УДК 517.5

Е. А. Севостьянов (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О РАВНОСТЕПЕННО НЕПРЕРЫВНЫХ СЕМЕЙСТВАХ ОТОБРАЖЕНИЙ, НЕ ПРИНИМАЮЩИХ ЗНАЧЕНИЯ ИЗ ПЕРЕМЕННОГО МНОЖЕСТВА

The present paper is devoted to the study of the classes of mappings with unbounded characteristics of quasiconformality. We prove sufficient conditions for the equicontinuity of the families of these mappings that do not take values from a set E provided that some real-valued characteristic $c(E)$ of these mappings satisfies a lower estimate of the form $c(E) \geq \delta$, $\delta \in \mathbb{R}$.

Дану роботу присвячено вивченню класів відображень з необмеженою характеристикою квазіконформності. Отримано достатні умови одностайної неперервності сімей таких відображень, що не набувають значень із множини E, деяка дійснозначна характеристика $c(E)$ котрих задовольняє оцінку знизу вигляду $c(E) \geq \delta$, $\delta \in \mathbb{R}$.

1. Введение. Настоящая статья посвящена изучению пространственных отображений, более общих, чем отображения с ограниченным искажением. Отображения с ограниченным искажением введены в рассмотрение Ю. Г. Решетняком (см. [1]).

Всюду далее m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ — одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$, M — конформный модуль семейства кривых (см., например, [2], разд. 6, гл. I). В работе автора [3] были получены результаты об оценках искажения, равностепенной непрерывности и нормальности семейств отображений, более общих, чем квазирегулярные. Речь идет об отображениях $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, удовлетворяющих в точке $x_0 \in D$ оценкам вида

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_1, S_2, R\right)\right)\right) \leq \int\limits_R Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{1}$$

для любого кольца $R = R(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$, и для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1\,. \tag{2}$$

Такие отображения будем называть *кольцевыми Q-отображениями* в точке x_0. При этом случай $Q(x) \leq K \equiv \mathrm{const}$ соответствует отображениям с ограниченным искажением (или квазирегулярным отображениям), а случай $Q(x) \equiv 1$ — случаю конформных отображений и аналитических функций (см. монографии [1, 4], а также [5], теорема 1). В работе [3] найдены условия на, вообще говоря, неограниченную функцию Q, обеспечивающие равностепенную непрерывность и нормальность семейств отображений вида (1), не принимающих значения из множества положительной емкости. (Всюду далее равностепенная непрерывность (нормальность) семейств отображений понимается в смысле хордального расстояния.) Упомянутые выше условия равностепенной непрерывности (нормальности) являются достаточными, но не являются необходимыми условиями. В частности, семейство отображений $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$ вида (1) равностепенно непрерывно в точке $x_0 \in D$, если $\mathrm{cap}\, E > 0$ и $Q \in FMO(x_0)$ (см. [3], теорема 5.1). Здесь множество E фиксировано и не зависит от f. Определение и примеры функций $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ класса $FMO(x_0)$, являющихся обобщением класса BMO, см., например, в работе [6].

В данной статье рассматривается случай, когда условие независимости множества E от отображения f может быть опущено. Ясно, что наличие „общего” E для всего семейства отображений может оказаться существенным: простой пример семейства отображений $f_m(z) = z^m$, $z \in \mathbb{C}$, рассматриваемых в круге $B(0,2) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 2\}$, не являющегося семейством, равностепенно непрерывным в точках сферы $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ (а также нормальным в указанной области $B(0,\,2)$), показывает, что если каждое отображение в отдельности не принимает значения из некоторого множества положительной емкости E_m, то равностепенная непрерывность этого семейства не следует даже в случае $Q(z) \equiv 1$. Однако, при определенных условиях на E результат о равностепенной непрерывности семейства отображений остается справедливым, даже если множество $E = E_f$ будет, вообще говоря, зависеть от f.

Отметим еще одну подробность. Как было показано в работе [7] (теорема 5.1 и следствие 5.5) (см. также [8], теоремы 7.5 и 7.6, следствия 7.10 – 7.12), для нормальности (равностепенной непрерывности) семейств гомеоморфизмов, удовлетворяющих оценке (1) при $Q \in FMO(x_0)\quad \forall\, x_0 \in D$, достаточно, чтобы это семейство не принимало всего лишь два фиксированных значения в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Аналогичное утверждение становится неверным для отображений, не являющихся гомеоморфизмами даже при $Q(x) \equiv 1$, как показывает все тот же пример аналитических функций на плоскости $f_m(z) = z^m$, $m \in \mathbb{N}$, в области $D = B(0,2) \setminus \{0\}$ (все отображения семейства не принимают значения 0 и ∞ в указанной области). Результат Р. Миньйович [9] утверждает, что для равностепенной непрерывности (нормальности) семейств отображений в случае ограниченных Q и $n \ge 2$ достаточно, чтобы семейство отображений не принимало $l+1$ различных значений, где натуральное число l вполне определяется коэффициентом квазиконформности K и размерностью пространства n (см., например, [9], теорема 4). Что касается рассматриваемого в статье случая неограниченных функций Q, конечного числа не принимаемых значений может, вообще говоря, оказаться недостаточно. Однако справедлив следующий результат (см. также работу [10], теорема 4.2 и следствие 4.6, где рассмотрен случай ограниченных Q).

Теорема 1. *Семейство $\mathfrak{F}_{Q,\delta}$ всех открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E_f$ в точке $x_0 \in D$ таких, что $c(E_f) \ge \delta > 0$, где множество E_f компактно, а $c(\cdot)$ — некоторая функция множества (которая будет определена ниже), равностепенно непрерывно в точке $x_0 \in D$, как только выполнено хотя бы одно из следующих условий:* 1) $Q \in FMO(x_0)$; 2) $q_{x_0}(r) \le C \cdot (\log 1/r)^{n-1}$ *при* $r \to 0$, *где* $C > 0$ — *некоторая постоянная*; 3) *при некотором* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0)$ *имеет место соотношение*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t q_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} = \infty\,. \tag{3}$$

2. Вспомогательные утверждения. Основные определения и обозначения, используемые ниже, могут быть найдены в работе [3].

В дальнейшем в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$ используется *сферическая* (*хордальная*) *метрика* $h(x,y) = |\pi(x) - \pi(y)|$, где π — стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n((1/2)e_{n+1}, 1/2)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}\,,\quad h(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}\,,\quad x\neq\infty\neq y\,.$$

Хордальным диаметром множества $E\subset\overline{\mathbb{R}^n}$ называется величина $h(E)=\sup_{x\,,y\in E}h(x,y)$. Всюду далее ω_{n-1} обозначает площадь единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$.

Как обычно, конденсатором $E=(A,C)$ называется пара множеств, где A — открыто и C — компактное подмножество A. Понятие емкости конденсатора и прочие мы считаем известными (см. [4], разд. 10, гл. II). Следующая лемма (в несколько более слабой форме) была доказана в [3] (лемма 3.2).

Лемма 1. *Пусть $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}^n}$, $n\geq 2$, — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0\in D$. Предположим, что для некоторых чисел $\varepsilon_0\in(0,\operatorname{dist}(x_0,\partial D))$, $\varepsilon_0'\in(0,\varepsilon_0)$ и семейства неотрицательных измеримых по Лебегу функций $\{\psi_\varepsilon(t)\}$, $\psi_\varepsilon\colon(\varepsilon,\varepsilon_0)\to[0,\infty]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0')$, выполнено условие*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0}Q(x)\cdot\psi_\varepsilon^n(|x-x_0|)\,dm(x)\leq F(\varepsilon,\varepsilon_0)\qquad\forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0')\,,\tag{4}$$

где $F(\varepsilon,\varepsilon_0)$ — некоторая функция и

$$0<I(\varepsilon,\varepsilon_0):=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi_\varepsilon(t)dt<\infty\qquad\forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0')\,.\tag{5}$$

Тогда

$$\operatorname{cap}f(E)\leq F(\varepsilon,\varepsilon_0)/I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)\qquad\forall\,\varepsilon\in\left(0,\,\varepsilon_0'\right)\,,\tag{6}$$

где $E=(A,\,C)$, $A=B\,(x_0,r_0)$, $C=\overline{B(x_0,\varepsilon)}$, $r_0=\operatorname{dist}(x_0,\,\partial D)$.

Доказательство. Рассмотрим конденсатор $E=(A,C)$, где A и C таковы, как указано в условии леммы. В случае $D:=\mathbb{R}^n$ полагаем $A:=\mathbb{R}^n$. Заметим, что пара множеств $f(E)=(f(A),f(C))$ также является конденсатором в силу открытости и непрерывности отображения f (определения конденсатора и емкости конденсатора см., например, в [4], разд. 10, гл. II). Если $\operatorname{cap}f(E)=0$, доказывать нечего. Пусть $\operatorname{cap}f(E)\neq 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\infty\notin f(A)$.

Пусть Γ_E — семейство всех кривых вида $\gamma\colon[a,\,b)\to A$ таких, что $\gamma(a)\in C$ и $|\gamma|\cap\cap(A\setminus F)\neq\varnothing$ для произвольного компакта $F\subset A$, где $|\gamma|=\{x\in\mathbb{R}^n\colon\exists\,t\in[a,b)\colon\gamma(t)=x\}$ — носитель кривой γ. Известно, что $\operatorname{cap}E=M(\Gamma_E)$ (см., например, [4], предложение 10.2, гл. II). Для конденсатора $f(E)$ рассмотрим семейство кривых $\Gamma_{f(E)}$. Заметим также, что каждая кривая $\gamma\in\Gamma_{f(E)}$ имеет максимальное поднятие при отображении f, лежащее в A, с началом в C (см. [4], следствие 3.3, гл. II) (определение максимального поднятия кривой при отображении см. там же). Пусть Γ^* — семейство всех максимальных поднятий кривых $\Gamma_{f(E)}$ при отображении f с началом в C. Заметим, что $\Gamma^*\subset\Gamma_E$ (детали доказательства леммы 3.2 см. в [3]). Кроме того, заметим, что $\Gamma_{f(E)}>f(\Gamma^*)$, и, следовательно,

$$M\left(\Gamma_{f(E)}\right)\leq M\left(f(\Gamma^*)\right)\,.\tag{7}$$

Рассмотрим $S_\varepsilon = S(x_0,\,\varepsilon) = \{x\in\mathbb{R}^n\colon |x-x_0| = \varepsilon\}$, $S_{\varepsilon_0} = S(x_0,\,\varepsilon_0) = \{x\in\mathbb{R}^n\colon |x-x_0| = = \varepsilon_0\}$, где ε_0 взято из условия леммы и $\varepsilon\in(0,\,\varepsilon_0^{\prime})$. Всюду далее полагаем $R(r_1,r_2,x_0) = \{x\in \in\mathbb{R}^n\colon r_1<|x-x_0|<r_2\}$. Заметим, что поскольку $\Gamma^*\subset\Gamma_E$, то $\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, R(\varepsilon,\varepsilon_0,x_0)\right) < \Gamma^*$ и, следовательно, $f(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, R(\varepsilon,\varepsilon_0,x_0)\right)) < f(\Gamma^*)$. Значит,

$$M\left(f(\Gamma^*)\right) \le M\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, R(\varepsilon,\varepsilon_0,x_0)\right)\right)\right)\,. \tag{8}$$

Из соотношений (7) и (8) следует, что

$$M\left(\Gamma_{f(E)}\right)\,\le M\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0}, R(\varepsilon,\varepsilon_0,x_0)\right)\right)\right)$$

и, таким образом, согласно предложению 10.2 из [4] (гл. II)

$$\operatorname{cap}\,f(E)\le M\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon\,, S_{\varepsilon_0}, R(\varepsilon,\varepsilon_0,x_0)\right)\right)\right)\,. \tag{9}$$

Рассмотрим семейство измеримых функций $\eta_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon(t)/I(\varepsilon,\varepsilon_0)$, $t\in(\varepsilon,\,\varepsilon_0^{\prime})$. Заметим, что для всех таких $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0^{\prime})$ выполнено равенство $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\eta_\varepsilon(t)\,dt = 1$. Тогда по определению кольцевого Q-отображения в точке x_0 для любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0^{\prime})$

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_\varepsilon\,, S_{\varepsilon_0}, R(\varepsilon,\varepsilon_0,x_0)\right)\right)\right)\,\le \frac{1}{I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)}\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi_\varepsilon^n(|x-x_0|)\,\,dm(x)\,. \tag{10}$$

Наконец, из соотношений (4), (9) и (10) следует соотношение (6).

Лемма 1 доказана.

Дальнейшее изложение тесно связано с работой [10], где исследовались отображения с ограниченным искажением. В настоящем пункте будут получены достаточные условия равностепенной непрерывности (нормальности) семейств открытых дискретных отображений, удовлетворяющих оценкам (1), (2), более общие по сравнению с результатами автора (см. [3], а также комментарии во введении по этому поводу). Для этого, как и в случае ограниченных функций Q, нам понадобится введение специальной функции множеств $c(\cdot)$.

Как и прежде, для множеств E и $F\subset\overline{\mathbb{R}^n}$ символ $\Gamma(E,F,D)$ обозначает семейство всех кривых $\gamma\colon[a,b]\to\overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т. е. $\gamma(a)\in E$, $\gamma(b)\in F$ и $\gamma(t)\in D$ при $a<t<b$. При $D:=\overline{\mathbb{R}^n}$ полагаем $\Gamma(E,F):=\Gamma(E,F,\overline{\mathbb{R}^n})$. Пусть $Q(x,t) = \{y\in\overline{\mathbb{R}^n}\colon h(x,y) < < t\}$ — сферический шар с центром в точке x радиуса t. Для $x\in\overline{\mathbb{R}^n}$, множества $E\subset\overline{\mathbb{R}^n}$ и чисел $0<r<t<1$ полагаем $\widetilde{x} = -\dfrac{x}{|x|^2}$,

$$m_t(E,r,x) = M\left(\Gamma\left(\partial Q(x,t), E\cap\overline{Q(x,r)}\right)\right)\,,$$

$$m(E,x) = m_{\sqrt{3}/2}\left(E,\frac{\sqrt{2}}{2},x\right)\,,$$

и, кроме того,

$$\begin{gathered} c(E,x) = \max\left\{m(E,x), m(E,\widetilde{x})\right\}\,,\\ c(E) = \inf\limits_{x\in\overline{\mathbb{R}^n}} c(E,x)\,. \end{gathered} \tag{11}$$

Заметим, что для компактного множества $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ имеет место следующая взаимосвязь: $c(E) = 0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{cap} E = 0$ (см. [10], следствие 3.19).

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Обозначим через $\mathfrak{F}_{Q,\delta}$ семейство всех открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E_f$ в точке $x_0 \in D$ таких, что $c(E_f) \geq \delta > 0$, где множество E_f компактно, а функция множества $c(\cdot)$ определена соотношением (11).

Следующий вспомогательный результат может быть доказан для семейства отображений $\mathfrak{F}_{Q,\delta}$ в наиболее общем случае.

Лемма 2. *Предположим, что найдутся* $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ *и функция* $\psi\colon (0, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$ *такие, что*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_1) \tag{12}$$

и

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\, \psi^n(|x - x_0|)\, dm(x) = o\left(I^n\left(\varepsilon, \varepsilon_0\right)\right) \tag{13}$$

при $\varepsilon \to 0$. *Тогда семейство отображений* $\mathfrak{F}_{Q,\delta}$ *равностепенно непрерывно в точке* x_0.

Доказательство. Для фиксированного отображения $f \in \mathfrak{F}_{Q,\delta}$ рассмотрим конденсаторы $E = (A, C)$ и $f(E) = E' = (f(A), f(C))$, где $C := \overline{B(x_0, \varepsilon)}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, $A = B(x_0, r_0)$, $r_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Пусть $\Gamma_{E'}$ и Γ_E — семейства кривых в смысле леммы 1. Заметим, что $\Gamma(f(C), E_f) > \Gamma_{E'}$ (см. [11], теорема 1, разд. I, § 46) и, следовательно, в силу свойства минорирования модуля (см. [2], теорема 6.4), леммы 1 и условия (13)

$$M(\Gamma(f(C), E_f)) \leq M(\Gamma_{E'}) = \operatorname{cap} f(E) \leq \alpha(\varepsilon)\,, \tag{14}$$

где $\alpha(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. С другой стороны, согласно теореме 3.14 из [10]

$$M(\Gamma(f(C), E_f)) \geq \beta_n \min\{c(f(C)), c(E_f)\}\,, \tag{15}$$

где постоянная β_n зависит только от n. Поскольку для каждого связного множества F в $\overline{\mathbb{R}^n}$ выполняется неравенство $c(F) \geq a_n h(F)$, где $h(F)$ — хордальный диаметр множества F, а a_n — некоторая постоянная (см. [10], следствие 3.13), имеем

$$c(f(C)) \geq a_n\, h(f(C))\,. \tag{16}$$

Известно, что $c(E) \leq \omega_{n-1} \cdot \left(\log \sqrt{3}\right)^{1-n}$ для любого множества $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ (см. [10], соотношение (3.7) и определение функции $c(\cdot)$ в (11)), так что

$$\frac{c(E)}{\omega_{n-1} \cdot \left(\log \sqrt{3}\right)^{1-n}} \leq 1 \quad \forall E \subset \overline{\mathbb{R}^n}\,. \tag{17}$$

Предположим, что $\min$ в правой части (15) равен $c(f(C))$, тогда в силу соотношений (16) и (17)

$$M(\Gamma(f(C), E_f)) \geq \beta_n\, a_n\, h(f(C)) \geq \frac{\beta_n\, a_n\, h(f(C)) c(E_f)}{\omega_{n-1} \cdot \left(\log \sqrt{3}\right)^{1-n}}\,. \tag{18}$$

Пусть $\min\{c(f(C)), c(E_f)\} = c(E_f)$, тогда из (15) следует, что

$$M(\Gamma(f(C), E_f)) \geq \beta_n\, c(E_f) \geq \beta_n\, h(f(C))c(E_f)\,. \tag{19}$$

Полагая $c_n := \min\left\{\beta_n, \dfrac{\beta_n\, a_n}{\omega_{n-1}\cdot\left(\log\sqrt{3}\right)^{1-n}}\right\}$, из (18) и (19) имеем

$$M(\Gamma(f(C), E_f)) \geq c_n \cdot h(f(C))c(E_f) \geq c_n\delta h(f(C))\,. \tag{20}$$

Из соотношений (14) и (20) следует, что

$$h(f(C)) \leq \frac{\alpha(\varepsilon)}{c_n\delta}\,. \tag{21}$$

Поскольку $\alpha(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, из (21) следует, что для любого $\sigma > 0$ найдется $\Delta = \Delta(\sigma)$ такое, что $h(f(C)) < \sigma$, как только $\varepsilon < \Delta$. Тем самым $h(f(x), f(x_0)) < \sigma$ при всех $x \in B(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon < \Delta$. Таким образом, неравенство $h(f(x), f(x_0)) < \sigma$ имеет место для всех $x \in B(x_0, \Delta)$ и всех $f \in \mathfrak{F}_{Q,\Delta}$, что и доказывает равностепенную непрерывность семейства отображений $\mathfrak{F}_{Q,\Delta}$ в точке x_0.

Лемма 2 доказана.

Следующий результат в немного более слабой форме представлен в работе [12] (см. лемму 8).

Лемма 3. *Предположим, что функция* $Q\colon D \to [0,\infty]$ *удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий в точке* $x_0 \in D$: 1) $Q \in FMO(x_0)$; 2) $q_{x_0}(r) \leq C\cdot(\log 1/r)^{n-1}$; 3) *при некотором* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0)$ *имеет место соотношение* (3). *Тогда выполнены условия* (12), (13) *леммы* 2.

Доказательство. В случае 1 полагаем $\psi(t) := \dfrac{1}{t\log 1/t}$. Пусть $\varepsilon_0 < e^{-1}$ произвольно. Тогда в принятых обозначениях имеет место соотношение

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt = \log\frac{\log 1/\varepsilon}{\log 1/\varepsilon_0}\,,$$

а условие (13) выполнено в силу следствия 2.3 из [6] (см. также [8], лемма 6.1, гл. 6). Таким образом, условия (12), (13) выполнены. Поскольку случай 2 является частным случаем 3, рассмотрим случай 3. При достаточно малых ε рассмотрим функцию ψ, заданную соотношением

$$\psi(t) = \begin{cases} 1/\left[tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)\right]\,, & t \in (\varepsilon, \varepsilon_0),\\ 0\,, & t \notin (\varepsilon, \varepsilon_0)\,, \end{cases}$$

а функцию $I(\varepsilon, \varepsilon_0)$, как и прежде, определим по правилу (12). В силу условия (3) найдется $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ такое, что $I(\varepsilon, \varepsilon_0) > 0$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$. Кроме того, $I(\varepsilon, \varepsilon_0) < \infty$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ (см. [12], замечание 3). Наконец, заметим, что функция ψ удовлетворяет также соотношению (13), поскольку выполнено условие

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\,\psi^n(|x-x_0|)\; dm(x) = \omega_{n-1}\, I(\varepsilon, \varepsilon_0)$$

и, кроме того, $I(\varepsilon, \varepsilon_0) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0))$ в силу (3).

Лемма 3 доказана.

3. Основные результаты. Из лемм 2 и 3 непосредственно следует утверждение теоремы 1.

Разумеется, условие вида $c(E_f) \geq \delta > 0$ может оказаться затруднительным для проверки вследствие сложности подсчета величины $c(E_f)$. Однако в большинстве случаев представляется возможным обойтись другими сравнительно простыми условиями, проверяющимися непосредственно. По этой причине рассмотрим 2 случая: 1) множества $c(E_f)$ являются связными для каждого f; 2) множество $c(E_f)$ не обязано быть связным. Справедливы следующие утверждения.

***Следствие* 1.** *Семейство $\mathfrak{A}_{Q,\delta}$, состоящее из всех открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E_f$ в точке $x_0 \in D$ таких, что $h(E_f) \geq \delta > 0$, где множество E_f компактно и связно, равностепенно непрерывно в точке $x_0 \in D$, как только выполнено хотя бы одно из следующих условий*: 1) $Q \in FMO(x_0)$; 2) $q_{x_0}(r) \leq C \cdot (\log 1/r)^{n-1}$ *при* $r \to 0$, *где* $C > 0$ — *некоторая постоянная*; 3) *при некотором* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0)$ *имеет место соотношение* (3).

Доказательство. Заметим, что для произвольного связного множества $E_f \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ имеет место неравенство $c(E_f) \geq a_n \cdot h(E)$, где, как и прежде, функция множеств $c(\cdot)$ определена в (11), а $h(\cdot)$ — хордальный диаметр множества (см. [10], теорема 1.1, пункт (4)). Таким образом, для любого отображения $f \in \mathfrak{A}_{Q,\delta}$ выполнено условие $c(E_f) \geq a_n \cdot \delta$. Заключение следствия 1 вытекает теперь из теоремы 1.

Пусть $h(E, F)$ — хордальное расстояние между множествами $E, F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, $h(E, F) = \sup_{x\in E, y\in F} h(x, y)$. Обозначим символом $\mathfrak{B}_{Q,\delta}$ семейство всех открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E_f$ в точке $x_0 \in D$, где множество E_f компактно, таких, что для каждого f найдется компактное множество $\widetilde{E_f} \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, для которого $h(E_f, \widetilde{E_f}) \geq \delta > 0$ и $M(\Gamma(E_f, \widetilde{E_f}, \overline{\mathbb{R}^n})) \geq \delta$. Имеет место следующее утверждение.

***Следствие* 2.** *Семейство отображений $\mathfrak{B}_{Q,\delta}$ равностепенно непрерывно в точке $x_0 \in D$, как только выполнено хотя бы одно из следующих условий*: 1) $Q \in FMO(x_0)$; 2) $q_{x_0}(r) \leq C \cdot (\log 1/r)^{n-1}$ *при* $r \to 0$, *где* $C > 0$ — *некоторая постоянная*; 3) *при некотором* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0)$ *имеет место соотношение* (3).

Доказательство. В силу теоремы 3.15 из [10] для каждого из отображений $f \in \mathfrak{B}_{Q,\delta}$ имеет место соотношение

$$c(E_f) \geq \min\{c(E_f), c(\widetilde{E_f})\} \geq \frac{1}{\alpha}\, M(\Gamma(E_f, \widetilde{E_f}, \overline{\mathbb{R}^n})) \geq \frac{\delta}{\alpha}\,,$$

где постоянная $\alpha > 0$ зависит только от размерности пространства n и δ. Тогда заключение следствия 2 вытекает из теоремы 1.

***Замечание* 1.** Как показывает все тот же пример семейства отображений $f_m(z) = z^m$, $z \in B(0, 2) \setminus \{0\}$, условие связности множества E_f в формулировке следствия 1 является существенным. Указанное семейство не является нормальным в указанной области, хотя каждое из отображений этого семейства не принимает значения множества $E_f = \{0, \infty\}$, при этом $h(E_f) = 1$ для всех f. Причина такого обстоятельства заключается в том, что множество E_f не связно.

***Замечание* 2.** Аналогично изложенному выше, пример семейства отображений $f_m(z) = z^m$, $z \in B(0, 2) \setminus \{0\}$, показывает, что ни одно из условий

$$h(E_f, \widetilde{E_f}) \geq \delta > 0, \qquad M(\Gamma(E_f, \widetilde{E_f}, \overline{\mathbb{R}^n})) \geq \delta\,,$$

входящих в определение класса $\mathfrak{B}_{Q,\delta}$ из формулировки следствия 2, не может быть опущено.

По этому поводу рассмотрим вместо класса $\mathfrak{B}_{Q,\delta}$ семейство $\mathfrak{B}'_{Q,\delta}$, состоящее из открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E_f$ в точке $x_0 \in D$, где множество E_f компактно, таких, что для каждого f найдется компактное множество $\widetilde{E_f} \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, для которого $h(E_f, \widetilde{E_f}) \geq \delta > 0$. Наряду с этим рассмотрим семейство $\mathfrak{B}''_{Q,\delta}$, состоящее из открытых дискретных кольцевых Q-отображений $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E_f$ в точке $x_0 \in D$, где множество E_f компактно, таких, что для каждого f найдется компактное множество $\widetilde{E_f} \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, для которого $M(\Gamma(E_f, \widetilde{E_f}, \overline{\mathbb{R}^n})) \geq \delta$.

Заметим, что семейство отображений $f_m(z) = z^m$, $z \in B(0,2) \setminus \{0\}$, представляет собой пример семейства как класса $\mathfrak{B}'_{Q,\delta}$ при $Q \equiv 1$, так и класса $\mathfrak{B}''_{Q,\delta}$ при $Q \equiv 1$. В первом случае указанное семейство принадлежит $\mathfrak{B}'_{1,\delta}$ при некотором δ, поскольку оно не принимает два фиксированных значения 0 и ∞. Во втором случае семейство отображений $f_m(z) = z^m$, $z \in B(0,2) \setminus \{0\}$, принадлежит классу $\mathfrak{B}''_{1,\delta}$ при некотором δ, так как для любого $m \in \mathbb{N}$ можно указать $R_m > 0$ такое, что $f_m\left(B(0,2) \setminus \{0\}\right) \subset B(0, R_m)$, но тогда для множества $E_m := \overline{\mathbb{C}} \setminus B(0, 2R_m)$ будем иметь $M(\Gamma(E_m, B(0,R_m), \overline{\mathbb{C}})) = \dfrac{2\pi}{\log 2} := \delta > 0$, где $\delta > 0$ не зависит от m.

И в первом, и во втором случае причина того, что семейство отображений $f_m(z) = z^m$, $z \in B(0,2) \setminus \{0\}$, не является нормальным, заключается в том, что в точности одно из условий из определения класса $\mathfrak{B}_{Q,\delta}$: условие $M(\Gamma(E_f, \widetilde{E_f}, \overline{\mathbb{R}^n})) \geq \delta$ либо условие $h(E_f, \widetilde{E_f}) \geq \delta > 0$ нарушается.

В заключение данного пункта приведем следующий, на наш взгляд, немаловажный результат, являющийся (в некотором смысле) продолжением и уточнением теоремы 1. Этот результат, в частности, показывает, что условие (3) является не только достаточным, но и необходимым для наличия свойства равностепенной непрерывности (нормальности) соответствующего семейства отображений в точке x_0.

Теорема 2. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Для каждой функции $Q\colon D \to [1,\infty]$, $Q \in L^1_{\rm loc}(D)$, такой, что $\displaystyle\int_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t q_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} < \infty$, найдется семейство равномерно ограниченных кольцевых Q-гомеоморфизмов в точке x_0, не являющееся равностепенно непрерывным в точке x_0.*

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $D = \mathbb{B}^n = \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| < 1\right\}$ и $x_0 = 0$. Определим последовательность отображений $f_m\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$f_m(x) = \frac{x}{|x|}\rho_m(|x|)\,, \qquad f_m(0) := 0\,,$$

где

$$\rho_m(r) = \exp\left\{-\int\limits_r^1 \frac{dt}{t q_{0,m}^{1/(n-1)}(t)}\right\}, \qquad q_{0,m}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{|x|=r} Q_m(x)\, dS\,,$$

$$Q_m(x) = \begin{cases} Q(x), & |x| > 1/m, \\ 1\,, & |x| \leq 1/m. \end{cases}$$

Заметим, что каждое из отображений f_m, $m = 1, 2, \ldots$, является кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке $x_0 = 0$. Действительно, при произвольном $r \in (0,1)$ имеем $f(S(0,r)) = S(0, R_m)$, где

$$R_m := \exp\left\{ -\int\limits_r^1 \frac{dt}{t q_{0,m}^{1/(n-1)}(t)} \right\}.$$

Заметим, что

$$f_m(\Gamma(S(0,r_1), S(0,r_2), R(r_1,r_2,0))) = \Gamma(S(0,R_{1,m}), S(0,R_{2,m}), R(R_{1,m}, R_{2,m}, 0))\,,$$

где $\quad R_{i,m} := \exp\left\{ -\int_{r_i}^1 \frac{dt}{t q_{0,m}^{1/(n-1)}(t)} \right\}$, $\ i = 1, 2$. Согласно [2] (п. 7.5)

$$M(f(\Gamma(S(0,r_1), S(0,r_2), R(r_1,r_2,0)))) = \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t q_{0,m}^{1/(n-1)}(t)} \right)^{n-1}} \le \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t q_0^{1/(n-1)}(t)} \right)^{n-1}}\,.$$

Следовательно, отображение f_m — кольцевой Q-гомеоморфизм в нуле (см., например, [7], теорема 2.1). Заметим, что $|f_m(x)| \le 1$ для всех $m \in \mathbb{N}$ и, таким образом, семейство отображений $\{f_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$ равномерно ограничено. Кроме того, для произвольной последовательности x_m такой, что $|x_m| = 1/m$, $m = 1, 2, \ldots$, имеем $|f_m(x_m)| \ge \sigma$, где σ не зависит от m. Окончательно, для некоторого числа σ и произвольного элемента последовательности $1/(m-1)$, $m = 2, 3, \ldots$, найдутся $x_m \in \mathbb{B}^n$ и элемент семейства отображений $f_m \in \{f_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$ такие, что $|x_m - 0| < 1/(m-1)$ и, в то же время, $|f_m(x_m) - f_m(0)| \ge \sigma$. Таким образом, семейство отображений $\{f_l(x)\}_{l=1}^{\infty}$ не является равностепенно непрерывным в нуле.

Теорема 2 доказана.

***Замечание* 3.** Изучению отображений, удовлетворяющих условиям искажения модулей семейств кривых, условиям искажения емкостей конденсаторов, а также соответствующим приложениям к классам Соболева и другим известным классам отображений посвящено много статей и монографий (см., например, [8, 13 – 19]). Результаты, полученные в настоящей статье, могут быть применены к широким классам отображений на плоскости и в пространстве.

1. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982.
2. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971. – **229**.
3. *Севостьянов Е. А.* Теория модулей, емкостей и нормальные семейства отображений, допускающих ветвление // Укр. мат. вестн. – 2007. – **4**, № 4. – С. 582 – 604.
4. *Rickman S.* Quasiregular mappings // Res. Math. and Relat. Areas. – Berlin: Springer-Verlag, 1993. – **26**, № 3.
5. *Полецкий Е. А.* Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Мат. сб. – 1970. – **83**, № 2. – С. 261 – 272.
6. *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395 – 417.
7. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн. – 2007. – **48**, № 6. – С. 1361 – 1376.
8. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Sci. + Business Media, LLC, 2009.

9. *Miniowitz R.* Normal families of quasimeromorphic mappings // Proc. Amer. Math. Soc. – 1982. – **84**, № 1. – P. 35 – 43.
10. *Vuorinen M.* Some inequalities for the moduli of curve families // Mich. Math. J. – 1983. – **30**. – P. 369 – 380.
11. *Куратовский К.* Топология. – М.: Мир, 1969. – Т. 2.
12. *Севостьянов Е. А.* О точках ветвления отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Сиб. мат. журн. – 2010. – **51**, № 5. – С. 1129 – 1146.
13. *Andreian Cazacu C.* On the length-area dilatation // Complex Var. Theory Appl. – 2005. – **50**, № 7–11. – P. 765 – 776.
14. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397 – 1420.
15. *Cristea M.* Local homeomorphisms having local ACL^n inverses // Compl. Var. and Ellipt. Equat. – 2008. – **53**, № 1. – P. 77 – 99.
16. *Golberg A., Salimov R.* Topological mappings of integrally bounded p-moduli // Ann. Univ. Bucharest (Math. Ser.). – 2012. – **3**, № 1. – P. 49 – 66.
17. *Миклюков В. М.* Функции весовых классов Соболева, анизотропные метрики и вырождающиеся квазиконформные отображения. – Волгоград: Изд-во Волгоград. гос. ун-та, 2010.
18. *Миклюков В. М.* Введение в негладкий анализ. – 2-е изд. – Волгоград: Изд-во Волгоград. гос. ун-та, 2008.
19. *Миклюков В. М.* Геометрический анализ. Дифференциальные формы, почти-решения, почти квазиконформные отображения. – Волгоград: Изд-во Волгоград. гос. ун-та, 2007.

Получено 06.04.13