УДК 517.5

Т. А. Агошкова (Днепропетр. нац. ун-т ж.-д. трансп.)

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ L_ψ

Let $L_0(T^m)$ be a set of periodic measurable real-valued functions of m variables, let $\psi\colon R^1_+ \to R^1_+$ be the continuity modulus, and let $L_\psi(T^m) = \left\{ f \in L_0(T^m)\colon \|f\|_\psi := \int_{T^m} \psi\big(|f(x)|\big)dx < \infty \right\}$. The relationship between the modulus of continuity of functions from $L_\psi(T^m)$ and the corresponding K-functionals is analyzed, and sufficient conditions for the embedding of classes of functions $\mathcal{H}^\omega_\psi(T^m)$ into $L_q(T^m)$, $q \in (0;1]$, are obtained.

Нехай $L_0(T^m)$ — множина періодичних вимірних дійснозначних функцій m змінних, $\psi\colon R^1_+ \to R^1_+$ — модуль неперервності, $L_\psi(T^m) = \left\{ f \in L_0(T^m)\colon \|f\|_\psi := \int_{T^m} \psi\big(|f(x)|\big)dx < \infty \right\}$. Досліджується зв'язок між модулями неперервності функцій з $L_\psi(T^m)$ і відповідними K-функціоналами, а також отримано достатні умови для вкладення класів функцій $\mathcal{H}^\omega_\psi(T^m)$ в $L_q(T^m)$, $q \in (0;1]$.

1. Введение. Пусть $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, — действительнозначные функции, имеющие период 1 по каждой переменной; $T^m = [0,1)^m$ — основной тор периодов; $\mathrm{L}_0 \equiv \equiv L_0(T^m)$ — множество всех таких функций, которые почти всюду на T^m конечны и измеримы; Ω — класс функций $\psi\colon R^1_+ \to R^1_+$, являющихся модулем непрерывности, т. е. ψ — непрерывная неубывающая функция, $\psi(0) = 0$, $\psi(x+y) \le \psi(x) + \psi(y)$ для всех $x, y \in R^1_+$.

Обозначим через $L_\psi \equiv L_\psi(T^m)$ метрическое пространство:

$$L_\psi = \left\{ f \in L_0(T^m)\colon \|f\|_\psi := \int_{T^m} \psi\big(|f(\mathbf{x})|\big)d\mathbf{x} < \infty \right\}.$$

В случае $\psi(t) = t^p$, $0 < p \le 1$, получаем пространства $L_p(T^m)$.

Определим для $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ разностные формы

$$\triangle_{\mathbf{t}}\, f(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}), \quad \text{где} \quad f_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) = f(x_1 + t_1, \ldots, x_m + t_m),$$

$$\triangle_{t_i \mathbf{e}_i}\, f(\mathbf{x}) = f_{t_i \mathbf{e}_i}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}), \quad \text{где} \quad f_{t_i \mathbf{e}_i}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + t_i \mathbf{e}_i)$$

и соответствующие полный и частные модули непрерывности функции f в пространстве L_ψ при $h \in \mathbb{R}^1_+$:

$$\omega(f,h)_\psi = \sup_{\|\mathbf{t}\|_\infty \le h} \|\triangle_{\mathbf{t}}\, f\|_\psi, \quad \text{где} \quad \|\mathbf{t}\|_\infty := \max_{1 \le i \le m} |t_i|,$$

$$\omega_i(f,h)_\psi = \sup_{|t_i| \le h} \|\triangle_{t_i \mathbf{e}_i}\, f\|_\psi, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $\mathbf{e}_i$ — m-мерный вектор, i-я координата которого равна 1, а остальные координаты — нули.

Для заданного модуля непрерывности $\omega(h)$ через $\mathcal{H}^\omega_\psi \equiv \mathcal{H}^\omega_\psi(T^m)$ обозначим класс функций

$$\mathcal{H}^\omega_\psi = \big\{ f \in L_\psi(T^m)\colon \exists A \ge 0 \ \omega(f,h)_\psi \le A\omega(h) \ \forall h > 0 \big\},$$

© Т. А. АГОШКОВА, 2014

где A — константа, не зависящая от функции f. В случае $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha \in (0,1]$, получаем липшицевый класс функций $\Lambda_\psi^\alpha \equiv \Lambda_\psi^\alpha(T^m)$.

Пусть $\beta(t)$, $t \in (0,\infty)$, — произвольная строго положительная всюду конечная функция. Ее функцией растяжения [1, с. 75] называют функцию $M_\beta(s)$, $s \in (0,\infty)$,

$$M_\beta(s) = \sup_{0<t<\infty} \frac{\beta(st)}{\beta(t)}.$$

Общие свойства M_β см. в [1, с. 76]. В случае, когда $\psi \in \Omega$, для функции M_ψ существует число γ_ψ (называемое нижним показателем растяжения функции) такое, что:

1) $\gamma_\psi \in [0,1]$;

2) $M_\psi(s) \geq s^{\gamma_\psi}\ \ \forall s \in (0,1]$;

3) для любого $\varepsilon > 0$ при $0 < s < 1$ с некоторой константой C_ε

$$M_\psi(s) \leq C_\varepsilon s^{\gamma_\psi - \varepsilon}. \tag{1}$$

Для $f \in L_\psi$ и $h > 0$ определим K-функционал следующим образом:

$$K\left(f,h;L_\psi,\Lambda_\psi^1\right) := \inf_{f_1+f_2=f}\left(\|f_1\|_\psi + h\|f_2\|_{\Lambda_\psi^1}\right),$$

где $\|f\|_{\Lambda_\psi^1} := \sup_{s>0} \dfrac{\omega(f,s)_\psi}{s}$.

В п. 2 проведено исследование в многомерном случае связи между модулями непрерывности в $L_\psi(T^m)$ и соответствующими K-функционалами с использованием приближения интерполяционными сплайнами нулевого порядка с плавающими узлами. Этот метод доказательства будет использоваться при исследовании связи между модулями непрерывности в $L_\psi(T^m)$ и $L_1(T^m)$, а также в $L_\psi(T^m)$ и $L_q(T^m)$, $q \in (0;1]$, в п. 3. Ранее эта идея была использована в [2].

В одномерном случае в шкале пространств L_p при $0 < p < 1$ для 1-периодических функций в [3] получены необходимые и достаточные условия для вложения $\mathcal{H}_p^\omega \subset L_q(0;1)$, где $0 < p < 1$, $p < q < \dfrac{p}{1-p}$.

Важным результатом здесь является неравенство

$$\omega(f,h)_q \leq C_{p,q} \int\limits_0^h \left(\frac{\omega(f,x)_p}{x}\right)^{q/p} dx, \quad 0 < h < \frac{1}{3}. \tag{2}$$

В шкале пространств L_ψ в одномерном случае для 1-периодических функций С. А. Пичугов в [2] исследовал задачу о вложении классов функций из L_ψ в L_1. В результате были получены достаточное условие вложения $\mathcal{H}_\psi^\omega \subset L_1(0;1)$ и соотношение, аналогичное (2), для функций из L_ψ, $\gamma_\psi > 0$:

$$\psi\left(\frac{\omega(f,h)_1}{h}\right) \leq C_{\psi,h} \int\limits_0^1 \frac{M_\psi(t)}{t}\frac{\omega(f,ht)_\psi}{ht} dt, \quad 0 < h \leq \frac{1}{2}.$$

Для классов Λ_p^α эти результаты дают те же теоремы вложения, что и в [3].

В п. 3 (теорема 2) проведено исследование вложения классов $\mathcal{H}_\psi^\omega$ в L_1 для функций многих переменных. Полученная теорема для функций одной переменной совпадает с результатами С. А. Пичугова [2] о вложении классов $\mathcal{H}_\psi^\omega$ в L_1. Рассмотрен и более общий случай для функций многих переменных о вложении классов $\mathcal{H}_\psi^\omega$ в L_q, $0 < q \leq 1$ (теорема 3). Для функций одной переменной эта теорема вложения для классов Λ_p^α совпадает с теоремой Э. А. Стороженко [3].

2. K-функционалы и модули непрерывности в $L_\psi\,(T^m)$. Пусть $\overline{\omega}(f,h)_\psi$ — наименьшая выпуклая вверх мажоранта функции $\omega(f,h)_\psi$. Заметим, что [1, с. 70] выполняется двойное неравенство

$$\omega(f,h)_\psi \leq \overline{\omega}(f,h)_\psi \leq 2\omega(f,h)_\psi. \tag{3}$$

Теорема 1. *Для любой $\psi \in \Omega$ и любой функции $f \in L_\psi\,(T^m)$ при всех $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ имеют место неравенства*

$$\frac{1}{2}\,\overline{\omega}(f,2h)_\psi \leq K\left(f,h;L_\psi,\Lambda_\psi^1\right) \leq (m+1)\,\omega(f,2h)_\psi. \tag{4}$$

Доказательство. Левое неравенство в (4) является простым следствием определений. Для произвольного $h > 0$

$$\omega(f,2h)_\psi \leq 2\|f\|_\psi, \qquad \omega(g,2h)_\psi \leq \|g\|_{\Lambda_\psi^1}\cdot 2h, \quad g \in \Lambda_\psi^1,$$

тогда для произвольного $g \in \Lambda_\psi^1$

$$\omega(f,2h)_\psi \leq \omega(f-g,2h)_\psi + \omega(g,2h)_\psi \leq 2\|f-g\|_\psi + \|g\|_{\Lambda_\psi^1}\cdot 2h,$$

поэтому

$$\omega(f,2h)_\psi \leq 2\inf_{g\in\Lambda_\psi^1}\left(\|f-g\|_\psi + h\|g\|_{\Lambda_\psi^1}\right) = 2K\left(f,h;L_\psi,\Lambda_\psi^1\right).$$

Поскольку $K\,(f,h)$ — выпуклая вверх функция аргумента h, то

$$\overline{\omega}(f,2h)_\psi \leq 2K\left(f,h;L_\psi,\Lambda_\psi^1\right).$$

Докажем правое неравенство в (4) при $h = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Построим специальные сплайн-функции. На каждой из m координатных осей отрезок $[0,1]$ разбиваем на отрезки равной длины с помощью n равноотстоящих точек вида

$$\frac{s}{n}, \quad s = 0,1,\ldots,n-1.$$

С их помощью получаем разбиение (ранга n) основного периода T^m на n^m кубов $\Pi_{j_1,\ldots,j_m;n}$ вида

$$\Pi_{j_1,\ldots,j_m;n} = \left\{\mathbf{x}\in T^m\colon\ \frac{j_i}{n} \leq x_i < \frac{j_i+1}{n},\ i=1,\ldots,n\right\},$$

где $j_i = 0,1,\ldots,n-1$.

При доказательстве правого неравенства в (4) достаточно ограничиться всюду плотным множеством непрерывных функций в L_ψ.

Снимем значения с непрерывной функции f в узловой точке $\left(\frac{j_1}{n},\ldots,\frac{j_m}{n}\right)$ каждого m-мерного параллелепипеда $\Pi_{j_1,\ldots,j_m;n}$ и определим кусочно-постоянную функцию $S_n(f,\mathbf{x})$:

$$S_n(f,\mathbf{x}) := f\left(\frac{j_1}{n},\ldots,\frac{j_m}{n}\right)\chi_{\Pi_{j_1,\ldots,j_m;n}}(\mathbf{x}), \qquad j_i = 0,\ldots,n-1, \quad i=1,\ldots,m, \tag{5}$$

где $\chi_{\Pi_{j_1,\ldots,j_m;n}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x}\in\Pi_{j_1,\ldots,j_m;n}, \\ 0, & \mathbf{x}\,\overline{\in}\,\Pi_{j_1,\ldots,j_m;n}. \end{cases}$

Покажем, что $S_n(f)$ принадлежит Λ^1_ψ. Пусть $h\le\frac{1}{n}$, $i=1,\ldots,m$, тогда

$$\left\|\triangle_{h\mathbf{e}_i} S_n(f)\right\|_\psi = \sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{n-1}\int\limits_{\frac{j_1}{n}}^{\frac{j_1+1}{n}}\ldots\int\limits_{\frac{j_i+1}{n}-h}^{\frac{j_i+1}{n}}\ldots\int\limits_{\frac{j_m}{n}}^{\frac{j_m+1}{n}}\psi\left(\left|\triangle_{\frac{1}{n}\mathbf{e}_i} f\left(\frac{j_1}{n},\ldots,\frac{j_m}{n}\right)\right|\right)dx_1\ldots dx_m =$$

$$= h\frac{1}{n^{m-1}}\sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{n-1}\psi\left(\left|\triangle_{\frac{1}{n}\mathbf{e}_i} f\left(\frac{j_1}{n},\ldots,\frac{j_m}{n}\right)\right|\right),$$

а значит, при $h\le\frac{1}{n}$

$$\omega_i\big(S_n(f),h\big)_\psi = h\frac{1}{n^{m-1}}\sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{n-1}\psi\left(\left|\triangle_{\frac{1}{n}\mathbf{e}_i} f\left(\frac{j_1}{n},\ldots,\frac{j_m}{n}\right)\right|\right). \tag{6}$$

Если $h>\frac{1}{n}$, то h можно представить в виде $h=\frac{k}{n}+h'$, где $h'<\frac{1}{n}$, $k=1,\ldots,n-1$. Тогда, учитывая (6), получаем

$$\omega_i\big(S_n(f),h\big)_\psi = \omega_i\left(S_n(f),\frac{k}{n}+h'\right)_\psi \le k\omega_i\left(S_n(f),\frac{1}{n}\right)_\psi + \omega_i\big(S_n(f),h'\big)_\psi \le$$

$$\le\left(k\frac{1}{n^m}+h'\frac{1}{n^{m-1}}\right)\sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{n-1}\psi\left(\left|\triangle_{\frac{1}{n}\mathbf{e}_i} f\left(\frac{j_1}{n},\ldots,\frac{j_m}{n}\right)\right|\right) =$$

$$= h\frac{1}{n^{m-1}}\sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{n-1}\psi\left(\left|\triangle_{\frac{1}{n}\mathbf{e}_i} f\left(\frac{j_1}{n},\ldots,\frac{j_m}{n}\right)\right|\right), \quad i=1,\ldots,m. \tag{7}$$

Из (7) следует, что

$$\omega\big(S_n(f),h\big)_\psi \le \sum_{i=1}^m \omega_i\big(S_n(f),h\big)_\psi \le$$

$$\le h\frac{1}{n^{m-1}}\sum_{i=1}^m\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n}\psi\left(\left|\triangle_{\frac{1}{n}\mathbf{e}_i} f\left(\frac{j_1}{n},\ldots,\frac{j_m}{n}\right)\right|\right) = Ah, \tag{8}$$

где A — константа, не зависящая от h.

Для непрерывной функции f

$$K\left(f,\frac{1}{n};L_\psi,\Lambda_\psi^1\right)=\int\limits_{T^m}K\left(f_{\mathbf{t}},\frac{1}{n};L_\psi,\Lambda_\psi^1\right)d\mathbf{t}\le\int\limits_{T^m}\left(\left\|f_{\mathbf{t}}-S_n(f_{\mathbf{t}})\right\|_\psi+\frac{1}{n}\left\|S_n(f_{\mathbf{t}})\right\|_{\Lambda_\psi^1}\right)d\mathbf{t}. \quad (9)$$

Рассмотрим первое слагаемое в (9):

$$\int\limits_{T^m}\left\|f_{\mathbf{t}}-S_n(f_{\mathbf{t}})\right\|_\psi d\mathbf{t}=$$

$$=\int\limits_{T^m}\sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{n-1}\int\limits_{\frac{j_1}{n}}^{\frac{j_1+1}{n}}\ldots\int\limits_{\frac{j_m}{n}}^{\frac{j_m+1}{n}}\psi\left(\left|f_{\mathbf{t}}(x_1,\ldots,x_m)-f_{\mathbf{t}}\left(\frac{j_1}{n},\ldots,\frac{j_m}{n}\right)\right|\right)dx_1\ldots dx_m d\mathbf{t}=$$

$$=\int\limits_{T^m}\sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{n-1}\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\ldots\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\psi\left(\left|f_{\mathbf{t}}\left(x_1+\frac{j_1}{n},\ldots,x_m+\frac{j_m}{n}\right)-f_{\mathbf{t}}\left(\frac{j_1}{n},\ldots,\frac{j_m}{n}\right)\right|\right)dx_1\ldots dx_m d\mathbf{t}=$$

$$=\sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{n-1}\int\limits_{\left[0,\frac{1}{n}\right)^m}\|\triangle_{\mathbf{x}}f\|_\psi d\mathbf{x}=n^m\int\limits_{\left[0,\frac{1}{n}\right)^m}\|\triangle_{\mathbf{x}}f\|_\psi d\mathbf{x}\le$$

$$\le n^m\,\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)_\psi\frac{1}{n^m}=\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)_\psi. \quad (10)$$

Для почти всех $\mathbf{t}$, учитывая (8), получаем оценку второго слагаемого в (9):

$$\|S_n(f_{\mathbf{t}})\|_{\Lambda_\psi^1}=\sup_{h>0}\frac{\omega\left(S_n(f_{\mathbf{t}}),h\right)_\psi}{h}\le\frac{1}{n^{m-1}}\sum_{i=1}^m\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^n\psi\left(\left|\triangle_{\frac{1}{n}\mathbf{e}_i}f_{\mathbf{t}}\left(\frac{j_1}{n},\ldots,\frac{j_m}{n}\right)\right|\right),$$

поэтому

$$\int\limits_{T^m}\left\|S_n(f_{\mathbf{t}})\right\|_{\Lambda_\psi^1}d\mathbf{t}\le\frac{1}{n^{m-1}}n^m\sum_{i=1}^m\left\|\triangle_{\frac{1}{n}\mathbf{e}_i}f\right\|_\psi\le n\sum_{i=1}^m\omega_i\left(f,\frac{1}{n}\right)_\psi\le$$

$$\le n\cdot m\cdot\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)_\psi. \quad (11)$$

Теперь из (9) – (11) следует, что

$$K\left(f,\frac{1}{n};L_\psi,\Lambda_\psi^1\right)\le\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)_\psi+\frac{1}{n}n\cdot m\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)_\psi=(m+1)\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)_\psi. \quad (12)$$

Для произвольного $h\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ найдем $n\in N$ такое, что $\frac{1}{2^n}\le h<\frac{1}{2^{n-1}}$. Тогда, учитывая (12), получаем

$$K\left(f,h;L_\psi,\Lambda_\psi^1\right)\le K\left(f,\frac{1}{2^{n-1}};L_\psi,\Lambda_\psi^1\right)\le(m+1)\omega\left(f,\frac{1}{2^{n-1}}\right)_\psi\le(m+1)\omega\left(f,2h\right)_\psi.$$

Теорема 1 доказана.

3. Связь между модулями непрерывности в $L_\psi(T^m)$ и $L_1(T^m)$.

Теорема 2. *Пусть $\gamma_\psi>0$ и функция $f\in L_\psi(T^m)$ такая, что конечен интеграл*

$$\int\limits_0^1\frac{M_\psi(t)}{t}\frac{\omega\left(f,t^{1/m}\right)_\psi}{t}dt<\infty. \tag{13}$$

Тогда f принадлежит $L_1(T^m)$ и для всех $h\in\left(0,\frac12\right]$ выполняется неравенство

$$\psi\left(\frac{\omega(f,h)_1}{h}\right)\le C\int\limits_0^{h^{m-1}}\frac{M_\psi(t)}{t}\frac{\omega\left(f,(ht)^{1/m}\right)_\psi}{ht}dt, \tag{14}$$

где константа C зависит от ψ, f, m.

Условие $\gamma_\psi>0$ является существенным, потому что при $\gamma_\psi=0$ получаем $M_\psi(t)\equiv1$, $t\in(0,1]$, и (13) невозможно ни для какого нетривиального модуля непрерывности.

Доказательство. Используем связь между модулями непрерывности и K-функционалами [4] в L_1:

$$\omega(f,h)_1\asymp K\left(f,h;L_1,\Lambda_1^1\right)=\inf_{f_1+f_2=f}\left(\left\|f_1\right\|_1+h\left\|f_2\right\|_{\Lambda_1^1}\right), \tag{15}$$

где $\asymp$ обозначает двустороннее неравенство с положительными константами, не зависящими от f и h.

Для оценки сверху K-функционала будем использовать аппроксимацию интерполяционными сплайнами нулевого порядка, определенными в (5) при $n=2^k$:

$$S_{2^k}(f)=S_{2^k}(f,x):=f\left(\frac{j_1}{2^k},\ldots,\frac{j_m}{2^k}\right)\chi_{\Pi_{j_1,\ldots,j_m;2^k}}(x), \tag{16}$$

где $j_i=0,1,\ldots,2^k-1$, $i=1,\ldots,m$.

Поскольку $\omega(f,h)_1=\omega(f_{\mathbf t},h)_1$, из (15) следует, что

$$\psi\left(\frac{\omega(f,h)_1}{h}\right)=\int\limits_{T^m}\psi\left(\frac{\omega\left(f_{\mathbf t},h\right)_1}{h}\right)d\mathbf t\le C_1\int\limits_{T^m}\psi\left(\frac1hK\left(f_{\mathbf t},h;L_1,\Lambda_1^1\right)\right)d\mathbf t\le$$

$$\le C_1\int\limits_{T^m}\psi\left(\frac1h\left\|f_{1,\mathbf t}\right\|_1+\left\|f_{2,\mathbf t}\right\|_{\Lambda_1^1}\right)d\mathbf t,\quad f_{1,\mathbf t}+f_{2,\mathbf t}=f_{\mathbf t}. \tag{17}$$

В качестве функций $f_{1,\mathbf t}$ и $f_{2,\mathbf t}$ будем выбирать сплайны вида (16). Отметим, что если функции f и g эквивалентны, то сплайны $S_{2^k}(f_{\mathbf t})$ и $S_{2^k}(g_{\mathbf t})$ совпадают при почти всех $\mathbf t$. Поэтому их использование в (17) является корректным.

Пусть h имеет вид $h=\dfrac{1}{2^n}$, $n\in\mathbb N$.

Положим в (17)

$$f_{2,\mathbf{t}} := S_{2^n}(f_{\mathbf{t}}, x).$$

Имеет место равенство

$$f_{\mathbf{t}} = S_{2^n}(f_{\mathbf{t}}) + \sum_{k>n} \Big(S_{2^k}(f_{\mathbf{t}}) - S_{2^{k-1}}(f_{\mathbf{t}}) \Big),$$

поэтому

$$f_{1,\mathbf{t}} = \sum_{k>n} \Big(S_{2^k}(f_{\mathbf{t}}) - S_{2^{k-1}}(f_{\mathbf{t}}) \Big).$$

Тогда

$$\big\| S_{2^k}(f_{\mathbf{t}}) - S_{2^{k-1}}(f_{\mathbf{t}}) \big\|_1 = \sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{2^k-1} \int\limits_{\Pi_{j_1,\ldots,j_m;2^k}} \big| S_{2^k}(f_{\mathbf{t}}, \mathbf{x}) - S_{2^{k-1}}(f_{\mathbf{t}}, \mathbf{x}) \big| d\mathbf{x} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{mk}} \sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{2^k-1} \left| \triangle_{\frac{1}{2^k}\mathbf{e}}\, f_t \left(\frac{j_1}{2^k}, \ldots, \frac{j_m}{2^k} \right) \right|,$$

где **e** — m-мерный вектор, каждая координата которого равна 1.

Имеем

$$\psi\left(\frac{1}{h}\|f_{1,\mathbf{t}}\|_1\right) = \psi\left(2^n \Big\| \sum_{k>n} S_{2^k}(f_{\mathbf{t}}) - S_{2^{k-1}}(f_{\mathbf{t}}) \Big\|_1 \right) \leq \sum_{k>n} \psi\Big(2^n \big\| S_{2^k}(f_{\mathbf{t}}) - S_{2^{k-1}}(f_{\mathbf{t}}) \big\|_1 \Big) \leq$$

$$\leq \sum_{k>n} \psi \left(2^{n-mk} \sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{2^k-1} \left| \triangle_{\frac{1}{2^k}\mathbf{e}}\, f_{\mathbf{t}} \left(\frac{j_1}{2^k}, \ldots, \frac{j_m}{2^k} \right) \right| \right) \leq$$

$$\leq \sum_{k>n} \left(M_\psi\left(2^{n-mk}\right) \sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{2^k-1} \psi\left(\left| \triangle_{\frac{1}{2^k}\mathbf{e}}\, f_{\mathbf{t}} \left(\frac{j_1}{2^k}, \ldots, \frac{j_m}{2^k} \right) \right| \right) \right).$$

На последнем этапе использовано неравенство $\psi(st) \leq M_\psi(s)\psi(t)$, вытекающее из определения функции растяжения $M_\psi(s)$. Тогда

$$\int\limits_{T^m} \psi\left(2^n \|f_{1,\mathbf{t}}\|_1\right) d\mathbf{t} \leq \sum_{k>n} \left(M_\psi\left(2^{n-mk}\right) \sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{2^k-1} \int\limits_{T^m} \psi\left(\left| \triangle_{\frac{1}{2^k}\mathbf{e}}\, f_{\mathbf{t}} \left(\frac{j_1}{2^k}, \ldots, \frac{j_m}{2^k} \right) \right| \right) d\mathbf{t} \right) =$$

$$= \sum_{k>n} \left(M_\psi\left(2^{n-mk}\right) \sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{2^k-1} \| \triangle_{\frac{1}{2^k}\mathbf{e}}\, f \|_\psi \right) = \sum_{k>n} \left(2^{mk} M_\psi\left(2^{n-mk}\right) \| \triangle_{\frac{1}{2^k}\mathbf{e}}\, f \|_\psi \right) \leq$$

$$\leq \sum_{k>n} \left(2^{mk} M_\psi\left(2^{n-mk}\right) \omega\left(f, \frac{1}{2^k} \right)_\psi \right). \tag{18}$$

Далее,

$$\|f_{2,\mathbf{t}}\|_{\Lambda^1_1} = \sup_{s>0} \frac{\omega(f_{2,\mathbf{t}}; s)_1}{s} \leq \sup_{s>0} \frac{\sum_{i=1}^{m} \omega_i(f_{2,\mathbf{t}}; s)_1}{s}. \tag{19}$$

Проводя аналогичные рассуждения, как в (6) и (7), получаем

$$\omega_i(f_{2,\mathbf{t}}; s)_1 \leq s \frac{1}{2^{n(m-1)}} \sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{2^n-1} \left| \triangle_{\frac{1}{2^n}\mathbf{e}_i} f_{\mathbf{t}} \left(\frac{j_1}{2^n}, \ldots, \frac{j_m}{2^n} \right) \right| \quad \text{при} \quad s > 0. \tag{20}$$

Из (19), (20) следует, что для почти всех $\mathbf{t}$

$$\|f_{2,\mathbf{t}}\|_{\Lambda^1_1} \leq \frac{1}{2^{n(m-1)}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{2^n-1} \left| \triangle_{\frac{1}{2^n}\mathbf{e}_i} f_{\mathbf{t}} \left(\frac{j_1}{2^n}, \ldots, \frac{j_m}{2^n} \right) \right|.$$

Поэтому

$$\int\limits_{T^m} \psi \left(\|f_{2,\mathbf{t}}\|_{\Lambda^1_1} \right) d\mathbf{t} \leq \int\limits_{T^m} M_\psi \left(\frac{1}{2^{n(m-1)}} \right) \sum_{i=1}^{m} \sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{2^n-1} \psi \left(\left| \triangle_{\frac{1}{2^n}\mathbf{e}_i} f_{\mathbf{t}} \left(\frac{j_1}{2^n}, \ldots, \frac{j_m}{2^n} \right) \right| \right) d\mathbf{t} \leq$$

$$\leq 2^{nm} M_\psi \left(\frac{1}{2^{n(m-1)}} \right) \sum_{i=1}^{m} \| \triangle_{\frac{1}{2^n}\mathbf{e}_i} f \|_\psi \leq 2^{nm} M_\psi \left(\frac{1}{2^{n(m-1)}} \right) \sum_{i=1}^{m} \omega_i \left(f, \frac{1}{2^n} \right)_\psi \leq$$

$$\leq 2^{nm} m M_\psi \left(\frac{1}{2^{n(m-1)}} \right) \omega \left(f, \frac{1}{2^n} \right)_\psi. \tag{21}$$

Функция растяжения $M_\psi(t)$ при $\gamma_\psi > 0$ является модулем непрерывности. Пусть $\overline{M}_\psi(t)$ — наименьшая выпуклая вверх мажоранта функции $M_\psi(t)$. Тогда справедливы соответствующие неравенства (3).

Из (17), (18), (21), учитывая (3) для $h = \dfrac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, получаем

$$\psi \left(2^n \omega \left(f, \frac{1}{2^n} \right)_1 \right) \leq C_1 \left(\int\limits_{T^m} \psi \left(2^n \|f_{1,\mathbf{t}}\|_1 \right) d\mathbf{t} + \int\limits_{T^m} \psi \left(\|f_{2,\mathbf{t}}\|_1 \right) d\mathbf{t} \right) \leq$$

$$\leq C_1 \left(\sum_{k>n} 2^{mk} M_\psi \left(2^{n-mk} \right) \omega \left(f, \frac{1}{2^k} \right)_\psi + 2^{nm} m M_\psi \left(\frac{1}{2^{n(m-1)}} \right) \omega \left(f, \frac{1}{2^n} \right)_\psi \right) \leq$$

$$\leq C_1 m \sum_{k \geq n} M_\psi \left(2^n \frac{1}{2^{mk}} \right) \frac{\omega \left(f, \frac{1}{2^k} \right)_\psi}{\frac{1}{2^{mk}}} = C_1 m \sum_{k \geq n} \frac{M_\psi \left(2^n \frac{1}{2^{mk}} \right)}{\frac{1}{2^{mk}}} \frac{\omega \left(f, \frac{1}{2^k} \right)_\psi}{\frac{1}{2^k}} \frac{1}{2^k} \leq$$

$$\leq C_1 m \sum_{k \geq n} \frac{\overline{M}_\psi \left(2^n \frac{1}{2^{mk}} \right)}{\frac{1}{2^{mk}}} \frac{\overline{\omega} \left(f, \frac{1}{2^k} \right)_\psi}{\frac{1}{2^k}} \frac{1}{2^k} \leq C_2 \int\limits_0^{\frac{1}{2^n}} \frac{M_\psi \left(2^n y^m \right)}{y^m} \frac{\omega \left(f, y \right)_\psi}{y} dy =$$

$$= C_2 \int\limits_0^{2^{n(1-m)}} \frac{M_\psi(t)}{t} \frac{\omega\left(f, (2^{-n}t)^{\frac{1}{m}}\right)_\psi}{2^{-n}t} dt.$$

Последний интеграл конечен по условию (13), следовательно, неравенство (14) доказано для $h = \dfrac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Для произвольного $h \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$ найдем $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\dfrac{1}{2^n} \le h < \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Тогда

$$\psi\left(\frac{\omega(f,h)_1}{h}\right) \le \psi\left(\frac{\omega(f, 2^{-(n-1)})_1}{2^{-n}}\right) \le \psi\left(2\frac{\omega(f,2^{-n})_1}{2^{-n}}\right) \le M_\psi(2)\psi\left(\frac{\omega(f,2^{-n})_1}{2^{-n}}\right) \le$$

$$\le C_2 M_\psi(2) \int\limits_0^{2^{n(1-m)}} \frac{M_\psi(t)}{t} \frac{\omega\left(f, (2^{-n}t)^{1/m}\right)_\psi}{2^{-n}t} dt \le 2C_2 M_\psi(2) \int\limits_0^{h^{m-1}} \frac{M_\psi(t)}{t} \frac{\omega\left(f, (ht)^{1/m}\right)_\psi}{ht} dt.$$

Теорема 2 доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть $\gamma_\psi > 0$, функция f принадлежит $\Lambda_\psi^\alpha(T^m)$ и $\alpha \in (0,1]$ такое, что $\gamma_\psi + \dfrac{\alpha}{m} > 1$. Тогда f принадлежит $L_1(T^m)$ и для любого $h \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$ и всех положительных ε таких, что $\gamma_\psi + \dfrac{\alpha}{m} - \varepsilon > 1$, выполняется неравенство*

$$\psi\left(\frac{\omega(f,h)_1}{h}\right) \le C h^{\alpha - m + (m-1)(\gamma_\psi - \varepsilon)},$$

где константа C зависит от ψ, f, m, α, ε.

Доказательство. Проверим выполнение условия (13). Применяя свойство (1) функции растяжения M_ψ, получаем

$$\int\limits_0^1 \frac{M_\psi(t)}{t} \frac{\omega\left(f, t^{1/m}\right)_\psi}{t} dt \le C_1 \int\limits_0^1 t^{\gamma_\psi - \varepsilon - 2 + \frac{\alpha}{m}} dt.$$

Последний интеграл конечен, когда $\gamma_\psi + \dfrac{\alpha}{m} - \varepsilon > 1$, а это возможно при достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Тогда по теореме 2 f принадлежит $L_1(T^m)$ и для любого $h \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$ имеем

$$\psi\left(\frac{\omega(f,h)_1}{h}\right) \le C \int\limits_0^{h^{m-1}} \frac{M_\psi(t)}{t} \frac{\omega\left(f,(ht)^{1/m}\right)_\psi}{ht} dt \le C_2 h^{\frac{\alpha}{m}-1} \int\limits_0^{h^{m-1}} M_\psi(t)\, t^{\frac{\alpha}{m}-2} dt \le$$

$$\le C_2 h^{\frac{\alpha}{m}-1} \int\limits_0^{h^{m-1}} C_\varepsilon t^{\gamma_\psi - \varepsilon} t^{\frac{\alpha}{m}-2} dt = C_3 h^{\frac{\alpha}{m}-1} \int\limits_0^{h^{m-1}} t^{\gamma_\psi + \frac{\alpha}{m} - 2 - \varepsilon} dt = C_4 h^{\alpha - m + (m-1)(\gamma_\psi - \varepsilon)}.$$

Для формулировки более общего случая вложений классов функций $\mathcal{H}^{\omega}_{\psi}(T^m)$ в $L_q(T^m)$, $q \in (0;1]$, нам понадобится следующее определение.

Функцию $\varphi(t)$ на полуоси $[0,\infty)$ называют квазивогнутой [1, с. 70], если:

1) $\varphi(0)=0$;

2) $\varphi(t)$ положительна и возрастает при $t>0$;

3) $\dfrac{\varphi(t)}{t}$ убывает при $t>0$.

В частности, для наименьшей вогнутой мажоранты $\overline{\varphi}(t)$ квазивогнутой функции $\varphi(t)$ выполняются неравенства (3).

Теорема 3. *Пусть $\psi\left(x^{1/q}\right)$ — квазивогнутая функция, $q\in(0;1]$, $\gamma_\psi>0$ и для $f\in L_\psi\left(T^m\right)$ конечен интеграл*

$$\int\limits_0^1 \frac{M_\psi\left(t^{1/q}\right)}{t}\frac{\omega\left(f,\ t^{1/m}\right)_\psi}{t}dt<\infty. \tag{22}$$

Тогда f принадлежит $L_q(T^m)$ и для всех $h\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ выполняется неравенство

$$\psi\left(\left(\frac{\omega(f,h)_q}{h}\right)^{1/q}\right)\le C\int\limits_0^{h^{m-1}}\frac{M_\psi\left(t^{1/q}\right)}{t}\frac{\omega\left(f,(ht)^{1/m}\right)_\psi}{ht}dt, \tag{23}$$

где константа C зависит от ψ, f, m, q.

Доказательство. Пусть $\Phi(x)=\psi\left(x^{1/q}\right), x\in R^1_+$. Учитывая (14), получаем

$$\psi\left(\left(\frac{\omega(f,h)_q}{h}\right)^{1/q}\right)=\Phi\left(\frac{\omega(f,h)_q}{h}\right)\le C_1\int\limits_{T^m}\Phi\left(\frac{1}{h}\|f_{1,\mathbf{t}}\|_q+\|f_{2,\mathbf{t}}\|_{\Lambda^1_q}\right)d\mathbf{t},\quad f_{1,\mathbf{t}}+f_{2,\mathbf{t}}=f_{\mathbf{t}}.$$

В качестве $f_{1,\mathbf{t}}$ и $f_{2,\mathbf{t}}$ рассмотрим функции, используемые при доказательстве теоремы 2.

Пусть $\overline{\Phi}(x)$ — наименьшая выпуклая вверх мажоранта функции $\Phi(x)$. Тогда $\overline{\Phi}(x)$ полуаддитивна (см., например, [5, с. 111]).

Как и в теореме 2, проводя аналогичные вычисления при $h=\dfrac{1}{2^n}$, $n\in\mathbb{N}$, а также учитывая неравенства (3) и полуаддитивность функции $\overline{\Phi}(x)$, имеем

$$\int\limits_{T^m}\Phi\left(2^n\|f_{1,\mathbf{t}}\|_q\right)d\mathbf{t}\le\int\limits_{T^m}\sum_{k>n}\sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{2^k-1}\overline{\Phi}\left[2^{n-mk}\left|\triangle_{\frac{1}{2^k}\mathbf{e}}\,f_{\mathbf{t}}\left(\frac{j_1}{2^k},\ldots,\frac{j_m}{2^k}\right)\right|^q\right]d\mathbf{t}\le$$

$$\le 2\int\limits_{T^m}\sum_{k>n}\sum_{j_1,\ldots,j_m=0}^{2^k-1}\psi\left[2^{\frac{n-mk}{q}}\left|\triangle_{\frac{1}{2^k}\mathbf{e}}\,f_{\mathbf{t}}\left(\frac{j_1}{2^k},\ldots,\frac{j_m}{2^k}\right)\right|\right]d\mathbf{t}\le$$

$$\le 2\sum_{k>n}2^{mk}M_\psi\left(2^{\frac{n-mk}{q}}\right)\omega\left(f,\frac{1}{2^k}\right)_\psi,$$

$$\int\limits_{T^m}\Phi\left(\|f_{2,\mathbf{t}}\|_{\Lambda^1_q}\right)d\mathbf{t}\le 2m\cdot 2^{nm}M_\psi\left(2^{\frac{n(1-m)}{q}}\right)\omega\left(f,\frac{1}{2^n}\right)_\psi.$$

Следовательно, получаем неравенство вида (23) при $h = \dfrac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}$,

$$\psi\left(\left(\frac{\omega(f,2^{-n})_q}{2^{-n}}\right)^{1/q}\right) \le C_1 \int\limits_0^{2^{n(1-m)}} \frac{M_\psi\left(t^{1/q}\right)}{t} \frac{\omega\left(f,(2^{-n}t)^{1/m}\right)_\psi}{2^{-n}t} dt,$$

где последний интеграл конечен по условию (22).

Для произвольного $h = \left(0, \dfrac{1}{2^n}\right]$ найдем $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\dfrac{1}{2^n} \le h < \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Тогда

$$\psi\left(\left(\frac{\omega(f,h)_q}{h}\right)^{1/q}\right) \le \psi\left(\left(\frac{\omega(f,2\cdot 2^{-n})_q}{2^{-n}}\right)^{1/q}\right) \le \psi\left(2^{1/q}\left(\frac{\omega(f,2^{-n})_q}{2^{-n}}\right)^{1/q}\right) \le$$

$$\le M_\psi\left(2^{1/q}\right)\psi\left(\left(\frac{\omega(f,2^{-n})_q}{2^{-n}}\right)^{1/q}\right) \le M_\psi\left(2^{1/q}\right) C_1 \int\limits_0^{2^{n(1-m)}} \frac{M_\psi\left(t^{1/q}\right)}{t} \frac{\omega\left(f,(2^{-n}t)^{1/m}\right)_\psi}{2^{-n}t} dt \le$$

$$\le C_2 \int\limits_0^{h^{m-1}} \frac{M_\psi\left(t^{1/q}\right)}{t} \frac{\omega\left(f,(ht)^{1/m}\right)_\psi}{ht} dt.$$

Теорема 3 доказана.

Следствие 2. *Пусть $\psi\left(x^{1/q}\right)$ — квазивогнутая функция, $q \in (0;1)$, $\gamma_\psi > 0$, f принадлежит $\Lambda_\psi^\alpha(T^m)$ и $\alpha \in (0,1]$ такое, что $\dfrac{\gamma_\psi}{q} + \dfrac{\alpha}{m} > 1$. Тогда f принадлежит $L_q(T^m)$ и для любого $h \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$ и всех положительных ε таких, что $\dfrac{\gamma_\psi - \varepsilon}{q} + \dfrac{\alpha}{m} > 1$, выполняется неравенство*

$$\psi\left(\left(\frac{\omega(f,h)_q}{h}\right)^{1/q}\right) \le C h^{\alpha - m + (m-1)\frac{\gamma_\psi - \varepsilon}{q}},$$

где константа C зависит от $\psi,\ f,\ m,\ \alpha,\ \varepsilon,\ q$.

Автор выражает благодарность С. А. Пичугову, под руководством которого выполнена эта работа.

1. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
2. *Пичугов С. А.* Гладкость функций в метрических пространствах L_ψ // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 9. – С. 1214 – 1232.
3. *Стороженко Э. А.* О некоторых теоремах вложения // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 2. – С. 187 – 200.
4. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators. – New York: Acad. Press, 1988. – 469 p.
5. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

Получено 24.11.12,
после доработки — 08.12.13