$, $\Lambda(x) := 1 + |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Оскільки перетворення Бесселя (пряме та обернене) є неперервним оператором, то $A\colon \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma} \to \mathcal{K}$ — лінійний і неперервний оператор. Оператор A далі називатимемо псевдобесселевим оператором, побудованим за змінним символом $a(t, x, \sigma)$.

У смузі $\Pi'_T = \big\{(t, x)\colon 0 \leq \tau < t \leq T, x \in \mathbb{R}\big\}$ розглянемо задачу про відшукання розв’язку еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + Au(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi'_T, \tag{4}$$

який задовольняє наступні умови: $u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x)$,

$$\mu \lim_{t \to \tau+0} u_1(t,x) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} u_1(t,x) = \varphi(x), \tag{5}$$

$$\lim_{t \to \tau+0} u_2(t,x) = 0 \tag{6}$$

у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ для довільної фіксованої функції $\varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset \subset (0, +\infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (\tau, T]$ — фіксовані числа, причому $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$, $0 \le \tau < t_1 < < t_2 < \ldots < t_m \le T$. Далі (4) – (6) називатимемо нелокальною за часом m-точковою (багатоточковою) задачею для рівняння (4).

Під розв'язком m-точкової задачі (4) – (6) розумітимемо функцію $u(t,\cdot) \in C^1((\tau,T], \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})$, яка задовольняє рівняння (4) та умови (5), (6) у кожній точці $x \in \mathbb{R}$.

Під фундаментальним розв'язком задачі (4) – (6) розумітимемо функцію $Z(t,x;\tau,\xi) = = V(t,x;\tau,\xi) + W(t,x;\tau,\xi)$, $(t,x) \in \Pi'_T$, $\xi \in \mathbb{R}$, яка має такі властивості:

1) $LZ(t,x;\tau,\xi) = 0$, $L \equiv L(t,x;A,D_t) := \partial/\partial t + A$, тобто Z, як функція t, x (при фіксованих τ, ξ), є розв'язком рівняння (4);

2) $\mu \lim_{t \to \tau+0} \int_0^{\infty} V(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1} d\xi - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} \int_0^{\infty} V(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1} d\xi = = \varphi(x)$, $\lim_{t \to +0} \int_0^{\infty} W(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1} d\xi = 0$ у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ для довільної функції $\varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$.

Для побудови функції Z у вказаному вигляді використаємо метод Леві (метод параметрикса). Для цього символ $a(t,x,\sigma)$ зафіксуємо у точці $(t,x) = (\chi,\xi)$, $\chi \in [0,T]$, $\xi \in \mathbb{R}$, вважаючи $a(t,x,\sigma) = a(\chi,\xi,\sigma)$ для $(t,x) \in \Pi_T$, і розглянемо m-точкову задачу для еволюційного рівняння зі сталим символом $a(\chi,\xi,\sigma)$:

$$L(\chi,\xi;A,D_t)v(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi'_T, \tag{7}$$

$$\mu \lim_{t \to \tau+0} v(t,x) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} v(t,x) = \varphi(x), \quad \varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}, \tag{8}$$

$$0 \le \tau < t_1 < t_2 < \ldots < t_m \le T.$$

Розв'язок $v \in C^1\big((\tau,T], \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}\big)$ задачі (7), (8) шукаємо за допомогою перетворення Бесселя у вигляді

$$v(t,x) = F_{B_\nu}\big[\tilde{v}(t,\sigma)\big](x), \quad (t,x) \in \Pi'_T.$$

Для функції $\tilde{v} \colon \Pi'_T \to \mathbb{R}$ отримуємо задачу з параметром σ :

$$\frac{d\tilde{v}(t,\sigma)}{dt} + a(\chi,\xi,\sigma)\tilde{v}(t,\sigma) = 0, \quad (t,\sigma) \in \Pi'_T, \tag{9}$$

$$\mu \lim_{t\to\tau+0} \tilde{v}(t,\sigma) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \tilde{v}(t,\sigma) = \tilde{\varphi}(\sigma), \tag{10}$$

де $\tilde{\varphi}(\sigma) = F_{B_\nu}^{-1}[\varphi](\sigma)$. Загальний розв'язок рівняння (9) має вигляд

$$\tilde{v}(t,\sigma) = c\exp\big\{ -(t-\tau)a(\chi,\xi,\sigma)\big\}, \quad (t,\sigma)\in\Pi'_T,$$

де c визначається з умови (10). Підставивши (10) в (9), знайдемо

$$c = \tilde{\varphi}(\sigma)\left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k \exp\big\{-(t_k-\tau)a(\chi,\xi,\sigma)\big\}\right)^{-1}, \quad \sigma\in\mathbb{R},$$

$$\tilde{v}(t,\sigma) = \tilde{\varphi}(\sigma)Q(t-\tau,\chi;\xi,\sigma), \qquad Q(t-\tau,\chi;\xi,\sigma) = \exp\big\{-(t-\tau)a(\chi,\xi,\sigma)\big\}\times$$

$$\times\left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k \exp\big\{-(t_k-\tau)a(\chi,\xi,\sigma)\big\}\right)^{-1} \equiv Q_1(t-\tau,\chi;\xi,\sigma)\cdot Q_2(\tau,\chi;\xi,\sigma).$$

Отже, розв'язок задачі (7), (8) має вигляд

$$v(t,x) = \int_0^\infty \tilde{v}(t,\sigma)j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}d\sigma, \quad (t,x)\in\Pi'_T.$$

Введемо позначення $G(t-\tau,x;\chi,\xi) := c_\nu F_{B_{\nu,\sigma\to x}}\big[Q(t-\tau,\chi;\xi,\sigma)\big]$. Тоді

$$v(t,x) = \int_0^\infty Q(t-\tau,\chi;\xi,\sigma)\left(c_\nu\int_0^\infty \varphi(\omega)j_\nu(\sigma\omega)\omega^{2\nu+1}d\omega\right)j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}d\sigma.$$

Оскільки $j_\nu(\sigma\omega)j_\nu(\sigma x) = T_x^\omega j_\nu(\sigma x)$ [17], то, врахувавши властивості оператора T_x^ω (див. [17]), прийдемо до співвідношень

$$v(t,x) = \int_0^\infty\left(\int_0^\infty Q(t-\tau,\chi,\xi,\sigma)T_x^\omega j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}d\sigma\right)\varphi(\omega)\omega^{2\nu+1}d\omega =$$

$$= \int_0^\infty T_x^\omega G(t-\tau,x;\chi,\xi)\varphi(\omega)\omega^{2\nu+1}d\omega = G(t-\tau,x;\chi,\xi)*\varphi(x).$$

Зазначимо, що правильність наведених тут формул (тобто коректність проведених перетворень та збіжність відповідних інтегралів) випливає з властивостей функції G, які наведемо нижче.

Оскільки

$$\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\big\{-(t_k-\tau)a(\chi,\xi,\sigma)\big\} \le \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m}\mu_k < 1,$$

то, використавши поліноміальну формулу, знайдемо

$$Q_2(\tau,\chi,\xi,\sigma)=\frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-r}\left(\sum_{k=1}^{m}\mu_k e^{-(t_k-\tau)a(\chi,\xi,\sigma)}\right)^r=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\left(\sum_{r_1+\ldots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}\Big(\mu_1 e^{-(t_1-\tau)a(\chi,\xi,\sigma)}\Big)^{r_1}\ldots\Big(\mu_m e^{-(t_m-\tau)a(\chi,\xi,\sigma)}\Big)^{r_m}\right)=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\sum_{r_1+\ldots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}e^{-((t_1-\tau)r_1+\ldots+(t_m-\tau)r_m)a(\chi,\xi,\sigma)}.$$

Звідси випливають співвідношення

$$G(t-\tau,x;\chi,\xi)=c_\nu\int\limits_0^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\sum_{r_1+\ldots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\ldots r_m!}\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}\times$$

$$\times e^{-((t_1-\tau)r_1+\ldots+(t_m-\tau)r_m+t-\tau)a(\chi,\xi,\sigma)}j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}d\sigma=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{\mu^{r+1}}\sum_{r_1+\ldots+r_m=r}\frac{r!\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!}\tilde G\big((t_1-\tau)r_1+(t_m-\tau)r_m+t-\tau,x;\chi,\xi\big),$$

де

$$\tilde G\big((t_1-\tau)r_1+\ldots+(t_m-\tau)r_m+t-\tau,x;\chi,\xi\big)=$$

$$=c_\nu\int\limits_0^{\infty}e^{-((t_1-\tau)r_1+\ldots+(t_m-\tau)r_m+t-\tau)a(\chi,\xi,\sigma)}j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}d\sigma.$$

Тут $\tilde G(t-\tau,x;\chi,\xi)$ — фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (7). Із результатів, одержаних у [19], випливає, що: 1) $\tilde G$ є неперервно диференційовною функцією аргументу $t\in(\tau,T]$, нескінченно диференційовною функцією аргументу x, причому $\tilde G$, як функція аргументу x, є елементом простору $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ при кожному $t>\tau$; 2) $\tilde G$, як абстрактна функція параметра $t\in(\tau,T]$ із значеннями у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, диференційовна по t, тобто граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}\big[\tilde G(t+\Delta t-\tau,x;\chi,\xi)-\tilde G(t-\tau,x;\chi,\xi)\big]\to\frac{\partial}{\partial t}\tilde G(t-\tau,x;\chi,\xi),\quad \Delta t\to 0,$$

виконується в розумінні збіжності у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$; 3) для функції $\tilde G$ та її похідних справджуються оцінки

$$\big|D_x^q\tilde G(t-\tau+\lambda,x;\chi,\xi)\big|\le\alpha_q(t-\tau+\lambda)^{\big[[\gamma]/\beta\big]/\gamma}\times$$

$$\times\big((t-\tau+\lambda)^{1/\gamma}+|x|\big)^{-(\omega_0+q)},\quad q\in\mathbb{Z}_+,\tag{11}$$

$\omega_0=2\nu+2+\big[[\gamma]/\beta\big]$, $\lambda:=(t_1-\tau)r_1+\ldots+(t_m-\tau)r_m$, $\alpha_q=\beta_q\big(1+|\xi|\big)^{-\omega_0}$, стала $\beta_q>0$ не залежить від t, τ, ξ, λ.

Для функції $\tilde{G}$ правильною є оцінка, яку будемо використовувати в подальших дослідженнях:

$$\left|\tilde{G}(t-\tau+\lambda, x; \tau, \xi)\right| \leq c(t-\tau)^{1-\alpha}\tilde{\lambda}^p\big((t-\tau)^s+|x|\big)^{-\omega_0}\big(1+|\xi|\big)^{-\omega_0}, \tag{12}$$

де c — деяка стала, $\alpha = s\big(p\gamma - \big[[\gamma]/\beta\big]\big)$, $s \in \Big(0, \big(p\gamma - \big[[\gamma]/\beta\big]\big)^{-1}\Big) \subset (0,1)$, s — фіксований параметр, $p = \nu + 3/2 + \big[[\gamma]/\beta\big]$,

$$\tilde{\lambda} = \begin{cases} \lambda, & \text{якщо} \quad r_1 + \ldots + r_m = r \geq 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad r_1 + \ldots + r_m = 0. \end{cases}$$

Для доведення (12) в інтегралі, який зображує функцію $\tilde{G}$, виконаємо заміну змінної інтегрування $\sigma = (t-\tau)^{-s}z$, де s — вказаний параметр. Урахувавши властивість однорідності функції a щодо аргументу σ, знайдемо

$$\tilde{G}(t-\tau+\lambda, x; \tau, \xi) = (t-\tau)^{-s(2\nu+2)}\int_0^\infty e^{-(t-\tau)^{1-s\gamma}a(\tau,\xi,z)}\times$$

$$\times e^{-\lambda(t-\tau)^{-s\gamma}a(\tau,\xi,z)}j_\nu(yz)z^{2\nu+1}dz, \qquad y = (t-\tau)^{-s}x.$$

Далі оцінювання функції $\tilde{G}$ проводимо за допомогою методики, розвиненої у праці [20]. В результаті прийдемо до нерівності (12). Зазначимо, що в (12) маємо $0 < 1-\alpha < 1$ при вказаному обмеженні на параметр s. Далі вважатимемо, що параметр s в (12) задовольняє умову $s < 1/\omega$, де $\omega = \Big(\nu + 5/2 + \big[[\gamma]/\beta\big]\Big)\gamma$. Нескладно перевірити, що при вказаному обмеженні нерівність $0 < 1-\alpha < 1$ також виконується.

Із нерівності (12) та вигляду функції G випливає, що

$$\big|G(t-\tau, x; \tau, \xi)\big| \leq c\sum_{r=0}^\infty \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!}(r+1)^p(t-\tau)^{1-\alpha}\times$$

$$\times\big((t-\tau)^s+|x|\big)^{-\omega_0}\big(1+|\xi|\big)^{-\omega_0} \leq \tilde{c}(t-\tau)^{1-\alpha}\big((t-\tau)^s+|x|\big)^{-\omega_0}\big(1+|\xi|\big)^{-\omega_0}, \tag{13}$$

де

$$\tilde{c} = \frac{c}{\mu}T^p\sum_{r=0}^\infty \tilde{\mu}^r(r+1)^p < +\infty, \qquad \tilde{\mu} = \sum_{k=1}^m \mu_k/\mu < 1.$$

Із оцінок (11) та вигляду функції G випливає також, що: 1) при кожному $t \in (\tau, T]$ функція G, як функція аргументу x, є елементом простору $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$; 2) функція G, як абстрактна функція параметра $t \in (\tau, T]$ із значеннями у просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$, диференційовна по t.

Лема 1. *У просторі* $(\Phi^\nu_{\beta,\gamma})'$ *правильним є граничне співвідношення*

$$\mu\lim_{t\to\tau+0}G(t-\tau, x; \tau, \xi) - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t\to t_k}G(t-\tau, x; \tau, \xi) = \delta(x), \quad \xi \in \mathbb{R} \tag{14}$$

(*тут* δ — *дельта-функція Дірака*).

Доведення. Оскільки $G(t-\tau,\cdot;\tau,\xi)\in\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ при кожному $t>\tau$, то $Q(t-\tau,\tau;\xi,\cdot)= = F^{-1}_{B_\nu}\big[G(t-\tau,\cdot;\tau,\xi)\big]\in\theta_{M,\rho}$ при кожному $t>\tau$. Скориставшись властивістю неперервності перетворення Бесселя (прямого та оберненого) та функції G, як абстрактної функції параметра t із значеннями у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, співвідношення (14) замінимо еквівалентним граничним співвідношенням

$$\mu\lim_{t\to\tau+0}F^{-1}_{B_\nu}\big[G(t-\tau,\cdot;\tau,\xi)\big]-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\lim_{t\to t_k}F^{-1}_{B_\nu}\big[G(t-\tau,\cdot;\tau,\xi)\big]=F^{-1}_{B_\nu}[\delta] \tag{15}$$

у просторі $\theta'_{M,\rho}$, топологічно спряженому до $\theta_{M,\rho}$. Врахувавши зображення функції G, співвідношення (15) запишемо у вигляді

$$\mu\lim_{t\to\tau+0}Q(t-\tau,\tau;\xi,\cdot)-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\lim_{t\to t_k}Q(t-\tau,\tau;\xi,\cdot)=1. \tag{16}$$

Для доведення (16) візьмемо довільну функцію $\psi\in\theta_{M,\rho}$ і, використавши теорему про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, знайдемо

$$\mu\lim_{t\to\tau+0}\big\langle Q(t-\tau,\tau;\xi,\cdot),\psi\big\rangle-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\lim_{t\to t_k}\big\langle Q(t-\tau,\tau;\xi,\cdot),\psi\big\rangle=$$

$$=\mu\lim_{t\to\tau+0}\int_0^\infty Q(t-\tau,\tau;\xi,\sigma)\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\lim_{t\to t_k}\int_0^\infty Q(t-\tau,\tau;\xi,\sigma)\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma=$$

$$=\int_0^\infty\left(\mu Q_2(\tau,\tau;\xi,\sigma)-\sum_{k=1}^{m}\mu_kQ_1(t_k-\tau,\tau;\xi,\sigma)Q_2(\tau,\tau;\xi,\sigma)\right)\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma=$$

$$=\int_0^\infty\left(\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_kQ_1(t_k-\tau,\tau;\xi,\sigma)\right)Q_2(\tau,\tau;\xi,\sigma)\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma=$$

$$=\int_0^\infty\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma=\langle 1,\psi\rangle.$$

Звідси отримуємо, що співвідношення (16) виконується у просторі $\theta'_{M,\rho}$, а отже, правильним є співвідношення (14).

Лему доведено.

Оскільки $G(t-\tau,\cdot;\tau,\xi)$ є регулярною узагальненою функцією з простору $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$, то (див. п. 1)

$$\big\langle T^{\xi}_{x}G,\varphi\big\rangle=G*\varphi,\quad \varphi\in\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}.$$

Внаслідок леми 1 для довільної функції $\varphi\in\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$

$$\mu \lim_{t\to\tau+0} \left\langle T_x^\xi G, \varphi \right\rangle - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \left\langle T_x^\xi G, \varphi \right\rangle =$$

$$= \mu \lim_{t\to\tau+0} \left\langle G, T_x^\xi \varphi \right\rangle - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \left\langle G, T_x^\xi \varphi \right\rangle =$$

$$= \left\langle \delta, T_x^\xi \varphi \right\rangle = \left\langle T_x^\xi \delta, \varphi \right\rangle = \delta(x) * \varphi(x) \equiv \left\langle \delta_\xi, T_x^\xi \varphi(x) \right\rangle = T_x^0 \varphi(x) = \varphi(x).$$

З іншого боку,

$$\left\langle T_x^\xi G, \varphi \right\rangle = \int\limits_0^\infty T_x^\xi G(t-\tau, x; \tau, \xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1} d\xi, \quad \varphi \in \Phi_{\beta,\gamma}^\nu.$$

Отже, врахувавши останні співвідношення, прийдемо до наступного твердження.

Лема 2. *Для довільної функції* $\varphi \in \Phi_{\beta,\gamma}^\nu$

$$\mu \lim_{t\to\tau+0} \int\limits_0^\infty T_x^\xi G(t-\tau, x; \tau, \xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1} d\xi -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \int\limits_0^\infty T_x^\xi G(t-\tau, x; \tau, \xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1} d\xi = \varphi(x) \tag{17}$$

у кожній точці $x \in \mathbb{R}$.

Зазначимо, що співвідношення (17) справджується і для довільної обмеженої, неперервної, парної на $\mathbb{R}$ функції.

Нехай

$$J(\tau, t, x) := \int\limits_\tau^t d\mu \int\limits_0^\infty T_x^\xi G(t-y, x; y, \xi)\varphi(y, \xi)\xi^{2\nu+1} d\xi,$$

де $\varphi(t, x)$ — функція, задана на $[0, T] \times \mathbb{R}$, неперервна по t, неперервна, парна і обмежена на $\mathbb{R}$ функція змінної x.

Лема 3. *Правильними є формули*

$$\frac{\partial J(\tau, t, x)}{\partial t} = \int\limits_\tau^t dy \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} T_x^\xi G(t-y, x; y, \xi)\varphi(y, \xi)\xi^{2\nu+1} d\xi + \varphi(t, x), \tag{18}$$

$$AJ(\tau, t, x) = \int\limits_\tau^t dy \int\limits_0^\infty A T_x^\xi G(t-y, x; y, \xi)\varphi(y, \xi)\xi^{2\nu+1} d\xi. \tag{19}$$

Для того щоб уникнути громіздких викладок, наведемо схему доведення співвідношень (18), (19).

Розглянемо сім'ю функцій $\{J_h(\tau,t,x), 0<h<t-\tau\}$, де

$$J_h(\tau,t,x)=\int\limits_{\tau}^{t-h}dy\int\limits_0^{\infty}T_x^{\xi}G(t-y,x;y,\xi)\varphi(y,\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi\equiv\int\limits_{\tau}^{t-h}g(t,y,x)dx,$$

$$g(t,y,x)=\int\limits_0^{\infty}T_x^{\xi}G(t-y,x;y,\xi)\varphi(y,\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi.$$

Застосувавши правило Лейбніца диференціювання інтегралів, залежних від параметра, знайдемо

$$\frac{\partial J_h(\tau,t,x)}{\partial t}=\int\limits_{\tau}^{t-h}\frac{\partial}{\partial t}g(t,y,x)dy+g(t,t-h,x)=$$

$$=\int\limits_{\tau}^{t-h}dy\int\limits_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}G(t-y,x;y,\xi)\varphi(y,\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi+\int\limits_0^{\infty}T_x^{\xi}G(h,x;t-h,\xi)\varphi(t-h,\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi.$$

Далі доводимо, що $\{J_h, 0<h<t-\tau\}$ збігається при $h\to 0$ до функції $J(\tau,t,x)$, а $\left\{\dfrac{\partial J_h}{\partial t}, 0<h<t-\tau\right\}$ — при $h\to 0$ рівномірно відносно t до правої частини (18). При цьому використовуються нерівності

$$\left|T_x^{\xi}G(t-y,x;y,\xi)\right|\le c(t-y)^{1-\alpha}\big((t-y)^s+|x-\xi|\big)^{-\omega_0}, \tag{20}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}T_x^{\xi}G(t-y,x;y,\xi)\right|\le d(t-y)^{1-\alpha_1}\big((t-y)^s+|x-\xi|\big)^{-\omega_0}, \tag{21}$$

де $\{\alpha,s\}\subset(0,1)$ (α, s — параметри з нерівності (12)), $\alpha_1=\alpha+s\gamma$, внаслідок обмеження $s<1/\omega$ справджується нерівність $0<1-\alpha_1<1$. Вказані нерівності випливають з оцінки (13) та властивостей оператора узагальненого зсуву аргументу. За відповідною теоремою з математичного аналізу одержимо, що функція $J(\tau,t,x)$ є диференційовною по t, при цьому справджується рівність (18).

Для обґрунтування (19) введемо позначення $\omega_h(\tau,t,\sigma):=F^{-1}_{B_{\nu,x\to\sigma}}\big[J_h(\tau,t,x)\big]$, $\tilde\omega(\tau,t,\sigma):=$ $:=F^{-1}_{B_{\nu,x\to\sigma}}\big[J(\tau,t,x)\big]$. Доведемо, що ω_h та $\tilde\omega$, як функції σ, належать до простору $\theta^0_{M,\rho,a}$, який є поповненням простору $\theta_{M,\rho,a}$ за нормою $\|\cdot\|_{0,a}$. Із властивостей функції $a(t,x,\sigma)$ випливає, що ця функція, як функція σ (при фіксованих t, x), є мультиплікатором у просторі $\theta^0_{M,\rho,a}$. Розглянемо оператор $\overline{A}\colon\theta^0_{M,\rho,a}\to\theta^0_{M,\rho,a}$, який визначається співвідношенням $\overline{A}\psi=$ $=a(t,x,\sigma)\psi(\sigma)$ $\forall\psi\in\theta^0_{M,\rho,a}$. Цей оператор є лінійним і неперервним як мультиплікатор, що діє з простору $\theta^0_{M,\rho,a}$ у простір $\theta^0_{M,\rho,a}$. Із властивості неперервності оператора $\overline{A}$ випливає граничне співвідношення $\overline{A}\omega_h\to\overline{A}\tilde\omega$ при $h\to 0$ у просторі $\theta^0_{M,\rho,a}$. З властивості неперервності перетворення Бесселя (прямого та оберненого) маємо

$$F_{B_\nu}[\,\overline{A}\omega_h] = AJ_h \underset{h\to 0}{\longrightarrow} F_{B_\nu}[\,\overline{A}\tilde{\omega}] = AJ.$$

З іншого боку,

$$AJ_h(\tau,t,x) = \int\limits_{\tau}^{t-h} dy \int\limits_{0}^{\infty} AT_x^\xi G(t-y,x;y,\xi)\varphi(y,\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi.$$

З властивості єдиності границі випливає співвідношення (19).

Врахувавши (18), (19), знайдемо, що при вказаних обмеженнях на функцію φ правильною є формула

$$LJ(\tau,t,x) = \int\limits_{\tau}^{t} dy \int\limits_{0}^{\infty} LT_x^\xi G(t-y,x;y,\xi)\varphi(y,\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi + \varphi(t,x). \tag{22}$$

Перейдемо до побудови фундаментального розв'язку багатоточкової задачі для рівняння (4); цей розв'язок шукаємо у вигляді суми $Z(t,x;\tau,\xi) = T_x^\xi G(t-\tau,x;\tau,\xi) + W(t,x;\tau,\xi)$, де

$$W(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} dy \int\limits_{0}^{\infty} T_x^\xi G(t-y,x;y,\eta)\Phi(y,\eta;\tau,\xi)\eta^{2\nu+1}d\eta, \tag{23}$$

G — функція, визначена раніше. Функцію $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ підберемо так, щоб Z, як функція t, x, задовольняла рівняння (4). Застосувавши до Z оператор L та врахувавши при цьому формулу (21), переконаємося, що це буде тоді й лише тоді, коли

$$\Phi(t,x;\tau,\xi) = K(t-\tau,x;\tau,\xi) + \int\limits_{\tau}^{t} dy \int\limits_{0}^{\infty} K(t-y,x;y,\eta)\Phi(y,\eta;\tau,\xi)\eta^{2\nu+1}d\eta, \tag{24}$$

де $K(t-\tau,x;\tau,\xi) = -LT_x^\xi G(t-\tau,x;\tau,\xi)$. Ряд

$$\Phi(t,x;\tau,\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(t-\tau,x;\tau,\xi), \quad K_1 = K, \tag{25}$$

$$K_m(t-\tau,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} dy \int\limits_{0}^{\infty} K(t-y,x;y,\eta)K_{m-1}(y-\tau,\eta;\tau,\xi)\eta^{2\nu+1}d\eta,$$

є формальним розв'язком інтегрального рівняння (24). Ряд (25) дослідимо на абсолютну та рівномірну збіжність при $0 < \delta_0 \le t-\tau \le T$. Для обґрунтування збіжності цього ряду проведемо оцінювання повторних ядер K_m. Для $|K_1| = |LT_x^\xi G|$ справджується нерівність

$$\big|K_1(t-\tau,x;\tau,\xi)\big| \le \tilde{c}_0(t-\tau)^{1-\alpha_1}\big((t-\tau)^s + |x-\xi|\big)^{-\omega_0},$$

яка випливає з вигляду оператора L та (21). Для оцінки повторних ядер K_m, $m \ge 2$, введемо позначення

$$d_0(t,x;\tau,\xi) \equiv d_0 := (t-\tau)^s + |x-\xi|, \qquad d_1(t,x;y,\eta) \equiv d_1 := (t-y)^s + |x-\eta|,$$

$$d_2(y,\eta;\tau,\xi) \equiv d_2 := (y-\tau)^s + |\eta - \xi|, \qquad \Pi := \big\{(y,\eta)\colon \tau \le y \le t, \eta \in \mathbb{R}\big\},$$

$$J = \int\limits_{\Pi} (t-y)^a (y-\tau)^c (d_1 d_2)^{-(2\nu+2+b)} \eta^{2\nu+1} dy d\eta, \qquad 2\nu+1 = 2n+2,$$

де $b > 0$, $a+1 > sb$, $c+1 > sb$. Тоді, як випливає з результатів, одержаних в [21], для інтеграла J правильною є оцінка

$$J \le c d_0^{-(2\nu+2+b)} (t-\tau)^{a-sb+c+1} B(1+a-sb, 1+c-sb), \tag{26}$$

де $B(\cdot,\cdot)$ — бета-функція.

Оцінимо ядро

$$K_2(t-\tau, x;\tau,\xi) = \frac{1}{2}\int\limits_{\tau}^{t} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t-y,x;y,\eta) K_1(y-\tau,\eta;\tau,\xi)\eta^{2\nu+1} d\eta,$$

врахувавши при цьому нерівність (26):

$$\big|K_2(t-\tau,x;\tau,\xi)\big| \le \frac{1}{2}\int\limits_{\tau}^{t} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big|K(t-y,x;y,\eta)\big|\,\big|K_1(y-\tau,\eta;\tau,\xi)\big|\eta^{2\nu+1}d\eta \le$$

$$\le \frac{\tilde{c}_0^2}{2}\int\limits_{\tau}^{t} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-y)^{1-\alpha_1}(y-\tau)^{1-\alpha_1}\eta^{2\nu+1}}{\big((t-y)^s + |x-\eta|\big)^{2\nu+2+b}\big((y-\tau)^s + |\eta-\xi|\big)^{2\nu+2+b}} d\eta =$$

$$= c_0' \int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-y)^{1-\alpha_1}(y-\tau)^{1-\alpha_1}}{(d_1 d_2)^{2\nu+2+b}} \eta^{2\nu+1} dy d\eta, \qquad b = \big[[\gamma]/\beta\big], \qquad c_0' = \frac{\tilde{c}_0}{2}.$$

Застосувавши оцінку (26) при вказаному b, $a = c = 1-\alpha_1$, знайдемо

$$\big|K_2(t-\tau,x;\tau,\xi)\big| \le {c_0'}^2 B(l,l)(t-\tau)^{2(1-\alpha_1)-sb+1}\big((t-\tau)^s + |x-\xi|\big)^{-(2\nu+2+b)} =$$

$$= {c_0'}^2 (t-\tau)^{1-\alpha_1}(t-\tau)^l B(l,l)\big((t-\tau)^s + |x-\xi|\big)^{-(2\nu+2+b)}, \qquad l = 2-\alpha_1-sb.$$

Зазначимо, що при вказаних обмеженнях на параметри α_1, s справджуються нерівності $a+1 > sb$, $c+1 > sb$, при виконанні яких можна застосувати оцінку (26). Справді, доведемо, що $a > sb$ (тоді й $a+1 > sb$, де $a = 1-\alpha_1$). Отже,

$$a - sb = 1-\alpha_1 - sb = 1 - \alpha - s\gamma - sb = 1 - s\Big(\big(\nu + 32 + \big[[\gamma]/\beta\big]\big)\gamma - \big[[\gamma]/\beta\big]\Big) -$$

$$- s\gamma - sb = 1 - s\Big(\big(\nu + 3/2 + \big[[\gamma]/\beta\big]\big)\gamma - \big[[\gamma]/\beta\big] + \gamma + \big[[\gamma]/\beta\big]\Big) =$$

$$= 1 - s\Big(\nu + 5/2 + \big[[\gamma]/\beta\big]\Big)\gamma \equiv 1 - s\omega > 0.$$

Далі, за допомогою методу математичної індукції, застосовуючи нерівність (26), встановлюємо, що для повторного ядра K_m справджується нерівність

$$\big|K_m(t-\tau,x;\tau,\xi)\big| \le {c_0'}^m(t-\tau)^{1-\alpha_1}(t-\tau)^{l(m-1)}\times$$

$$\times B(l,l)B(l,2l)\dots B\big(l,(m-1)l\big)\big((t-\tau)^s+|x-\xi|\big)^{-(2\nu+2+b)}. \tag{27}$$

Врахувавши, що $B(z,\omega)=\Gamma(z)\Gamma(\omega)/\Gamma(z+\omega)$, нерівність (27) запишемо у вигляді

$$\big|K_m(t-\tau,x;\tau,\xi)\big| \le N^m(t-\tau)^{1-\alpha_1}(t-\tau)^{l(m-1)}\frac{\Gamma^m(l)}{\Gamma(ml)}\times$$

$$\times\big((t-\tau)^s+|x-\xi|\big)^{-(2\nu+2+b)}, \qquad N=c_0'\tilde{T}^{-(1-\alpha_1)}, \quad \tilde{T}=\max\{1,T\}.$$

Таким чином, для ряду $\sum_{m=1}^{\infty}K_m$ правильною є оцінка

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty}K_m(t-\tau,x;\tau,\xi)\right| \le \sum_{m=1}^{\infty}\big|K_m(t-\tau,x;\tau,\xi)\big| \le$$

$$\le (t-\tau)^{1-\alpha_1}\big((t-\tau)^s+|x-\xi|\big)^{-\omega_0}\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{b}^m\frac{\Gamma^m(l)}{\Gamma(ml)}, \qquad \tilde{b}=N\tilde{T}^l.$$

Зазначимо, що збіжність ряду $\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{b}^m\Gamma^m(l)/\Gamma(ml)$ випливає з формули Стірлінга.

Отже, ряд $\sum_{m=1}^{\infty}K_m(t-\tau,x;\tau,\xi)$ збігається абсолютно і рівномірно при $0<\delta_0\le t-\tau\le \le T$, а його сума — функція $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ — при $t>\tau$ є неперервною функцією аргументів x,ξ і для неї справджується нерівність

$$\big|\Phi(t,x;\tau,\xi)\big| \le q_0(t-\tau)^{1-\alpha_1}\big((t-\tau)^s+|x-\xi|\big)^{-\omega_0}, \quad q_0>0. \tag{28}$$

Ця оцінка забезпечує збіжність інтегралів в (23) та (24). Звідси випливає, що Φ є розв'язком рівняння (24).

Врахувавши нерівності (20), (28) та (26), оцінимо функцію W. Отже,

$$\big|W(t,x;\tau,\xi)\big| \le \frac{1}{2}\int\limits_{\tau}^{t}dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\big|T_x^{\xi}G(t-y,x;y,\eta)\big|\,\big|\Phi(y,\eta;\tau,\xi)\big|\eta^{2\nu+1}d\eta \le$$

$$\le q_1\int\limits_{\tau}^{t}\frac{(t-y)^{1-\alpha_1}(y-\tau)^{1-\alpha_1}\eta^{2\nu+1}d\eta}{\big((t-y)^s+|x-\eta|\big)^{\omega_0}\big((y-\tau)^s+|\eta-\xi|\big)^{\omega_0}} \le$$

$$\le q_2(t-\tau)^{\tilde{\lambda}}\big((t-\tau)^s+|x-\xi|\big)^{-\omega_0}, \tag{29}$$

де $\tilde{\lambda}=3-2\alpha_1-sb$. Враховуючи обмеження на параметр s, безпосередньо переконуємося в тому, що $\tilde{\lambda}>0$.

Із оцінки (29) випливає, що для довільної обмеженої, неперервної, парної на $\mathbb{R}$ функції φ у фіксованій точці $x \in \mathbb{R}$ справджуються нерівності

$$\left|\int\limits_0^\infty W(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi\right| \leq \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\big|W(t,x;\tau,\xi)\big|\,\big|\varphi(\xi)\big|\xi^{2\nu+1}d\xi \leq$$

$$\leq q_3(t-\tau)^{\tilde{\lambda}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi}{\big((t-\tau)^s+|x-\xi|\big)^{1+[[\gamma]/\beta]}} = q_3(t-\tau)^{\tilde{\lambda}-s[[\gamma]/\beta]}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{\big(1+|z|\big)^{1+[[\gamma]/\beta]}} = q_3'(t-\tau)^p, \quad p=\tilde{\lambda}-s[[\gamma]/\beta]>0, \tag{30}$$

де $2\nu+1$ — парне натуральне число,

$$q_3' = q_3\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{\big(1+|z|\big)^{1+[[\gamma]/\beta]}}, \quad q_3=q_3(x)>0.$$

З нерівності (30) у кожній точці $x\in\mathbb{R}$ випливає граничне співвідношення

$$\lim_{t\to\tau+0}\int\limits_0^\infty W(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi = 0.$$

На підставі отриманих результатів можна стверджувати, що функція

$$Z(t,x;\tau,\xi)=V(t,x;\tau,\xi)+W(t,x;\tau,\xi), \qquad V(t,x;\tau,\xi)=T_x^\xi G(t-\tau,x;\tau,\xi),$$

є фундаментальним розв'язком нелокальної за часом m-точкової задачі для рівняння (4).

Під символом X розумітимемо нормований простір, який складається з неперервних, обмежених, парних на $\mathbb{R}$ функцій з нормою $\|\varphi\|=\sup_{x\in\mathbb{R}}\big|\varphi(x)\big|$.

Правильним є наступне основне твердження.

Теорема 1. *m-Точкова задача* (4)–(6) *з функцією $\varphi\in X$ та параметрами $\tau=0$ і $\mu>$ $>\mu_1+\ldots+\mu_m$ є розв'язною, розв'язок має вигляд*

$$u(t,x)=\int\limits_0^\infty V(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi+\int\limits_0^\infty W(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi = u_1(t,x)+u_2(t,x),$$

$$(t,x)\in(0,T]\times\mathbb{R},$$

при цьому $u(t,\cdot)\in C^1\big((0,T],X\big)$.

1. *Кочубей А. Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – **52**, № 5. – С. 909–934.
2. *Федер Е.* Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.

3. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 205 с.
4. *Городецький В. В., Ленюк О. М.* Еволюцiйнi рiвняння з псевдобесселевими операторами // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 11 – 15.
5. *Нахушев А. М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложении к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 1. – С. 72 – 81.
6. *Белавин И. А., Капица С. П., Курдюмов С. П.* Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1998. – **38**, № 6. – С. 885 – 902.
7. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
8. *Майков А. Р., Поезд А. Д., Якунин С. А.* Экономический метод вычисления нестационарных нелокальных по времени условий излучения для волновых систем // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1990. – **30**, № 8. – С. 1267 – 1271.
9. *Алексеева С. М., Юрчук Н. И.* Метод квазиобращения для задачи управления начальным условием для уравнения теплопроводности с интегральным краевым условием // Дифференц. уравнения. – 1998. – **34**, № 4. – С. 495 – 502.
10. *Дезин А. А.* Операторы с первой производной по „времени” и нелокальные граничные условия // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1967. – **31**, № 1. – С. 61 – 86.
11. *Мамян А. Х.* Общие граничные задачи в слое // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 2. – С. 292 – 296.
12. *Матiйчук М. I.* Параболiчнi сингулярнi крайовi задачi. – Київ: Iн-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
13. *Городецький В. В., Ленюк О. М.* Двоточкова задача для одного класу еволюцiйних рiвнянь // Мат. студ. – 2007. – **28**, № 2. – С. 175 – 182.
14. *Городецький В. В., Спiжавка Д. I.* Багатоточкова задача для еволюцiйних рiвнянь з псевдобесселевими операторами // Доп. НАН України. – 2009. – № 12. – С. 7 – 12.
15. *Мартинюк О. В.* Задача Кошi для сингулярних еволюцiйних рiвнянь у злiченно-нормованих просторах нескiнченно диференцiйовних функцiй. I // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. фiз.-мат. науки: Зб. наук. праць. – 2011. – Вип. 5. – С. 179 – 192.
16. *Мартинюк О. В.* Задача Кошi для сингулярних еволюцiйних рiвнянь у злiченно-нормованих просторах нескiнченно диференцiйовних функцiй. II // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. фiз.-мат. науки: Зб. наук. праць. – 2012. – Вип. 6. – С. 162 – 176.
17. *Левитан Б. И.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. – 1951. – **6**, вып. 2. – С. 102 – 143.
18. *Житомирский Я. И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя // Мат. сб. – 1955. – **36**, № 2. – С. 299 – 310.
19. *Мартинюк О. В., Городецький В. В.* Задача Кошi для сингулярних еволюцiйних рiвнянь з необмеженими за часом коефiцiєнтами // Доп. НАН України. – 2012. – № 2. – С. 19 – 23.
20. *Ленюк О. М.* Задача Кошi для еволюцiйних рiвнянь з псевдобесселевими операторами // Наук. вiсн. Чернiв. ун-ту: Зб. наук. праць. Математика. – 2007. – Вип. 349. – С. 55 – 65.
21. *Дринь Я. М.* Фундаментальное решение задачи Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1997. – № 3. – С. 198 – 203.

Одержано 07.07.12,
пiсля доопрацювання — 11.11.13