УДК 512.64

А. М. Романів, В. П. Щедрик (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

НАЙБІЛЬШИЙ СПІЛЬНИЙ ДІЛЬНИК МАТРИЦЬ, ОДНА З ЯКИХ МАЄ ОДИН ВІДМІННИЙ ВІД ОДИНИЦІ ІНВАРІАНТНИЙ МНОЖНИК

We study the structure of greatest common divisor of matrices one of which is a disappear matrix. In this connection, we indicate the Smith normal form and the transforming matrices of the left greatest common divisor.

Исследуется структура наибольшего общего делителя матриц, одна из которых имеет один отличный от единицы инвариантный множитель. В связи с этим указаны форма Смита и преобразующие матрицы наибольшего общего левого делителя.

1. Вступ. Нехай R — комутативна область елементарних дільників [1] з $1 \neq 0$, тобто така область, над якою для кожної матриці D існують такі оборотні матриці P, Q відповідних розмірів, що

$$PDQ = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0),$$

де $d_i \mid d_{i+1}$, $i = 1, \ldots, r-1$. При цьому матрицю $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0)$ називають формою Сміта, d_i — інваріантними множниками, а матриці P та Q — лівою та правою перетворювальними матрицями матриці A. Іноді, для зручності, матрицю D будемо записувати у вигляді

$$D = P^{-1}\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0)Q^{-1}.$$

Нехай A, B — $(n \times n)$-матриці над R. Якщо $A = BC$, то кажуть, що матриця B є лівим дільником матриці A. Якщо $A = DA_1$ та $B = DB_1$, то матрицю D називають спільним лівим дільником матриць A та B. Окрім того, якщо матриця D ділиться зліва на кожний спільний лівий дільник матриць A та B, то матрицю D називають **найбільшим спільним лівим дільником** (н. с. л. д.) матриць A та B (у позначеннях $(A, B)_l$).

У статті [2] запропоновано метод знаходження н. с. д. (як лівого, так і правого), який базується на результатах [3, 4]. Найбільш ґрунтовні дослідження н. с. д. проводились для поліноміальних матриць над полем. Вони були спрямовані як на пошук нових методів знаходження таких матриць, зокрема, через побудову певних аналогів результантної матриці, так і на встановлення степеня цих матричних поліномів [5 – 8].

На початку 90-х років минулого століття М. Ньюмен для матриць над комутативними областями головних ідеалів сформулював задачу: встановити зв'язок між формами Сміта двох матриць та їхніх н. с. д. та н. с. к. Він же і показав, що перший інваріантний множник н. с. д. дорівнює н. с. д. перших інваріантних множників вихідних матриць. Найбільш глибокі результати в цьому напрямку отримано в [9], де вказано певні необхідні умови, яким повинні задовольняти інваріантні множники н. с. д. та н. с. к. Зокрема, показано, що останній інваріантний множник н. с. к. дорівнює н. с. к. останніх інваріантних множників вихідних матриць.

Близькими до цієї тематики є дослідження спільних дільників матриць. У зв'язку з цим виділимо роботи [10, 11]. Є також окремі дослідження властивостей н. с. д. та н. с. к. матриць над дедекіндовими областями [12].

Дану статтю присвячено вивченню структури н. с. л. д. з точки зору опису його форми Сміта та перетворювальних матриць.

Нехай $\mathrm{E} = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ — форма Сміта і P_A та Q_A — ліва та права перетворювальні матриці A. Позначимо через $\mathbf{P}_A$ множину всіх лівих перетворювальних матриць A. Згідно з результатами робіт [13, 14] $\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_{\mathrm{E}} P_A$, де

$$\mathbf{G}_{\mathrm{E}} = \{H \in GL_n(\mathrm{R}) \mid H\mathrm{E} = \mathrm{E}H_1\}, \qquad H_1 \in GL_n(\mathrm{R}).$$

Множина $\mathbf{G}_{\mathrm{E}}$ за структурою є мультиплікативною групою.

Нехай н. с. д. мінорів $(n-1)$-го порядку матриці B дорівнює 1. Тоді існують такі оборотні матриці P_B та Q_B, що

$$P_B B Q_B = \Delta, \quad \text{де} \quad \Delta = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \delta).$$

2. Допоміжні твердження та факти.

Лема 1. *Нехай* $P_B P_A^{-1} = S = \|s_{ij}\|_1^n$. *Тоді елемент* $((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n,n-1}\varepsilon_{n-1})$ *є інваріантом відносно вибору перетворювальних матриць* P_B *та* P_A.

Доведення. Нехай F_A та F_B — інші ліві перетворювальні матриці матриць A та B. Тоді існують такі $H_A \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$ та $H_B \in \mathbf{G}_{\Delta}$, що $F_A = H_A P_A$, $F_B = H_B P_B$. Розглянемо добуток матриць

$$F_B F_A^{-1} = H_B P_B (H_A P_A)^{-1} = H_B P_B P_A^{-1} H_A^{-1} = H_B S H_A^{-1},$$

де $S = P_B P_A^{-1}$. Позначимо $H_B S = \|k_{ij}\|_1^n$. На підставі наслідку 6 із [14] матриця H_B має вигляд

$$H_B = \left\| \begin{array}{cccc} h_{11} & \ldots & h_{1,n-1} & h_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n-1,1} & \ldots & h_{n-1,n-1} & h_{n-1,n} \\ \delta h_{n1} & \ldots & \delta h_{n,n-1} & h_{nn} \end{array} \right\|.$$

Тоді

$$k_{ni} = \left\| \begin{array}{cccc} \delta h_{n1} & \ldots & \delta h_{n,n-1} & h_{nn} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} s_{1i} \\ \vdots \\ s_{n-1,i} \\ s_{ni} \end{array} \right\| =$$

$$= \delta(h_{n1}s_{1i} + \ldots + h_{n,n-1}s_{n-1,i}) + h_{nn}s_{ni} = \delta l_i + h_{nn}s_{ni}, \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

Розглянемо

$$((\varepsilon_n,\ \delta),\ \varepsilon_1 k_{n1},\ \ldots\ ,\ \varepsilon_{n-1}k_{n,n-1}) =$$

$$= ((\varepsilon_n,\ \delta),\ \delta\varepsilon_1 l_1 + \varepsilon_1 h_{nn}s_{n1},\ \ldots\ ,\ \delta\varepsilon_{n-1}l_{n-1} + \varepsilon_{n-1}h_{nn}s_{n,n-1}) = d.$$

Оскільки $(\varepsilon_n, \delta)\,|\delta$, то

$$d = ((\varepsilon_n,\ \delta),\ \varepsilon_1 h_{nn}s_{n1},\ \ldots\ ,\ \varepsilon_{n-1}h_{nn}s_{n,n-1}) = ((\varepsilon_n,\ \delta),\ h_{nn}(\varepsilon_1 s_{n1},\ \ldots\ ,\ \varepsilon_{n-1}s_{n,n-1}))\,.$$

Із оборотності матриці H_B випливає, що $(h_{nn}, \delta) = 1$. Отже, і $(h_{nn}, (\varepsilon_n, \delta)) = 1$. Таким чином,

$$d = ((\varepsilon_n, \delta), k_{n1}\varepsilon_1, \ldots, k_{n,n-1}\varepsilon_{n-1}) = ((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n,n-1}\varepsilon_{n-1}).$$

Позначимо $SH_A^{-1} = \|t_{ij}\|_1^n$. Оскільки $H_A^{-1} \in \mathbf{G}_{\mathrm{E}}$, то на підставі наслідку 6 із [14] матриця H_A^{-1} має вигляд

$$H_A^{-1} = \left\| \begin{matrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}v_{n1} & \dfrac{\varepsilon_n}{\varepsilon_2}v_{n2} & \ldots & v_{nn} \end{matrix} \right\|.$$

Отже,

$$t_{ni} = \left\| \begin{matrix} s_{n1} & s_{n2} & \ldots & s_{nn} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} v_{1i} \\ \vdots \\ v_{ii} \\ \dfrac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}v_{i+1,i} \\ \vdots \\ \dfrac{\varepsilon_n}{\varepsilon_i}v_{ni} \end{matrix} \right\| =$$

$$= s_{n1}v_{1i} + \ldots + s_{ni}v_{ii} + s_{n,i+1}\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}v_{i+1.i} + \ldots + s_{nn}\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_i}v_{ni}, \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

Розглянемо

$$((\varepsilon_n, \delta), t_{n1}\varepsilon_1, \ldots, t_{n,n-1}\varepsilon_{n-1}) =$$

$$= \quad ((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1 v_{11} + s_{n2}\varepsilon_2 v_{21} + \ldots + s_{n,n-1}\varepsilon_{n-1}v_{n-1,1} + s_{nn}\varepsilon_n v_{n1}, \ldots$$

$$\ldots, s_{n1}\varepsilon_{n-1}v_{1,n-1} + s_{n2}\varepsilon_{n-1}v_{2,n-1} + \ldots + s_{n,n-1}\varepsilon_{n-1}v_{n-1,n-1} + s_{nn}\varepsilon_n v_{n,n-1}).$$

Оскільки d є дільником усіх доданків, приходимо до висновку, що

$$((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n,n-1}\varepsilon_{n-1}) \mid ((\varepsilon_n, \delta), t_{n1}\varepsilon_1, \ldots, t_{n,n-1}\varepsilon_{n-1}).$$

З іншого боку, $S = \|t_{ij}\|_1^n H_A$. На підставі аналогічних до щойно проведених міркувань отримуємо

$$((\varepsilon_n, \delta), t_{n1}\varepsilon_1, \ldots, t_{n,n-1}\varepsilon_{n-1}) \mid ((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n,n-1}\varepsilon_{n-1}).$$

Це означає, що

$$((\varepsilon_n, \delta), t_{n1}\varepsilon_1, \ldots, t_{n,n-1}\varepsilon_{n-1}) = ((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n,n-1}\varepsilon_{n-1}).$$

Зважаючи на асоціативність кільця $M_n(R)$, завершуємо доведення.

Лема 2. *Нехай*

$$\frac{\varphi}{(\varphi, \varepsilon_i)} = \mu_i, \quad \text{де} \quad \varphi = ((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n,n-1}\varepsilon_{n-1}).$$

Тоді $\mu_i \,|\, s_{ni}$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Доведення. Оскільки

$$\mu_i = \frac{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n,n-1}\varepsilon_{n-1})}{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{ni}\varepsilon_i, s_{n,i+1}\varepsilon_{n,i+1}, \ldots, s_{n,n-1}\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_i)} =$$

$$= \frac{\left(((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n,i-1}\varepsilon_{i-1}),\ \varepsilon_i\left(s_{ni}, \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}s_{n,i+1}, \ldots, s_{n,n-1}\frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_i}\right)\right)}{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n,i-1}\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i)} =$$

$$= \left(\frac{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n,i-1}\varepsilon_{i-1})}{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n,i-1}\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i)}, \frac{\varepsilon_i}{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n,i-1}\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i)} \times\right.$$

$$\left.\times \left(s_{ni}, \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}s_{n,i+1}, \ldots, s_{n,n-1}\frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_i}\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n,i-1}\varepsilon_{i-1})}{((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n,i-1}\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i)}, \left(s_{ni}, \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}s_{n,i+1}, \ldots, s_{n,n-1}\frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_i}\right)\right),$$

то $\mu_i \,|\, s_{ni}$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Лему доведено.

Для доведення основного результату також використаємо критерій подільності матриць, що був отриманий у [14]. Сформулюємо його, врахувавши специфіку конкретного випадку.

Теорема 1. *Нехай*

$$A = P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1} = P_A^{-1}\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)Q_A^{-1},$$

$$D = P_D^{-1}\Phi Q_D^{-1} = P_D^{-1}\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \varphi)Q_D^{-1}.$$

Тоді для того щоб $A = DC$, *необхідно та достатньо виконання наступних умов*:

1) $\Phi|\mathrm{E}$, *тобто* $\varphi\,|\varepsilon_n$;

2) $P_D = LP_A$, *де* L *належить множині* $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$, *яка складається з усіх оборотних матриць вигляду*

$$\left\|\begin{array}{ccccc} l_{11} & l_{12} & \ldots & l_{1,n-1} & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \ldots & l_{2,n-1} & l_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_1)}l_{n1} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_2)}l_{n2} & \ldots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})}l_{n,n-1} & l_{nn} \end{array}\right\|.$$

3. Основний результат.

Теорема 2. *Нехай*

$$A = P_A^{-1}\mathrm{E}Q_A^{-1} = P_A^{-1}\mathrm{diag}\,(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)Q_A^{-1},$$

$$B = P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1} = P_B^{-1}\mathrm{diag}\,(1, \ldots, 1, \delta)Q_B^{-1}.$$

Нехай також $P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^n$. *Тоді*

$$(A, B)_l = P_B^{-1}\Phi,$$

де $\Phi = \mathrm{diag}\ (1,\ \ldots\ ,\ 1,\ \varphi)$, $\varphi = ((\varepsilon_n,\ \delta),\ \varepsilon_1 s_{n1},\ \ldots\ ,\ \varepsilon_{n-1}s_{n,n-1})$.

Доведення. Відразу ж зауважимо, що згідно з лемою 1 елемент $((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n,n-1}\varepsilon_{n-1})$, а отже, і матриця Φ не залежать від вибору перетворювальних матриць P_A та P_B.

Оскільки $\varphi \mid \delta$, то

$$B = (P_B^{-1}\Phi)\left(\operatorname{diag}\left(1, \ldots, 1, \frac{\delta}{\varphi}\right) Q_B^{-1}\right),$$

тобто матриця $D = P_B^{-1}\Phi$ є лівим дільником матриці B.

З іншого боку, $\varphi|\varepsilon_n$. На підставі леми 2 елемент $\dfrac{\varphi}{(\varphi,\ \varepsilon_i)}$ є дільником s_{ni}, $i = 1, \ldots, n-1$. Отже, $P_B P_A^{-1} = S \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Phi)$, тобто $P_B = SP_A$. Згідно з теоремою 1 це означає, що $D = P_B^{-1}\Phi$ є лівим дільником матриці A. Таким чином, матриця $D = P_B^{-1}\Phi$ є спільним лівим дільником матриць A та B.

Нехай T — інший спільний лівий дільник матриць A та B. На підставі теореми 4 із [14] форма Сміта матриці T, яку ми позначимо через Γ, є дільником форм Сміта матриць A та B. Звідси випливає, що матриця Γ має вигляд $\Gamma = \operatorname{diag}(1,\ \ldots\ ,\ 1,\ \gamma)$, причому $\gamma\,|\varepsilon_n$ та $\gamma\,|\delta$, тобто

$$\gamma\,|(\varepsilon_n, \delta)\ . \tag{1}$$

Із рівностей $A = TA_1$, $B = TB_1$ також випливає, що $P_T = K_A P_A$, де $K_A \in \mathbf{L}(\mathrm{E}, \Gamma)$ та $P_T = K_B P_B$, де $K_B \in \mathbf{L}(\Delta, \Gamma)$. Отже, $K_A P_A = K_B P_B$, тобто $P_B P_A^{-1} = K_B^{-1} K_A$. Матриця $K_B^{-1} K_A$ має вигляд

$$K_B^{-1}K_A = \left\| \begin{array}{cccc} v_{11} & \ldots & v_{1,n-1} & v_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n-1,1} & \ldots & v_{n-1,n-1} & v_{n-1,n} \\ \gamma v_{n1} & \ldots & \gamma v_{n,n-1} & v_{nn} \end{array} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{array}{cccc} u_{11} & \ldots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1,1} & \ldots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ \dfrac{\gamma}{(\gamma, \varepsilon_1)} u_{n1} & \ldots & \dfrac{\gamma}{(\gamma, \varepsilon_{n-1})} u_{n,n-1} & u_{nn} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc} l_{11} & \ldots & l_{1,n-1} & l_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_{n-1,1} & \ldots & l_{n-1,n-1} & l_{n-1,n} \\ \dfrac{\gamma}{(\gamma, \varepsilon_1)} l_{n1} & \ldots & \dfrac{\gamma}{(\gamma, \varepsilon_{n-1})} l_{n,n-1} & l_{nn} \end{array} \right\| = P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^n\,.$$

Таким чином, $\dfrac{\gamma}{(\gamma, \varepsilon_i)} \mid s_{ni}$, $i = 1, \ldots, n-1$, тобто $\gamma \mid s_{ni}(\gamma, \varepsilon_i) = (\gamma s_{ni}, \varepsilon_i s_{ni})$, $i = 1, \ldots, n-1$. Звідси випливає, що $\gamma \mid \varepsilon_i s_{ni}$, $i = 1, \ldots, n-1$. Врахувавши подільність (1), отримуємо

$$\gamma \mid\ ((\varepsilon_n,\ \delta),\ \varepsilon_1 s_{n1},\ \ldots\ ,\ \varepsilon_{n-1} s_{n,n-1}) = \varphi.$$

Таким чином, $\Gamma\,|\Phi$.

Оскільки $P_T = K_B P_B$ і $P_D = P_B$, то

$$P_T P_D^{-1} = K_B P_B P_B^{-1} = K_B \in \mathbf{L}(\Delta, \Gamma).$$

Зважаючи на те, що $\mathbf{L}(\Delta, \Gamma) = \mathbf{L}(\Phi, \Gamma)$, на підставі теореми 1 приходимо до висновку, що матриця T є лівим дільником матриці $D = P_B^{-1}\Phi$. Отже, матриця $P_B^{-1}\Phi$ є найбільшим спільним лівим дільником матриць A та B.

Теорему доведено.

***Наслідок* 1.** *Матриці A та B взаємно прості зліва тоді і тільки тоді, коли*

$$((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n,n-1}\varepsilon_{n-1}) = 1.$$

***Наслідок* 2.** *Множини перетворювальних матриць $(A, B)_l$ та B пов'язані між собою наступними співвідношеннями*:

1) $\mathbf{P}_{(A,B)_l} = \mathbf{G}_\Phi P_B$,

2) $\mathbf{P}_B \subset \mathbf{P}_{(A,B)_l}$.

Доведення. Перше співвідношення є очевидним.

Оскільки $\mathbf{P}_B = \mathbf{G}_\Delta P_B$, $\mathbf{P}_{(A,B)_l} = \mathbf{G}_\Phi P_B$ та $\mathbf{G}_\Delta \subset \mathbf{G}_\Phi$, то $\mathbf{P}_B \subset \mathbf{P}_{(A,B)_l}$.

1. *Kaplansky I.* Elementary divisor and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464 – 491.
2. *MacDuffee C. C.* Matrices with elements in a principal ring // Bull. Amer. Math. Soc. – 1933. – **39**. – P. 570 – 573.
3. *Cahen E.* Théorie des Nombres. – 1914. – I.
4. *Châtelet A.* Groupes Abéliens Finis. – 1924.
5. *Barnett S.* Regular greatest common divisor of two polynomial matrices // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1972. – **72**. – P. 161 – 165.
6. *Barnett S.* Greatest common divisors from generalized Sylvester resultant matrices // Linear and Multilinear Algebra. – 1980. – **8**. – P. 271 – 279.
7. *Bitmead R. R., Kung S. Y., Anderson O., Kailath T.* Greatest common divisors via generalized Sylvester and Bezout matrices // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1978. – **23**, № 6. – P. 1043 – 1047.
8. *Gohberg I., Kaashoek M. A., Lerer L., Rodman L.* Common multiples and common divisors of matrix polynomials, I // Indiana Univ. Math. J. – 1981. – **30**, № 3. – P. 321 – 356.
9. *Thompson R. C.* Left multiples and right divisors of integral matrices // Linear and Multilinear Algebra. – 1986. – **19**. – P. 287 – 295.
10. *Джалюк Н. С. Петричкович В. М.* Про спільні унітальні дільники многочленних матриць із заданою канонічною діагональною формою // Мат. методи та фіз.- мех. поля. – 2002. – **45**, № 3. – С. 7 – 13.
11. *Прокіп В. М.* Про спільні дільники матриць над факторіальними областями //Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 4. – С. 43 – 50.
12. *Nanda V. C.* On the gcd and lcm of matrices over Dedekind domains // Number Theory and Discrete Math. Trends in Math. – 2002. – P. 201 – 211.
13. *Зелиско В. Р.* О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып. 12. – С. 14 – 21.
14. *Shchedryk V.* Factorization of matrices over elementary divisor domain // Algebra and Discrete Math. – 2009. – № 2. – P. 79 – 99.

Одержано 18.12.12