УДК 517.5

В. В. Миронюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ІЗ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ ЦІЛИМИ ФУНКЦІЯМИ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

We obtain the decomposition representation of the norm of functions of many variables from the spaces $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ and establish the exact order estimates for the approximations of functions from the unit balls of these spaces by entire functions of exponential type in the space $L_q(\mathbb{R}^d)$.

Получено декомпозиционное представление нормы функций многих переменных из пространств $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ и установлены точные по порядку оценки приближений функций из единичных шаров этих пространств целыми функциями экспоненциального типа в пространстве $L_q(\mathbb{R}^d)$.

Дану роботу присвячено дослідженню наближення ізотропних класів $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ функцій багатьох змінних у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q < \infty$. В якості апарату наближення використовуються цілі функції експоненціального типу. При цьому суттєве значення має так звана декомпозиційна теорема, яку доведено в другому пункті роботи.

1. Означення класів функцій та апроксимативних характеристик. Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, позначає d-вимірний евклідів простір з елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ і $L_q(\mathbb{R}^d)$ — простір вимірних і сумовних у степені q, $1 \leqslant q < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $q = \infty$), функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$. Норма у цьому просторі визначається таким чином:

$$\|f\|_q = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|^q d\boldsymbol{x} \right)^{1/q} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|^q dx_1 \ldots dx_d \right)^{1/q}, \quad 1 \leqslant q < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d} \big| f(\boldsymbol{x}) \big|.$$

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ і $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^d$ позначимо

$$\Delta_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})$$

і означимо кратну різницю порядку $l \in \mathbb{N}$ функції f у точці $\boldsymbol{x}$ з кроком $\boldsymbol{h}$ згідно з формулою

$$\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = \Delta_{\boldsymbol{h}} \Delta^{l-1}_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}), \qquad \Delta^0_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}).$$

Кратну різницю $\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x})$ також можна записати у вигляді

$$\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=0}^{l} (-1)^{j+l} C^j_l f(\boldsymbol{x} + j\boldsymbol{h}),$$

де C^j_l — біноміальні коефіцієнти.

Відштовхуючись від кратної різниці $\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f$, означимо модуль неперервності l-го порядку функції $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, який будемо позначати $\Omega_l(f,t)_q$, згідно з формулою

$$\Omega_l(f,t)_q = \sup_{|\boldsymbol{h}| \leqslant t} \left\| \Delta^l_{\boldsymbol{h}} f \right\|_q,$$

де $|\boldsymbol{h}| = \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_d^2}$ — евклідова норма вектора $\boldsymbol{h}$.

Нехай $\Omega(t)$ — функція типу модуля неперервності порядку l, тобто $\Omega(t)$ задовольняє такі умови:

1) $\Omega(0) = 0$, $\Omega(t) > 0$ для $t > 0$;

2) $\Omega(t)$ є неперервною на $\mathbb{R}_+$;

3) $\Omega(t)$ є неспадною на $\mathbb{R}_+$;

4) для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ $\Omega(nt) \leqslant Cn^l\Omega(t)$, де $C > 0$ не залежить від n і t.

Множину таких функцій Ω позначимо через Ψ_l.

Підпорядкуємо функції $\Omega \in \Psi_l$ додатковим умовам, які опишемо в термінах двох понять, уведених С. Н. Бернштейном [1]:

а) невід'ємна функція $\varphi(\tau)$, $\tau \in [0;\infty)$, майже зростає, якщо існує стала $C_1 > 0$ така, що $\varphi(\tau_1) \leqslant C_1\varphi(\tau_2)$ для будь-яких τ_1, τ_2, $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2$;

б) додатна функція $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0;\infty)$, майже спадає, якщо існує стала $C_2 > 0$ така, що $\varphi(\tau_1) \geqslant C_2\varphi(\tau_2)$ для будь-яких τ_1, τ_2, $0 < \tau_1 < \tau_2$.

Будемо вважати, що Ω задовольняє умови (S) та (S_l), які в літературі називають умовами Барі – Стєчкіна [2]. Це означає наступне:

I) функція Ω задовольняє умову (S) з $\alpha > 0$, якщо $\dfrac{\Omega(\tau)}{\tau^\alpha}$ майже зростає при $\tau > 0$;

II) функція Ω задовольняє умову (S_l), якщо існує γ, $0 < \gamma < l$, таке, що $\dfrac{\Omega(\tau)}{\tau^\gamma}$ майже спадає при $\tau > 0$.

У випадку, коли для Ω виконується умова (S), будемо говорити, що Ω належить множині S^α, а якщо виконується умова (S_l), — множині S_l. Покладемо також $\Phi_{\alpha,l} = \Psi_l \cap S^\alpha \cap S_l$.

Зазначимо, що функції $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha < l$, можуть мати, наприклад, вигляд

$$\Omega(t) = \begin{cases} t^r \left(\log_2^+ \dfrac{1}{t}\right)^\beta, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

де $\log_2^+ t = \max\{1, \log_2 t\}$, $\alpha < r < l$, а β — фіксоване дійсне число.

Для $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$ і заданої функції Ω типу модуля неперервності порядку l простір $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ визначається таким чином:

$$B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d) = \Big\{ f \in L_p(\mathbb{R}^d) \colon \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} := \|f\|_p + |f|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} < \infty \Big\},$$

де

$$|f|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, & 1 \leqslant \theta < \infty, \\ \displaystyle\sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}, & \theta = \infty. \end{cases}$$

Простір $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ — лінійний нормований простір із нормою

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_p + |f|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}.$$

Якщо $\Omega(t) = t^r$, $0 < r < l$, то простори $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ збігаються з просторами О. В. Бєсова $B^{r}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ [3] і, зокрема, при $\theta = \infty$ та $\Omega(t) = t^r$ $B^{r}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d) \equiv H^r_p(\mathbb{R}^d)$, де $H^r_p(\mathbb{R}^d)$ — простори, введені С. М. Нікольським [4]. Таким чином, простори $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ є узагальненням (за гладкісним параметром) відомих просторів Нікольського – Бєсова.

Далі, якщо не стверджується інше, під поняттям „класи $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$" будемо розуміти одиничні кулі у просторі $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, тобто клас $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d) := \left\{f \in L_p(\mathbb{R}^d)\colon \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1\right\}$.

Для того щоб визначити апроксимативні характеристики, які будуть досліджуватись у роботі, нагадаємо поняття перетворення Фур'є функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, а також цілої функції експоненціального типу.

Нехай $S = S(\mathbb{R}^d)$ — простір Л. Шварца основних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^d$ комплекснозначних функцій φ, що спадають на нескінченності разом зі своїми похідними швидше за будь-який степінь $|\boldsymbol{x}|^{-1}$ (див., наприклад, [5], гл. 2). Через S' позначимо простір лінійних неперервних функціоналів на S. Зазначимо, що елементами простору S' є узагальнені функції. Якщо $f \in S'$ і $\varphi \in S$, то $\langle f, \varphi\rangle$ позначає значення f на φ.

Перетворення Фур'є $\mathfrak{F}\varphi\colon S \to S$ визначається за формулою

$$(\mathfrak{F}\varphi)(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{t})} d\boldsymbol{t} \equiv \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{\lambda}),$$

де $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$, $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d)$ і $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t}) = \sum_{j=1}^d \lambda_j t_j$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^d$ векторів $\boldsymbol{\lambda}$ і $\boldsymbol{t}$.

Обернене перетворення Фур'є $\mathfrak{F}^{-1}\varphi\colon S \to S$ задається таким чином:

$$(\mathfrak{F}^{-1}\varphi)(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{\lambda}) e^{i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{t})} d\boldsymbol{\lambda} \equiv \widehat{\varphi}(\boldsymbol{t}).$$

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in S'$ (для нього ми зберігаємо те ж позначення) визначається згідно з формулою

$$\langle \mathfrak{F} f, \varphi\rangle = \langle f, \mathfrak{F}\varphi\rangle \qquad (\text{або } \langle \widetilde{f}, \varphi\rangle = \langle f, \widetilde{\varphi}\rangle),$$

де $\varphi \in S$.

Обернене перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in S'$ також позначимо через $\mathfrak{F}^{-1}f$. Визначається воно аналогічно до прямого перетворення Фур'є за правилом

$$\langle \mathfrak{F}^{-1} f, \varphi\rangle = \langle f, \mathfrak{F}^{-1}\varphi\rangle \qquad (\text{або } \langle \widehat{f}, \varphi\rangle = \langle f, \widehat{\varphi}\rangle).$$

Зазначимо, що кожна функція $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, визначає лінійний неперервний функціонал на S

$$\langle f, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}, \quad \varphi \in S,$$

і, як наслідок, у цьому сенсі є елементом S'. Тому перетворення Фур'є функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, можна розглядати, як перетворення Фур'є узагальненої функції $\langle f, \varphi\rangle$.

Носієм узагальненої функції f будемо називати замикання $\overline{\mathfrak{N}}$ такої множини точок $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^d$, що для довільної $\varphi \in S$, яка дорівнює нулю в $\overline{\mathfrak{N}}$, виконується рівність $\langle f, \varphi \rangle = 0$. Носій узагальненої функції f позначатимемо через $\operatorname{supp} f$. Також говоритимемо, що функція f зосереджена у множині G, якщо $\operatorname{supp} f \subseteq G$.

Функцію

$$g = g_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{z}) = g_{\nu_1,\ldots,\nu_d}(z_1, \ldots, z_d),$$

де $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_d) \in \mathbb{R}^d_+$ — невід'ємний вектор, називають цілою функцією експоненціального типу степенів $\nu_1, \ldots, \nu_d$ по змінних $z_1, \ldots, z_d$ відповідно (див., наприклад, [6, с. 118]), якщо вона має такі властивості:

1) є цілою функцією за всіма змінними, тобто розкладається у кратний степеневий ряд

$$g(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d_+} a_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{k}} = \sum_{\substack{k_j \in \mathbb{Z}_+ \\ j=\overline{1,d}}} a_{k_1,\ldots,k_d} z_1^{k_1} \ldots z_d^{k_d}$$

зі сталими коефіцієнтами $a_{\boldsymbol{k}} = a_{k_1,\ldots,k_d}$, який абсолютно збігається для всіх комплексних $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_d)$;

2) для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує додатне число C_ε таке, що для всіх комплексних $z = (z_1, \ldots, z_d)$ виконується нерівність

$$|g(\boldsymbol{z})| \leqslant C_\varepsilon \exp \sum_{j=1}^{d} (\nu_j + \varepsilon)|z_j|.$$

Далі, нехай $A_{2^s} = \left\{ \boldsymbol{\lambda} \colon -2^s \leqslant \lambda_j \leqslant 2^s,\ j = \overline{1,d} \right\},\ s \in \mathbb{Z}_+$; χ_A — характеристична функція множини A; D_m, $m \in \mathbb{N}$, — ядро Діріхле вигляду

$$D_m(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \frac{\sin m x_j}{x_j}.$$

Тоді для $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, покладемо

$$S_{2^s}[f, \boldsymbol{x}] = \frac{1}{\pi^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{t}) D_{2^s}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t},$$

$$f_{(0)} = S_{2^0}[f], \qquad f_{(s)} = S_{2^s}[f] - S_{2^{s-1}}[f], \qquad \text{якщо} \quad s \in \mathbb{N}.$$

Зазначимо, що у термінах перетворень Фур'є функцію $S_{2^s}[f]$ можна записати таким чином:

$$S_{2^s}[f] = \mathfrak{F}^{-1} \left(\chi_{A_{2^s}} \mathfrak{F} f \right).$$

Дійсно, оскільки справджується рівність (див., наприклад, [6, с. 359])

$$\chi_{A_{2^s}} = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{d/2} \mathfrak{F} D_{2^s}\,,$$

то

$$\mathfrak{F}^{-1}\left(\chi_{A_{2^s}}\mathfrak{F}f\right)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{d/2}\mathfrak{F}^{-1}\left(\mathfrak{F}f\cdot\mathfrak{F}D_{2^s}\right)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{d/2}\mathfrak{F}^{-1}\big(\mathfrak{F}(f*D_{2^s})\big)=$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{d/2}\langle f*D_{2^s},\varphi\rangle=\left\langle\frac{1}{\pi^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}f(\boldsymbol{t})D_{2^s}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t},\varphi\right\rangle=\big\langle S_{2^s}[f],\varphi\big\rangle.$$

Зауважимо також, що $f_{(s)}$ — цілі функції експоненціального типу степенів 2^s по кожній змінній, які належать $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1<p<\infty$ (див., наприклад, [7]), причому перетворення Фур'є $f_{(s)}$ зосереджене в $\left\{\boldsymbol{\lambda}\colon 2^{s-1}\leqslant\max_{j=\overline{1,d}}|\lambda_j|\leqslant 2^s\right\}$ і збігається там з $\widetilde{f}$. Крім того, в сенсі збіжності у метриці простору $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1<p<\infty$, справджується рівність

$$f=\sum_{s=0}^{\infty}f_{(s)}.$$

Тепер визначимо апроксимативні характеристики, які будуть досліджуватись у роботі.

Для $f\in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1<q<\infty$, розглянемо частинну суму порядку n вигляду

$$S_n(f)=\sum_{s=0}^{n}f_{(s)}$$

і позначимо

$$\mathcal{E}_n(f)_q=\big\|f-S_n(f)\big\|_q.$$

Якщо $K\subset L_q(\mathbb{R}^d)$ — деякий функціональний клас, то

$$\mathcal{E}_n(K)_q=\sup_{f\in K}\mathcal{E}_n(f)_q. \tag{1}$$

Нехай далі

$$G_q(A_{2^n})=\big\{g\in L_q(\mathbb{R}^d)\colon \operatorname{supp}\mathfrak{F}g\subseteq A_{2^n}\big\},\quad n\in\mathbb{Z}_+,$$

— множина цілих функцій експоненціального типу, які належать $L_q(\mathbb{R}^d)$ і носій перетворення Фур'є яких міститься в A_{2^n}. Тоді для $f\in L_q(\mathbb{R}^d)$ покладемо

$$E_n(f)_q=\inf_{g\in G_q(A_{2^n})}\|f-g\|_q.$$

Дана величина називається найкращим наближенням функції f у метриці простору $L_q(\mathbb{R}^d)$ функціями з $G_q(A_{2^n})$. Відповідно, для функціонального класу $K\subset L_q(\mathbb{R}^d)$ покладемо

$$E_n(K)_q=\sup_{f\in K}E_n(f)_q. \tag{2}$$

Зауважимо, що при $1<q<\infty$ має місце співвідношення (див., наприклад, [8])

$$E_n(f)_q\asymp\mathcal{E}_n(f)_q. \tag{3}$$

Тут і далі запис $A\asymp B$ означає, що існують додатні сталі C_3 та C_4, які не залежать від одного істотного по контексту параметра у величинах A та B (наприклад, у співвідношенні (3) — від функції f) і такі, що $C_3 A \leqslant B \leqslant C_4 A$. Якщо тільки $B \leqslant C_4 A$ ($B \geqslant C_3 A$), то пишемо $B \ll A$ ($B \gg A$).

2. Декомпозиційне зображення норми функцій із просторів $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{\Omega}}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\theta}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{d}})$. В цьому пункті встановимо еквівалентне з точністю до абсолютних сталих зображення норми функцій із просторів $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$. Таке зображення, яке в математичній літературі називають декомпозиційним, буде використовуватися при дослідженні апроксимативних характеристик.

При доведенні основного результату нам будуть потрібні два допоміжні твердження.

Теорема А (див., наприклад, [6, с. 138]). *Нехай g — ціла функція експоненціального типу степенів 2^s по кожній змінній, яка належить простору $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тоді виконується нерівність*

$$\left\| \frac{\partial^{\|\boldsymbol{\alpha}\|_1} g(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}} \right\|_p \leqslant 2^{s\|\boldsymbol{\alpha}\|_1} \|g\|_p \,, \tag{4}$$

де $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d_+$, $\|\boldsymbol{\alpha}\|_1 = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$.

Нерівність (4) називають нерівністю Бернштейна для цілих функцій експоненціального типу.

Лема А (див., наприклад, [6, с. 131, 221]). *Для функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, має місце порядкова нерівність*

$$E_s(f)_p \ll \Omega_l(f, 2^{-s})_p \,, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Зауважимо, що з означення просторів $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ випливає, що для $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ $\Omega_l(f, 2^{-s})_p \to$ $\to 0$ і, отже, за лемою А $E_s(f)_p \to 0$ при $s \to \infty$.

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $1 \leqslant p \leqslant \infty$ і $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{N}$. Функція f належить простору $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, тоді і тільки тоді, коли вона зображується збіжним у метриці $L_p(\mathbb{R}^d)$ рядом*

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} Q_s, \tag{5}$$

де Q_s — цілі функції експоненціального типу степенів не вище 2^s по кожній змінній, для яких виконуються умови

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|Q_s\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} < \infty, \qquad \text{якщо} \quad 1 \leqslant \theta < \infty, \tag{6}$$

і

$$\sup_{s \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|Q_s\|_p}{\Omega(2^{-s})} < \infty, \qquad \text{якщо} \quad \theta = \infty. \tag{7}$$

Більше того, мають місце співвідношення

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \ll \left(\sum_{s=0}^{\infty} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|Q_s\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} \qquad \text{при} \quad 1 \leqslant \theta < \infty \tag{8}$$

і

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \ll \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} \frac{\|Q_s\|_p}{\Omega(2^{-s})} \quad \textit{при} \quad \theta=\infty. \tag{9}$$

Якщо ж, крім цього, частинні суми n-го порядку ряду (5) *реалізують найкраще наближення* $E_n(f)_p$ (*або принаймні його порядок*), *то*

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{s=0}^{\infty} \Omega^{-\theta}(2^{-s})\|Q_s\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta} \qquad \textit{при} \quad 1\leqslant\theta<\infty \tag{10}$$

і

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} \frac{\|Q_s\|_p}{\Omega(2^{-s})} \qquad \textit{при} \quad \theta=\infty. \tag{11}$$

Доведення. *Необхідність*. Нехай f належить простору $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ і ціла функція g_s експоненціального типу степенів не вище 2^s по кожній змінній реалізує найкраще наближення $E_s(f)_p$. Покладемо

$$Q_0=g_0, \qquad Q_s=g_s-g_{s-1}, \quad s=1,2,\ldots .$$

Зрозуміло, що тоді Q_s — цілі функції експоненціального типу степенів не вище 2^s по кожній змінній, причому в сенсі збіжності у метриці простору $L_p(\mathbb{R}^d)$ справджується рівність

$$f=\sum_{s=0}^{\infty} Q_s.$$

Встановимо далі нерівності (6) та (7). Враховуючи лему A, отримуємо

$$\|Q_0\|_p=\|g_0-f+f\|_p\leqslant\|g_0-f\|_p+\|f\|_p\ll\|f\|_p\,,$$

$$\|Q_s\|_p=\|g_s-g_{s-1}\|_p\leqslant\|g_s-f\|_p+\|f-g_{s-1}\|_p\ll E_{s-1}(f)_p\ll$$

$$\ll\Omega_l(f,2^{-s+1})_p\ll\Omega_l(f,t)_p\,, \qquad t\in(2^{-s};2^{-s+1}), \quad s\in\mathbb{N}.$$

Звідси, беручи до уваги нерівність $(a+b)^{\eta}\leqslant 2^{\eta}(a^{\eta}+b^{\eta})$, де $a\geqslant0$, $b\geqslant0$, $\eta>0$, маємо

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{\|Q_s\|_p}{\Omega(2^{-s})}\right)^{\theta}\right)^{1/\theta} \ll \left(\|Q_0\|_p^{\theta}+\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{\|Q_s\|_p}{\Omega(2^{-s})}\right)^{\theta}\int\limits_{2^{-s}}^{2^{-s+1}}\frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll\left(\|f\|_p^{\theta}+\sum_{s=1}^{\infty}\int\limits_{2^{-s}}^{2^{-s+1}}\left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}\right)^{\theta}\frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll\|f\|_p+\left(\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}\right)^{\theta}\frac{dt}{t}\right)^{1/\theta}=\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)}<\infty, \quad 1\leqslant\theta<\infty, \tag{12}$$

і

$$\sup_{s\in\mathbb{Z}_+}\frac{\|Q_s\|_p}{\Omega(2^{-s})}\ll\|f\|_p+\sup_{t>0}\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}=\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)}<\infty,\quad\theta=\infty. \tag{13}$$

Необхідність доведено.

Достатність. Достатньо показати справедливість співвідношень (8) та (9).

Нехай спочатку $1\leqslant\theta<\infty$. Тоді за допомогою елементарних перетворень можемо записати

$$\int\limits_0^1\left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}\right)^{\theta}\frac{dt}{t}=\ln 2\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{\Omega_l(f,2^{-u})_p}{\Omega(2^{-u})}\right)^{\theta}du=$$

$$=\ln 2\sum_{N=0}^{\infty}\int\limits_N^{N+1}\left(\frac{\Omega_l(f,2^{-u})_p}{\Omega(2^{-u})}\right)^{\theta}du\ll\sum_{N=0}^{\infty}\left(\frac{\Omega_l(f,2^{-N})_p}{\Omega(2^{-N})}\right)^{\theta}. \tag{14}$$

Далі, оскільки

$$f=\sum_{s=0}^{\infty}Q_s,$$

то

$$\Omega_l\big(f,2^{-N}\big)_p\leqslant\sum_{s=0}^{\infty}\Omega_l\left(Q_s,2^{-N}\right)_p. \tag{15}$$

Зауважимо, що за допомогою методу математичної індукції по l можна отримати рівність

$$\Delta^l_{\boldsymbol{h}}Q_s(\boldsymbol{x})=\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1\left(\boldsymbol{h}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\right)^l Q_s\left(\boldsymbol{x}+\sum_{j=1}^{l}t_j\boldsymbol{h}\right)dt_1\ldots dt_l, \tag{16}$$

де $\boldsymbol{h}=(h_1,\ldots,h_d)\in\mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{h}\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}=h_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+h_d\dfrac{\partial}{\partial x_d}$.

Застосовуючи послідовно співвідношення (16), узагальнену нерівність Мінковського (див., наприклад, [6, с. 32]) та нерівність Бернштейна (4), маємо

$$\Omega_l\big(Q_s,2^{-N}\big)_p=\sup_{|\boldsymbol{h}|\leqslant 2^{-N}}\|\Delta^l_{\boldsymbol{h}}Q_s\|_p=$$

$$=\sup_{|\boldsymbol{h}|\leqslant 2^{-N}}\left\|\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1\left(\boldsymbol{h}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\right)^l Q_s\left(\boldsymbol{x}+\sum_{j=1}^{l}t_j\boldsymbol{h}\right)dt_1\ldots dt_l\right\|_p\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{|\boldsymbol{h}|\leqslant 2^{-N}}\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1\left\|\left(\boldsymbol{h}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\right)^l Q_s\left(\boldsymbol{x}+\sum_{j=1}^{l}t_j\boldsymbol{h}\right)\right\|_p dt_1\ldots dt_l\ll$$

$$\ll \sup_{|\boldsymbol{h}|\leqslant 2^{-N}} \sum_{\|\boldsymbol{\alpha}\|_1=l} |h_1|^{\alpha_1}\ldots|h_d|^{\alpha_d} \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \left\| \frac{\partial^{\|\boldsymbol{\alpha}\|_1} Q_s\left(\boldsymbol{x}+\sum_{j=1}^{l} t_j \boldsymbol{h}\right)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_d^{\alpha_d}} \right\|_p dt_1\ldots dt_l \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\|\boldsymbol{\alpha}\|_1=l} 2^{-N\|\boldsymbol{\alpha}\|_1} \left\| \frac{\partial^{\|\boldsymbol{\alpha}\|_1} Q_s(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_d^{\alpha_d}} \right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\|\boldsymbol{\alpha}\|_1=l} 2^{(s-N)\|\boldsymbol{\alpha}\|_1} \|Q_s\|_p \ll 2^{(s-N)l} \|Q_s\|_p\,, \quad s\leqslant N, \tag{17}$$

де $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)\in\mathbb{Z}_+^d$, $\|\boldsymbol{\alpha}\|_1=\alpha_1+\ldots+\alpha_d$.

Якщо $s>N$, то

$$\Omega_l(Q_s, 2^{-N})_p \ll \|Q_s\|_p\,. \tag{18}$$

Тепер, беручи до уваги (15), (17) та (18), отримуємо

$$\sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{\Omega_l(f,2^{-N})_p}{\Omega(2^{-N})}\right)^{\theta} \ll$$

$$\ll \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\Omega(2^{-N})}\right)^{\theta} \left(\sum_{s=0}^{N} 2^{(s-N)l}\|Q_s\|_p + \sum_{s=N+1}^{\infty}\|Q_s\|_p\right)^{\theta} \ll$$

$$\ll \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\Omega(2^{-N})}\right)^{\theta} \left(\sum_{s=0}^{N} 2^{(s-N)l}\|Q_s\|_p\right)^{\theta} + \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\Omega(2^{-N})}\right)^{\theta} \left(\sum_{s=N+1}^{\infty}\|Q_s\|_p\right)^{\theta} =$$

$$= I_1 + I_2. \tag{19}$$

Оцінимо далі кожен із отриманих доданків у (19). Виберемо $\beta>0$ і $\gamma>0$ таким чином, щоб $\gamma+\beta<l$. Тоді згідно з нерівністю Гельдера (з відповідною модифікацією при $\theta=1$) будемо мати

$$I_1 = \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\Omega(2^{-N})}\right)^{\theta} \left(\sum_{s=0}^{N} 2^{(s-N)\beta} 2^{(s-N)(l-\beta)}\|Q_s\|_p\right)^{\theta} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\Omega(2^{-N})}\right)^{\theta} \left(\sum_{s=0}^{N} 2^{(s-N)\beta\theta'}\right)^{\theta/\theta'} \left(\sum_{s=0}^{N} 2^{(s-N)(l-\beta)\theta}\|Q_s\|_p^{\theta}\right)^{\theta/\theta} \ll$$

$$\ll \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{N} \left(\frac{2^{(s-N)(l-\beta)}}{\Omega(2^{-N})}\right)^{\theta} \|Q_s\|_p^{\theta} = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{N=s}^{\infty} \left(\frac{2^{(s-N)(l-\beta)}}{\Omega(2^{-N})}\right)^{\theta} \|Q_s\|_p^{\theta}, \tag{20}$$

де $\dfrac{1}{\theta}+\dfrac{1}{\theta'}=1$.

Далі, згідно з умовою (S_l), можемо записати

$$\frac{1}{\Omega(2^{-N})} \ll \frac{2^{(N-s)\gamma}}{\Omega(2^{-s})}, \quad N \geqslant s,$$

і тому, відповідно до (20),

$$I_1 \ll \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{N=s}^{\infty} \left(\frac{2^{(s-N)(l-\beta)}}{\Omega(2^{-N})} \right)^{\theta} \|Q_s\|_p^{\theta} \ll \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\|Q_s\|_p}{\Omega(2^{-s})} \right)^{\theta}. \tag{21}$$

Тепер перейдемо до оцінювання величини I_2. Нехай $0 < \delta < \alpha$. Тоді знову, використовуючи нерівність Гельдера (з відповідною модифікацією при $\theta = 1$), будемо мати

$$I_2 = \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\Omega(2^{-N})} \right)^{\theta} \left(\sum_{s=N+1}^{\infty} 2^{(N-s)\delta} 2^{(s-N)\delta} \|Q_s\|_p \right)^{\theta} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\Omega(2^{-N})} \right)^{\theta} \left(\sum_{s=N+1}^{\infty} 2^{(N-s)\delta\theta'} \right)^{\theta/\theta'} \left(\sum_{s=N+1}^{\infty} 2^{(s-N)\delta\theta} \|Q_s\|_p^{\theta} \right)^{\theta/\theta} \ll$$

$$\ll \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{s=N+1}^{\infty} \left(\frac{2^{(s-N)\delta}}{\Omega(2^{-N})} \right)^{\theta} \|Q_s\|_p^{\theta} = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{N=0}^{s-1} \left(\frac{2^{(s-N)\delta}}{\Omega(2^{-N})} \right)^{\theta} \|Q_s\|_p^{\theta}, \tag{22}$$

де $\dfrac{1}{\theta} + \dfrac{1}{\theta'} = 1$.

Далі, згідно з умовою (S) з $\alpha > 0$, можемо записати

$$\frac{1}{\Omega(2^{-N})} \ll \frac{2^{(N-s)\alpha}}{\Omega(2^{-s})}, \quad N < s,$$

і тому, відповідно до (22),

$$I_2 \ll \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{N=0}^{s-1} \left(\frac{2^{(s-N)\delta}}{\Omega(2^{-N})} \right)^{\theta} \|Q_s\|_p^{\theta} \ll \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\|Q_s\|_p}{\Omega(2^{-s})} \right)^{\theta}. \tag{23}$$

Отже, враховуючи (14), (19), (21) та (23), отримуємо

$$\int_0^1 \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \frac{dt}{t} \ll \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\|Q_s\|_p}{\Omega(2^{-s})} \right)^{\theta}. \tag{24}$$

Для подальших міркувань оцінимо зверху $\|f\|_p$ та $\displaystyle\int_1^{\infty} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \frac{dt}{t}$.

Використовуючи нерівність Гельдера (з відповідною модифікацією при $\theta = 1$) та умову (S) з $\alpha > 0$, маємо

$$\|f\|_p \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} \|Q_s\|_p \ll \left(\sum_{s=0}^{\infty} \Omega^{\theta'}(2^{-s}) \right)^{1/\theta'} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\|Q_s\|_p}{\Omega(2^{-s})} \right)^{\theta} \right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{-s\alpha\theta'}\right)^{1/\theta'} \left(\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{\|Q_s\|_p}{\Omega(2^{-s})}\right)^{\theta}\right)^{1/\theta} \ll \left(\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{\|Q_s\|_p}{\Omega(2^{-s})}\right)^{\theta}\right)^{1/\theta}. \tag{25}$$

Беручи до уваги нерівність $\Omega_l(f,t)_p \ll \|f\|_p$, умову (S) з $\alpha > 0$ та співвідношення (25), одержуємо

$$\int\limits_1^{\infty}\left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}\right)^{\theta}\frac{dt}{t} \ll \int\limits_1^{\infty}\left(\frac{\|f\|_p}{\Omega(t)}\right)^{\theta}\frac{dt}{t} \ll \int\limits_1^{\infty}\frac{\|f\|_p^{\theta}}{t^{\alpha\theta+1}}dt \ll \sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{\|Q_s\|_p}{\Omega(2^{-s})}\right)^{\theta}. \tag{26}$$

Таким чином, із (24)–(26) випливає (8).

Нехай тепер $\theta = \infty$. Тоді, міркуючи, як і у випадку $1 \leqslant \theta < \infty$, отримуємо

$$\|f\|_p \leqslant \sum_{s=0}^{\infty}\|Q_s\|_p \ll \sup_{s\in\mathbb{Z}_+}\frac{\|Q_s\|_p}{\Omega(2^{-s})}\sum_{s=0}^{\infty}\Omega(2^{-s}) \ll \sup_{s\in\mathbb{Z}_+}\frac{\|Q_s\|_p}{\Omega(2^{-s})}, \tag{27}$$

$$\sup_{t>0}\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \ll \sup_{j\in\mathbb{Z}_+}\frac{\Omega_l(f,2^{-j})_p}{\Omega(2^{-j})} + \sup_{t>1}\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \ll$$

$$\ll \sup_{j\in\mathbb{Z}_+}\frac{\sum_{s=0}^{\infty}\Omega_l(Q_s,2^{-j})_p}{\Omega(2^{-j})} + \sup_{t>1}\frac{\|f\|_p}{\Omega(t)} \ll$$

$$\ll \sup_{j\in\mathbb{Z}_+}\left(\sum_{s=0}^{j}\frac{2^{(s-j)l}\|Q_s\|_p}{\Omega(2^{-j})} + \sum_{s=j+1}^{\infty}\frac{\|Q_s\|_p}{\Omega(2^{-j})}\right) + \sup_{t>1}\frac{\|f\|_p}{t^{\alpha\theta+1}} \ll$$

$$\ll \sup_{s\in\mathbb{Z}_+}\frac{\|Q_s\|_p}{\Omega(2^{-s})}\sup_{j\in\mathbb{Z}_+}\left(\sum_{s=0}^{j}\frac{2^{(s-j)l}\Omega(2^{-s})}{\Omega(2^{-j})} + \sum_{s=j+1}^{\infty}\frac{\Omega(2^{-s})}{\Omega(2^{-j})} + 1\right) \ll \sup_{s\in\mathbb{Z}_+}\frac{\|Q_s\|_p}{\Omega(2^{-s})}. \tag{28}$$

З (28) та (27) випливає (9) і, таким чином, достатність доведено.

У випадку, коли частинні суми n-го порядку ряду (5) реалізують найкраще наближення $E_n(f)_p$ (або принаймні його порядок), використовуючи лему A, одержуємо

$$\|Q_0\|_p = \|Q_0 - f + f\|_p \leqslant \|Q_0 - f\|_p + \|f\|_p \ll \|f\|_p,$$

$$\|Q_n\|_p = \left\|\sum_{s=0}^{n}Q_s - \sum_{s=0}^{n-1}Q_s\right\|_p \leqslant \left\|\sum_{s=0}^{n}Q_s - f\right\|_p + \left\|f - \sum_{s=0}^{n-1}Q_s\right\|_p \ll$$

$$\ll E_{n-1}(f)_p \ll \Omega_l(f,2^{-n+1})_p \ll \Omega_l(f,t)_p, \qquad t\in(2^{-n};2^{-n+1}), \quad n\in\mathbb{N}.$$

Але тоді, як показано вище, виконуються порядкові нерівності (12) та (13), і тому, беручи до уваги (8) та (9), отримуємо (10) та (11) відповідно.

Теорему доведено.

Сформулюємо наслідок з доведеної теореми, який буде використано при доведенні твердження наступного пункту.

Наслідок. *Нехай* $1 < p < \infty$ *і* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{N}$. *Функція* f *належить простору* $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant \theta < \infty$, *тоді і тільки тоді, коли*

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} \Omega^{-\theta}(2^{-s})\|f_{(s)}\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta} < \infty,$$

причому

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \asymp \left(\sum_{s=0}^{\infty} \Omega^{-\theta}(2^{-s})\|f_{(s)}\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta}. \tag{29}$$

Відповідно функція f *належить простору* $B^{\Omega}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\sup_{s\in\mathbb{Z}_+} \frac{\|f_{(s)}\|_p}{\Omega(2^{-s})} < \infty,$$

причому

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)} \asymp \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} \frac{\|f_{(s)}\|_p}{\Omega(2^{-s})}.$$

Зауваження. **1.** У випадку $\Omega(t) = t^r$, $r > 0$, тобто для просторів $B^{r}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, теорема 1 і наслідок були отримані у роботі [8] (зокрема, при $d = 1$ — також у [9]).

2. У роботі [10] було встановлено порядкові оцінки (10) та (11) при умові, що Q_s — деякі цілі функції експоненціального сферичного типу степенів 2^s по кожній змінній. Також в одновимірному випадку ($d = 1$) наслідок раніше було встановлено у статті [11].

3. Наближення функцій із класів $\boldsymbol{B^{\Omega}_{p,\theta}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{d}})$ цілими функціями експоненціального типу. В цьому пункті, з використанням сформульованого вище наслідку, встановимо точні за порядком оцінки величин $\mathcal{E}_n\big(B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\big)_q$ і $E_n\big(B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\big)_q$ у випадку $1 < p \leqslant q < \infty$.

Перш ніж перейти до формулювання та доведення основного результату, наведемо допоміжне твердження.

Теорема Б (див., наприклад, [6, с. 150])**.** *Якщо* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, *то для цілої функції експоненціального типу* $g_{\boldsymbol{\nu}} \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_d)$, *має місце нерівність*

$$\|g_{\boldsymbol{\nu}}\|_q \leqslant 2^d \left(\prod_{j=1}^{d} \nu_j\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|g_{\boldsymbol{\nu}}\|_p. \tag{30}$$

Нерівність (30) називають нерівністю різних метрик Нікольського.

Має місце наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай* $1 < p \leqslant q < \infty$ *і* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > d\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right)$, $l \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ *справджуються порядкові оцінки*

$$\mathcal{E}_n\big(B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\big)_q \asymp E_n\big(B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\big)_q \asymp \Omega(2^{-n})2^{nd\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}. \tag{31}$$

Доведення. Спочатку встановимо в (31) оцінки зверху.

Внаслідок вкладення $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d) \subset H^{\Omega}_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant \theta < \infty$, яке безпосередньо випливає із наслідку теореми 1, та співвідношення (3) нам достатньо отримати оцінку зверху для величини $\mathcal{E}_n\big(H^{\Omega}_p(\mathbb{R}^d)\big)_q$.

Оскільки для $f \in H^{\Omega}_p(\mathbb{R}^d)$, згідно з наслідком, виконується співвідношення $\|f_{(s)}\|_p \ll \ll \Omega(2^{-s})$, то, використовуючи послідовно нерівність Мінковського, нерівність різних метрик Нікольського (30) та умову (S) з $\alpha > d\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right)$, отримуємо

$$\big\|f - S_n(f)\big\|_q = \Big\| \sum_{s=n+1}^{\infty} f_{(s)} \Big\|_q \leqslant \sum_{s=n+1}^{\infty} \|f_{(s)}\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|f_{(s)}\|_p \leqslant \sum_{s=n+1}^{\infty} \Omega(2^{-s}) 2^{sd\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} =$$

$$= \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-\left(\alpha - d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)s} \ll \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-\left(\alpha - d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)s} \asymp$$

$$\asymp \Omega(2^{-n}) 2^{nd\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}.$$

Оцінки зверху в (31) встановлено.

Тепер перейдемо до встановлення оцінок знизу. Оскільки має місце вкладення $B^{\Omega}_{p,1}(\mathbb{R}^d) \subset \subset B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$, $1 < \theta \leqslant \infty$, яке безпосередньо випливає з наслідку теореми 1, то з урахуванням (3) достатньо отримати оцінку знизу для величини $\mathcal{E}_n\big(B^{\Omega}_{p,1}(\mathbb{R}^d)\big)_q$. З цією метою для $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d_+$ розглянемо функцію

$$H_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} H_{k_j}(x_j),$$

де

$$H_{k_j}(x_j) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \Big(2 \sin \frac{x_j}{2} \cos \frac{2k_j + 1}{2} x_j\Big) x_j^{-1}.$$

Тоді, як зазначено у [12], для перетворення Фур'є функції $H_{\boldsymbol{k}}$ має місце співвідношення

$$\mathfrak{F} H_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \chi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \chi_{k_j}(x_j),$$

де

$$\chi_{k_j}(x_j) = \begin{cases} 1, & k_j < |x_j| < k_j + 1, \\ \dfrac{1}{2}, & |x_j| = k_j \quad \text{або} \quad |x_j| = k_j + 1, \\ 0 & \text{— в інших випадках,} \end{cases}$$

$$\chi_0(x_j) = \begin{cases} 1, & |x_j| < 1, \\ \dfrac{1}{2}, & |x_j| = 1, \\ 0, & |x_j| > 1. \end{cases}$$

Відповідно, для оберненого перетворення будемо мати

$$\mathfrak{F}^{-1}\chi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = H_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}).$$

Далі покладемо

$$F_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{k_1=2^n}^{2^{n+1}-1} \ldots \sum_{k_d=2^n}^{2^{n+1}-1} H_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}).$$

У роботі [13] показано, що справджується порядкова оцінка $\|F_n\|_p \asymp 2^{nd\left(1-\frac{1}{p}\right)}$, тому згідно з (29)

$$\|F_n\|_{B^{\Omega}_{p,1}(\mathbb{R}^d)} \asymp \sum_{s=0}^{\infty} \Omega^{-1}(2^{-s})\big\|(F_n)_{(s)}\big\|_p \asymp \Omega^{-1}(2^{-(n+1)})\|F_{n+1}\|_p \asymp \Omega^{-1}(2^{-n})2^{nd\left(1-\frac{1}{p}\right)}. \quad (32)$$

Звідси, враховуючи (32), отримуємо, що функція

$$f(\boldsymbol{x}) = C_5\Omega(2^{-n})2^{nd\left(\frac{1}{p}-1\right)}F_n(\boldsymbol{x})$$

з деякою сталою $C_5 > 0$ належить класу $B^{\Omega}_{p,1}(\mathbb{R}^d)$.

Тепер, оскільки $S_n(f) = 0$, то

$$\mathcal{E}_n\big(B^{\Omega}_{p,1}(\mathbb{R}^d)\big)_q \geqslant \mathcal{E}_n(f)_q = \big\|f - S_n(f)\big\|_q = \|f\|_q \asymp$$

$$\asymp \Omega(2^{-n})2^{nd\left(\frac{1}{p}-1\right)}\|F_n\|_q \asymp \Omega(2^{-n})2^{nd\left(\frac{1}{p}-1\right)}2^{nd\left(1-\frac{1}{q}\right)} = \Omega(2^{-n})2^{nd\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}.$$

Оцінки знизу в (31) встановлено.

Теорему доведено.

Зауваження. **3.** При $\Omega(t) = t^r$ і відповідних умовах на параметри p, q та r точні за порядком оцінки величин $\mathcal{E}_n\big(B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\big)_q$ і $E_n\big(B^r_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)\big)_q$ одержано у роботі [13].

4. Точні за порядком оцінки аналогів величин (1) та (2) для ізотропних класів Нікольського – Бєсова $B^r_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних та їх узагальнень $B^{\Omega}_{p,\theta}$ встановлено у роботах [14] та [15] відповідно.

1. *Бернштейн С. Н.* Конструктивная теория функций (1931–1953): Собр. соч. – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – **2.** – 626 с.
2. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
3. *Бесов О. В.* О некотором семействе функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **60**. – С. 42 – 81.
4. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.

5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1967. – 436 с.
6. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
7. *Лизоркин П. И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1969. – **105**. – С. 89 – 167.
8. *Лизоркин П. И.* Обобщенные гельдеровы пространства $B_{p,\theta}^{(r)}$ и их соотношение с пространствами Соболева $L_p^{(r)}$ // Сиб. мат. журн. – 1968. – **9**, № 5. – С. 1127 – 1152.
9. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
10. *Liu Yongping, Xu Cuiqiao.* The infinite-dimensional widths and optimal recovery of generalized Besov classes // J. Complexity. – 2002. – **18**. – P. 815 – 832.
11. *Стасюк С. А., Янченко С. Я.* Найкраще наближення класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$ функцій багатьох змінних у просторі $L_p(\mathbb{R}^d)$ // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 367 – 384.
12. *Wang Heping, Sun Yongsheng.* Approximation of multivariate functions with certain mixed smoothness by entire functions // Northeast. Math. J. – 1995. – **11(4)**. – P. 454 – 466.
13. *Янченко С. Я.* Наближення функцій з класів Бєсова цілими функціями у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$ // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 1. – С. 380 – 391.
14. *Романюк А. С.* Приближение изотропных классов $B_{p,\theta}^{r}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 263 – 278.
15. *Стасюк С. А.* Наближення класів $B_{p,\theta}^{\omega}$ періодичних функцій багатьох змінних поліномами зі спектром в кубічних областях // Мат. студ. – 2011. – **35**, № 1. – С. 66 – 73.

Одержано 18.03.13,
після доопрацювання — 11.07.13