УДК 517.956.4

В. В. Городецький, Я. М. Дрінь (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

БАГАТОТОЧКОВА ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

We establish the correct solvability of the nonlocal multipoint in time problem for the evolution equations with pseudodifferential operators of infinite order.

Доказана корректная разрешимость нелокальной многоточечной по времени задачи для эволюционных уравнений с псевдодифференциальными операторами бесконечного порядка.

Як відомо, предметом багатьох досліджень є псевдодиференціальні оператори (ПДО), які формально можна подати у вигляді $F^{-1}_{\sigma\to x}\big[a(t,x;\sigma)F_{x\to\sigma}\big]$, $\{x,\sigma\}\subset\mathbb{R}^n$, $t>0$, де a — функція (символ), що задовольняє певні умови, F і F^{-1} — пряме та обернене перетворення Фур'є. Особливо це стосується ПДО, побудованих за негладкими в точці $\sigma=0$ і однорідними за цим аргументом символами. С. Д. Ейдельман та Я. М. Дрінь [1 – 3] визначили клас параболічних псевдодиференціальних операторів (ППДО) з негладкими символами і розпочали дослідження класичних розв'язків задачі Коші для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь (ПДР) з ППДО та їх систем. У праці [4] для параболічних ПДР встановлено класичну розв'язність задачі Коші (при цьому ПДО трактуються як гіперсингулярні інтеграли).

У цій роботі встановлено коректну розв'язність багатоточкової за часом задачі для рівняння $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}=Bu(t,x)$, де $B=f(A)$, f — ціла функція від ПДО A, породженого негладким при $\sigma=0$ символом $a(\sigma)$. При певних умовах на символ $a(\sigma)$ тут підібрано простори основних і узагальнених функцій, при яких нелокальна задача коректно розв'язна, і знайдено зображення розв'язку у вигляді згортки граничної функції з фундаментальним розв'язком вказаної задачі (при цьому досліджено структуру та властивості фундаментального розв'язку).

Зазначимо, що вперше нелокальну задачу такого типу для параболічних диференціальних рівнянь дослідив М. І. Матійчук [5]. Для замкненого оператора у банаховому просторі М. Л. Горбачуком і В. І. Горбачук у працях [6 – 9] вказано спосіб побудови локально опуклих просторів гладких і узагальнених функцій та встановлено коректну розв'язність різних крайових задач для вказаного рівняння. Зображення розв'язку при цьому дається через степеневий ряд від експоненти оператора B.

1. Простори основних та узагальнених функцій. Нехай γ — фіксоване число з множини $(1,+\infty)\setminus\{2,3,4,\ldots\}$, $\gamma_0:=1+[\gamma]$, $M(x):=1+|x|$, $x\in\mathbb{R}$,

$$\Phi=\Big\{\varphi\in C^\infty(\mathbb{R})\,\Big|\,\forall k\in\mathbb{Z}_+\exists c_k>0\ \forall x\in\mathbb{R}\colon\ \big|D_x^k\varphi(x)\big|\le c_k\big(1+|x|\big)^{-(\gamma_0+k)}\Big\}.$$

У просторі Φ вводиться структура зліченно-нормованого простору за допомогою норм:

$$\|\varphi\|_p:=\sup_{x\in\mathbb{R}}\sum_{k=0}^{p}M(x)^{\omega_0+k}\big|D_x^k\varphi(x)\big|,\qquad \varphi\in\Phi,\quad p\in\mathbb{Z}_+,$$

де $\omega_0=\gamma_0-\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$ — фіксований параметр [10].

Позначимо через Φ_p поповнення Φ за p-ю нормою; Φ_p — банахів простір, при цьому правильними є вкладення $\Phi_{p+1}\subset\Phi_p$, $p\in\mathbb{Z}_+$; кожне таке вкладення є неперервним, щільним і компактним; Φ — повний досконалий зліченно-нормований простір із топологією проективної границі банахових просторів Φ_p [10].

Функції з простору Φ на нескінченності спадають до нуля так, що є абсолютно інтегровними на $\mathbb{R}$, тому для них визначено операцію перетворення Фур'є F:

$$F[\varphi](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{ix\xi} dx, \quad \varphi \in \Phi.$$

Очевидно, що кожна функція $F[\varphi]$, $\varphi \in \Phi$, є обмеженою і неперервною на $\mathbb{R}$. Наведемо основні властивості функцій із простору $\Psi := F[\Phi]$, який є Фур'є-образом простору Φ [10]: 1) якщо $\varphi \in \Phi$, то $F[\varphi] \in L_1(\mathbb{R})$ і є нескінченно диференційовною на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ функцією; 2) функція $D_\xi^k F[\varphi](\xi)$, $\xi \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, має скінченні односторонні границі $\lim_{\xi \to \pm 0} D_\xi^k F[\varphi](\xi)$, $\varphi \in \Phi$. Перетворення Фур'є відображає Φ на Ψ взаємно однозначно і неперервно. Для довільної функції $\varphi \in \Phi$ $\xi^k F^{(m)}[\varphi] \in L_1(\mathbb{R})$, $\{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+$, $k \geq m$; при цьому для функцій із простору Ψ справджуються нерівності

$$\forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+,\ k \geq m\ \exists c_k > 0\ \exists c_m > 0 : \sup_{\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \left| \xi^k F^{(m)}[\varphi](\xi) \right| \leq c_k c_m, \quad \varphi \in \Phi,$$

де $c_k \leq c A^k k^k$ $\big(c,\, A > 0$; сталі c, A залежать лише від функції $F[\varphi]\big)$.

У просторі Ψ вводиться структура зліченно-нормованого простору [10]:

$$\|\psi\|_p := \sup_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \left\{ \sum_{k=0}^{p} |\xi|^k \left| D_\xi^k \psi(\xi) \right| \right\}, \qquad \psi \in \Psi, \quad p \in \mathbb{Z}_+.$$

Символом Φ' позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на Φ зі слабкою збіжністю. Оскільки в основному просторі Φ введено топологію проективної границі банахових просторів Φ_p, причому вкладення $\Phi_{p+1} \subset \Phi_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, неперервні, щільні та компактні, то (див. [10]) $\Phi' = (\lim_{p \to \infty} \operatorname{pr} \Phi_p)' = \lim_{p \to \infty} \operatorname{ind} \Phi_p'$. Отже, якщо $f \in \Phi'$, то $f \in \Phi_p'$ при деякому $p \in \mathbb{Z}_+$. Найменше з таких p називається порядком f, тобто кожна узагальнена функція $f \in \Phi'$ має скінченний порядок.

Якщо $f \in \Phi'$, $\varphi \in \Phi$, то, як доведено в [10], існує згортка $f * \varphi$, яка визначається формулою $f * \varphi = \langle f, T_{-x} \check{\varphi} \rangle$, де $\varphi \in \Phi$, T_{-x} — оператор зсуву аргументу, $\check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi)$.

Оскільки $F[\varphi] \in \Phi$, якщо $\varphi \in \Psi$ $\big(F[\varphi(x)] = 2\pi F^{-1}\big[\varphi(-x)\big] \in \Phi\big)$, то перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in \Phi'$ визначимо за допомогою співвідношення $\big\langle F[f], \varphi \big\rangle = \big\langle f, F[\varphi] \big\rangle$ $\forall \varphi \in \Psi$. Звідси, із властивостей лінійності і неперервності функціонала f та перетворення Фур'є основних функцій випливає лінійність і неперервність функціонала $F[f]$ над простором Ψ. Отже, перетворення Фур'є узагальненої функції f, заданої на Φ, є узагальненою функцією на просторі $F[\Phi]$.

Нехай $f \in \Phi'$. Якщо $f * \varphi \in \Phi$ $\forall \varphi \in \Phi$ і із співвідношення $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору Φ випливає, що $f * \varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору Φ, то функціонал f називається згортувачем у просторі Φ. Символом Φ_*' позначимо сукупність усіх згортувачів у просторі Φ. Якщо $f \in \Phi_*'$, то, як доведено в [10], для довільної функції $\varphi \in \Phi$ правильною є формула $F[f * \varphi] = F[f] \cdot F[\varphi]$.

2. ПДО нескінченного порядку. Нехай $a\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ — неперервна однорідна порядку $\gamma > 1$ ($\gamma \neq 2,3,4,\ldots$) функція, яка: 1) нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; 2) для похідних функції a справджуються оцінки $\left|a^{(k)}(\xi)\right| \leq c_k|\xi|^{\gamma-k}$, $k\in\mathbb{N}, \xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; 3) існують сталі c_0', $\tilde{c}_0>0$, $\tilde{\delta}\geq\gamma$ такі, що $c_0'|\xi|^\gamma \leq a(\xi)\leq \tilde{c}_0\bigl(1+|\xi|^{\tilde{\delta}}\bigr)$.

Із умов $1-3$ випливає, що функція a є мультиплікатором у просторі Ψ [10]. Отже, оператор A, який задається правилом $A\varphi = F^{-1}\bigl[aF[\varphi]\bigr]$, $\varphi\in\Phi$, відображає Φ в себе, є лінійним і неперервним.

Говоритимемо, що у просторі Φ задано ПДО нескінченного порядку $f(A) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$, якщо для довільної основної функції $\varphi\in\Phi$ ряд

$$(f(A)\varphi)(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (A^n\varphi)(x), \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x\in\mathbb{R},$$

зображує деяку основну функцію з простору Φ, де f належить $C^\infty(\mathbb{R})$ і задовольняє умови: функція f допускає аналітичне продовження в усю комплексну площину і

$$\exists c>0\ \exists a>0\ \exists h\geq 1\ \forall z = x+iy\in C\colon\ \ \bigl|f(z)\bigr| \leq c\bigl(1+|x|\bigr)^h \exp\bigl\{a|y|^\alpha\bigr\}$$

($\alpha\in(0,1)$ — фіксоване число).

Тоді, як доведено в [11], у просторі Φ визначено неперервний ПДО нескінченного порядку $f(A)\equiv A_f$. Далі вважатимемо, що f додатково задовольняє умову: $\exists d_0>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\colon f(x)\geq$ $\geq d_0|x|$.

3. Нелокальна багатоточкова за часом задача. Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u}{dt} + A_f u = 0, \quad (t,x)\in(0,T]\times\mathbb{R}\equiv\Omega, \tag{1}$$

де $A_f = f(A)$ — ПДО нескінченного порядку, побудований у п. 2, який діє у просторі Φ. Для (1) задамо багатоточкову нелокальну за часом задачу

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t,\cdot)|_{t=t_1} - \ldots - \mu_m u(t,\cdot)|_{t=t_m} = g, \tag{2}$$

де $m\in\mathbb{N}$, $\{\mu,\mu_1,\ldots,\mu_m\}\subset(0,+\infty)$, $\{t_1,\ldots,t_m\}\subset(0,T]$ — фіксовані числа, причому $\mu > \sum_{k=1}^{m}\mu_k$, $g\in\Phi$.

Класичний розв'язок $u\in C^1((0,T],\Phi)$ задачі (1), (2) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є у вигляді $u(t,x) = F\bigl[v(t,\cdot)\bigr](x)$. Для функцій $v\colon\Omega\to\mathbb{R}$ отримуємо задачу з параметром σ:

$$\frac{dv(t,\sigma)}{dt} + f\bigl(a(\sigma)\bigr)v(t,\sigma) = 0, \quad (t,\sigma)\in\Omega, \tag{3}$$

$$\mu v(t,\sigma)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m}\mu_k v(t,\sigma)|_{t=t_k} = \tilde{g}(\sigma), \quad \sigma\in\mathbb{R}, \tag{4}$$

де $\tilde{g}(\sigma) = F^{-1}[g](\sigma)$. Загальний розв'язок рівняння (3) має вигляд

$$v(t,\sigma) = c(\sigma)\exp\Bigl\{-tf\bigl(a(\sigma)\bigr)\Bigr\}, \quad (t,\sigma)\in\Omega, \tag{5}$$

де $c = c(\sigma)$ визначимо з умови (4). Підставляючи (5) в (4), знаходимо

$$c(\sigma) = \tilde{g}(\sigma)\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\Big\{ - t_k f\big(a(\sigma)\big)\Big\}\right)^{-1}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Отже, формальним розв'язком задачі (1), (2) є функція

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} v(t,\sigma) e^{-ix\sigma} d\sigma.$$

Нехай $G(t,x) = F^{-1}\big[Q(t,\sigma)\big]$, де $Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)$, $Q_1(t,\sigma) = \exp\Big\{ - tf\big(a(\sigma)\big)\Big\}$, $Q_2(\sigma) = \Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\Big\{ - t_k f\big(a(\sigma)\big)\Big\}\Big)^{-1}$. Тоді, міркуючи формально, отримуємо

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t, x-\xi) g(\xi) d\xi = G(t,x) * g(x), \quad (t,\, x) \in \Omega.$$

Справді,

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{-i\sigma\xi} d\xi \right) e^{i\sigma x} d\sigma = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma) e^{i\sigma(x-\xi)} d\sigma \right) \times$$

$$\times g(\xi) d\xi = \int\limits_{R} G(t, x-\xi) g(\xi) d\xi = G(t,x) * g(x), \quad (t,x) \in \Omega. \tag{6}$$

Коректність проведених тут перетворень та збіжність відповідних інтегралів, а отже правильність формул (6), випливають із властивостей функції G, які ми наведемо нижче. Властивості функції G пов'язані з властивостями функції Q, оскільки $G = F^{-1}[Q]$. Отже, насамперед дослідимо властивості функції Q як функції аргументу x.

Лема 1. *Для похідних функції $Q(t,\xi)$ при $\xi \neq 0$ правильними є оцінки*

$$\big| D_\xi^s Q(t,\xi) \big| \leq \beta_s t^{s\alpha} |\xi|^{\omega_s - s} e^{-d_0' t |\xi|^\gamma}, \quad s \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

де сталі β_s, $d_0' > 0$ не залежать від t, $\alpha = 1$, $\omega_s = \gamma$ при $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$, і $\alpha = 1 - h/\gamma$, $\omega_s = s\gamma$ при $|\xi| \geq 1$.

Доведення. Для доведення скористаємося формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції

$$D_\xi^s F(\theta(\xi)) = \sum_{m=1}^{s} \frac{d^m}{dg^m} F(\theta) \sum_{\substack{m_1 + \ldots + m_l = m \\ m_1 + 2m_2 + \ldots + l m_l = s}} \frac{s!}{m_1! \ldots m_l!} \Big(\frac{1}{1!} \frac{d}{d\xi} \theta(\xi) \Big)^{m_1} \ldots \Big(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\xi^l} \theta(\xi) \Big)^{m_l}, \tag{8}$$

де покладемо $F = e^\theta$, $\theta = -tf\big(a(\xi)\big)$. Тоді

$$D_\xi^s e^{-tf(a(\xi))} = e^{-tf(a(\xi))} \sum_{m=1}^{s} \sum \frac{s!}{m_1! \ldots m_l!} (-t)^{m_1 + 2m_2 + \ldots + l m_l} \Lambda, \quad \xi \neq 0.$$

Тут символом Λ позначено вираз

$$\Lambda := \left(\frac{d}{d\xi} f\big(a(\xi)\big)\right)^{m_1} \left(\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\xi^2} f\big(a(\xi)\big)\right)^{m_2} \ldots \left(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\xi^l} f\big(a(\xi)\big)\right)^{m_l}.$$

Для оцінки Λ скористаємося оцінками похідних функції $f(a(\xi))$ при $\xi \neq 0$, наведеними у праці [11] (при встановленні цих оцінок також було використано формулу Фаа де Бруно): якщо $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$, то

$$\left| D_\xi^s f\big(a(\xi)\big) \right| \leq b_0 c_0^s s! |\xi|^{\gamma - s} \big(1 + |\xi|\big)^h, \quad s \in \mathbb{N}; \tag{9}$$

якщо $|\xi| \geq 1$, то

$$\left| D_\xi^s f\big(a(\xi)\big) \right| \leq b_0 c_0^s s! |\xi|^{s(\gamma - 1)} \big(1 + |\xi|\big)^h, \quad s \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

1. Нехай $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$. Тоді з урахуванням (9) прийдемо до оцінок

$$|\Lambda| \leq b_0^m c_0^s |\xi|^{\gamma(m)} |\xi|^{-s} \big(1 + |\xi|\big)^{hm} \leq$$

$$\leq \tilde{b}_0^s c_0^s |\xi|^{\gamma m - s} \big(1 + |\xi|\big)^{hs} \leq \tilde{b}_0^s c_0^s |\xi|^{\gamma - s} \big(1 + |\xi|\big)^{hs}, \quad b_0 = \max\{1, b_0\}.$$

2. Якщо $|\xi| \geq 1$, то з урахуванням (10)

$$|\Lambda| \leq b_0^m c_0^s |\xi|^{m(\gamma - 1)} \big(1 + |\xi|\big)^{hm} \leq \tilde{b}_0^s c_0^s |\xi|^{s(\gamma - 1)} \big(1 + |\xi|\big)^{hs}.$$

Об'єднавши ці нерівності в одну, переконаємося, що для похідних функції $Q_1(t, \xi)$ за змінною ξ правильними є нерівності

$$\left| D_\xi^s Q_1(t, \xi) \right| \leq \beta_0^s t^s |\xi|^{\omega_s - s} e^{-d_0 t |\xi|^\gamma} \big(1 + |\xi|\big)^{hs}, \quad s \in \mathbb{N},$$

де $\omega_s = \gamma$ при $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$, і $\omega_s = s\gamma$ при $|\xi| \geq 1$.

Взявши до уваги нерівності $\big(1 + |\xi|\big)^{hs} \leq 2^{hs}$, якщо $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$, та $(1 + |\xi|)^{hs} \leq 2^{hs} |\xi|^{hs}$, якщо $|\xi| \geq 1$, а також нерівність (див. [12, с. 204])

$$e^{-d_0' t |\xi|^\gamma} = e^{-((d_0' t)^{h/\gamma} |\xi|^h)^{\gamma/h}} \leq A^s t^{-sh/\gamma} s^{sh/\gamma} |\xi|^{-hs}, \qquad s \in \mathbb{N}, \quad d_0' = d_0/2,$$

знайдемо, що при $|\xi| \geq 1$ правильною є оцінка $e^{-d_0' t |\xi|^\gamma} \big(1 + |\xi|\big)^{hs} \leq A_1^s t^{-sh/\gamma} s^{sh/\gamma}$, $s \in \mathbb{N}$. Отже,

$$\left| D_\xi^s Q_1(t, \xi) \right| \leq \beta_1^s t^{s\alpha} s^{sh/\gamma} s! e^{-d_0' t |\xi|^\gamma} |\xi|^{\omega_s - s}, \qquad \xi \neq 0, \quad s \in \mathbb{N},$$

де $\alpha = 1$, якщо $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$, і $\alpha = 1 - h/\gamma$, якщо $|\xi| \geq 1$.

Якщо ввести позначення $\beta_s = \beta_1^s s! s^{sh/\gamma}$, то прийдемо до нерівностей (7).

Лему доведено.

***Зауваження* 1.** Із доведеного твердження випливає, що функція $Q_1(t, \xi)$, як функція ξ, при кожному $t > 0$ є елементом простору Ψ.

Лема 2. *Функція Q_2 є мультиплікатором простору Ψ.*

Доведення. Зафіксуємо $s \in \mathbb{N}$. Для оцінки похідних функції $Q_2(\xi)$ скористаємося формулою Фаа де Бруно (8), в якій покладемо $F = g^{-1}$, $g = R$, де $R(\xi) = \mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k, \xi)$. Тоді $Q_2(\xi) = F\big(R(\xi)\big)$ і $d^m F(R)/dg^m = (-1)^m m! R^{-(m+1)}$. Із урахуванням нерівностей (7) знайдемо

$$\left|\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\xi^l}R(\xi)\right| \le \frac{1}{l!}\sum_{k=1}^{m}\mu_k\left|\frac{d^l}{d\xi^l}Q_1(t,\xi)\right| \le \frac{1}{l!}\sum_{k=1}^{m}\mu_k\beta_l t_k^{l\alpha}|\xi|^{\omega_l - l}e^{-d_0' t_k|\xi|^\gamma} \le$$

$$\le \tilde{\beta}_l T^{l\alpha}\sum_{k=1}^{m}\mu_k\cdot|\xi|^{\omega_k - l}e^{-d_0' t_1|\xi|^\gamma} \le \tilde{\tilde{\beta}}_l|\xi|^{\omega_l - l}e^{-\tilde{d}_0|\xi|^\gamma}, \qquad \tilde{d}_0 = d_0' t_1, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Тоді для $|\xi| \ge 1$ матимемо

$$\tilde{\Lambda} := \left|\left(\frac{d}{d\xi}R(\xi)\right)^{m_1}\right|\ldots\left|\left(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\xi^l}R(\xi)\right)^{m_l}\right| \le \beta_s'|\xi|^{\omega_s - s}e^{-\tilde{d}_0|\xi|^\gamma}.$$

Якщо $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$, то $\tilde{\Lambda} \le \beta_s'|\xi|^{\gamma - s}e^{-\tilde{d}_0|\xi|^\gamma}$.

Оскільки $Q_1(t_k, \xi) \le 1$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, $\xi \in \mathbb{R}$, то $R(\xi) \ge \mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k \equiv \mu_0$. Отже, $\mu_0 > 0$ і $R^{-(m+1)}(\xi) \le \mu_0^{-(m+1)}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Звідси випливає також, що

$$Q_2(\xi) = R^{-1}(\xi) \le \mu_0^{-1}.$$

Підсумовуючи, одержуємо

$$\left|D_\xi^s Q_2(\xi)\right| \le \delta_s|\xi|^{\omega_s - s}e^{-\tilde{d}_0|\xi|^\gamma}, \qquad \xi \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

З останніх нерівностей та обмежености на $\mathbb{R}$ функції Q_2 випливає, що вона є мультиплікатором у просторі Ψ.

Лему доведено.

***Наслідок* 1.** *При фіксованому $t \in (0, T]$ функція $Q(t,\xi) = Q_1(t,\xi)Q_2(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, є елементом простору Ψ, при цьому справджуються оцінки*

$$\left|D_\xi^s Q(t,\xi)\right| \le \tilde{\beta}_s|\xi|^{\omega_s - s}e^{-d_0' t|\xi|^\gamma}, \qquad s \in \mathbb{Z}_+, \quad \xi \neq 0, \tag{11}$$

сталі $\tilde{\beta}_s > 0$ залежать від T, $d_0' > 0$ не залежить від t та s, $\omega_s = \gamma$ при $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$, і $\omega_s = s\gamma$ при $|\xi| \ge 1$.

Врахувавши властивості перетворення Фур'є (прямого та оберненого) та співвідношення $F^{-1}[\Psi] = \Phi$, знайдемо, що $G(t,\cdot) = F^{-1}\big[Q(t,\cdot)\big] \in \Phi$ при кожному $t \in (0, T]$. Виділимо в оцінках функції G та її похідних (за змінною x) залежність від параметра t, якщо $t \in (0, T^*]$, де $T^* = T$ при $T \le 1$ і $T^* = 1$ при $T > 1$.

Лема 3. *Для функції $G(t,x)$, $t \in (0, T^*]$, $x \in \mathbb{R}$, та її похідних (за змінною x) правильними є оцінки*:

$$\left|D_x^k G(t,x)\right| \le c_k t^{-\delta_k}\big((1+|x|)^{1+[\gamma]+k}\big)^{-1}, \qquad t \in (0, T^*], \qquad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{12}$$

де $\delta_k = [\gamma] + \{\gamma\}/\gamma + k$ при $x \neq 0$ і $\delta_k = (1+k)/\gamma$ при $x = 0$.

Доведення. Нехай $k = 0$. Якщо $x \neq 0$, то, інтегруючи частинами $s = 1+[\gamma]$ разів, записуємо $G(t,x)$ у вигляді

$$G(t,x) = (2\pi)^{-1} \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{|\xi|\geq\varepsilon} Q(t,\xi)e^{-ix\xi}d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-1}\frac{\tilde{c}}{x^s}\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_{|\xi|\geq\varepsilon} D_\xi^s Q(t,\xi)e^{-ix\xi}d\xi + \Phi(\varepsilon,x)\right] \equiv \lim_{\varepsilon\to+0} I(x,\varepsilon).$$

Символом $\Phi(\varepsilon,x)$ позначено позаінтегральний вираз, який складається із доданків вигляду $D_\xi^l Q(t,\xi)e^{-ix\xi}$, $0 \leq l \leq s-1$, із значеннями у точках $\xi \neq \pm\varepsilon$. Із оцінок похідних функції $Q(t,\xi)$ випливає, що для $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$, $\left|D_\xi^l Q(t,\xi)\right| \leq c|\xi|^{\gamma-l}$, при цьому $0 < \{\gamma\} \leq \gamma - l \leq \gamma$, якщо $0 \leq l \leq s-1$, $s-1 = [\gamma]$. Звідси отримуємо, що $\lim_{\varepsilon\to+0}\Phi(\varepsilon,x) = 0$ у кожній точці $x \in \mathbb{R}$. На нескінченності вказані позаінтегральні доданки дорівнюють нулю за рахунок спадання на нескінченності функції $Q(t,\xi)$ та її похідних.

Врахувавши (11), знайдемо, що при $s = 1+[\gamma]$, $x \neq 0$

$$\left|I(x,\varepsilon)\right| \leq \frac{\tilde{\beta}_s}{|x|^s}\int\limits_{|\xi|\geq\varepsilon} |\xi|^{\omega_s - s}e^{-d_0' t|\xi|^\gamma}d\xi \leq \frac{2\tilde{\beta}_s}{|x|^s}\int\limits_0^\infty \xi^{\omega_s-s}e^{-d_0' t\xi^\gamma}d\xi.$$

Інтеграл в останній нерівності має інтегровну особливість у точці $\xi = 0$. Справді, оскільки $\omega_s = \gamma$ при $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$, то при вказаному виборі s маємо $s - \omega_s = 1 + [\gamma] - \gamma$, тобто $0 < s - \omega < 1$.

Введемо позначення

$$I(t) := \int\limits_0^\infty \xi^{\omega_s-s}e^{-d_0' t\xi^\gamma}d\xi \equiv I_1(t) + I_2(t), \quad s = 1+[\gamma],$$

де

$$I_1(t) = \int\limits_0^1 \xi^{\omega_s-s}e^{-d_0' t\xi^\gamma}d\xi, \qquad I_2(t) = \int\limits_1^{+\infty} \xi^{\omega_s-s}e^{-d_0' t\xi^\gamma}d\xi.$$

Інтеграл $I_1(t)$ є збіжним:

$$I_1(t) \leq \int\limits_0^1 \frac{d\xi}{\xi^{s-\omega_s}} = \int\limits_0^1 \frac{d\xi}{\xi^{1-\{\gamma\}}} < +\infty.$$

Оцінимо $I_2(t)$, виділивши залежність від параметра t; при цьому врахуємо, що $|\xi| \geq 1$, $\omega_s = s\gamma$, $s = 1+[\gamma]$. Отже,

$$I_2(t) \leq \int\limits_0^\infty \xi^{\{\gamma\}+\gamma[\gamma]-1}e^{-d_0' t\xi^\gamma}d\xi = \tilde{d}_0 t^{-([\gamma]+\{\gamma\}/\gamma)}\int\limits_0^{+\infty} y^{\{\gamma\}+\gamma[\gamma]-1}e^{-y}dy \leq \tilde{\tilde{d}}_0 t^{-([\gamma]+\{\gamma\}/\gamma)}.$$

Отже, для $I(x,\xi)$ при $x \neq 0$ виконується нерівність

$$|I(x,\varepsilon)| \leq \frac{\tilde{\beta}_s}{|x|^{1+[\gamma]}} t^{-([\gamma]+\{\gamma\}/\gamma)}, \quad t \in (0,T^*]. \tag{13}$$

Виконавши у (13) граничний перехід при $\varepsilon \to +0$, знайдемо, що $\big|G(t,x)\big|$ при $x \neq 0$ оцінюється так: $\big|G(t,x)\big| \leq \beta\big(|x|^{1+[\gamma]}\big)^{-1} t^{-([\gamma]+\{\gamma\}/\gamma)}$, $t \in (0,T^*]$.

Крім того, з умов, які задовольняють функції f та a, випливає

$$\big|G(t,x)\big| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\xi)d\xi\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-tf(a(\xi))}d\xi \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-d_0 t|\xi|^\gamma}d\xi = c_0 t^{-1/\gamma},$$

$$\big|G(t,x)\big| \leq c_0 t^{-1/\gamma} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Крім того, $G(t,\cdot)$ належить Φ при кожному $t \in (0,T]$, при цьому

$$\big|G(t,x)\big| \leq \frac{c}{\big(1+|x|\big)^{1+[\gamma]}}, \qquad t \in (0,T], \quad x \in \mathbb{R}, \quad c = c(t) > 0.$$

З урахуванням отриманих раніше оцінок прийдемо до нерівності

$$\big|G(t,x)\big| \leq \frac{\beta t^{-\delta_0}}{(1+|x|)^{1+[\gamma]}}, \qquad t \in (0,T^*], \quad x \in \mathbb{R},$$

де $\delta_0 = [\gamma] + \{\gamma\}/\gamma$ при $x \neq 0$ і $\delta_0 = 1/\gamma$ при $x = 0$.

Нехай $k \in \mathbb{N}$. Застосуємо оператор D_x^k під знаком інтеграла

$$(2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\xi)e^{-ix\xi}d\xi = G(t,x),$$

тоді

$$D_x^k G(t,x) = (2\pi)^{-1}(-i)^k \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\xi)\xi^k e^{-ix\xi}d\xi.$$

Міркуючи, як і у випадку $k = 0$, інтегруючи частинами $s = 1 + [\gamma] + k$ разів, знаходимо

$$D_x^k G(t,x) = \frac{C_s}{x^s}\int\limits_{\mathbb{R}} D_\xi^s(Q(t,\xi)\xi^k)e^{-ix\xi}d\xi, \quad x \neq 0.$$

Враховуючи формулу диференціювання добутку двох функцій, одержуємо, що оцінка похідних функції G зводиться до оцінки суми інтегралів вигляду

$$\frac{C_s}{|x|^s}\Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}} |\xi|^k\big|D_\xi^s Q(t,\xi)\big|d\xi + ks\int\limits_{\mathbb{R}} |\xi|^{k-1}\big|D_\xi^{s-1}Q(t,\xi)\big|d\xi +$$

$$+k(k-1)\frac{s(s-1)}{2!}\int\limits_{\mathbb{R}} |\xi|^{k-2}\big|D_\xi^{s-2}Q(t,\xi)\big|d\xi + \ldots\Bigg], \tag{14}$$

причому кожен із інтегралів у (14) має особливість у точці $\xi = 0$. При вказаному виборі s сума (14) містить k доданків, де останній доданок має вигляд $C^k_{1+[\gamma]+k}k! \int_{\mathbb{R}} \big|D^{1+[\gamma]}_\xi Q(t,\xi)\big| d\xi$, при цьому всі інтеграли збігаються.

Справді, розглянемо один із доданків у сумі (14), що відповідає індексу $k-p$, $0 \le p \le k$:

$$2k(k-1)\ldots(k-p)C^{k-p}_{1+[\gamma]+k}J, \qquad J = \int\limits_0^{+\infty} \xi^{k-p}\big|D^{s-p}_\xi Q(t,\xi)\big| d\xi, \quad s = 1+[\gamma]+k.$$

З оцінок (11) випливає, що для $t \in (0, T^*]$

$$J \le \beta \int\limits_0^{\infty} \xi^{kp}\xi^{\omega_{s-p}-(s-p)} e^{-d_0' t\xi^\gamma} d\xi = \tilde\beta t^{-1/\gamma} t^{-\frac{k-p}{\gamma}} t^{-\frac{\omega_{s-p}-(s-p)}{\gamma}} \int\limits_0^{\infty} y^{k-p} y^{\omega_{s-p}-(s-p)} e^{-y} dy. \quad (15)$$

В околі точки $\xi = 0$ ($\xi < 1$, $\xi \ne 0$) підінтегральна функція допускає оцінку

$$y^{k-p}y^{\omega_{s-p}-(s-p)}e^{-y} \le y^{k-p+\gamma-(s-p)} = y^{k+\gamma-s} = y^{\{\gamma\}-1}, \quad s = 1+[\gamma]+k,$$

звідки і випливає збіжність відповідного невласного інтеграла, оскільки $0 < 1-\{\gamma\} < 1$. Далі, як і у випадку $k = 0$, враховуючи (15), отримуємо оцінку (12).

***Зауваження* 2.** Оскільки $t \in (0, T^*]$, то з (12) випливає, що для функції G та її похідних правильними є також оцінки

$$\big|D^k_x G(t,x)\big| \le \frac{\tilde c_k t^{-([\gamma]+\{\gamma\}/\gamma+k)}}{(1+|x|)^{1+[\gamma]+k}}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+, \quad t \in (0,T^*], \quad x \in \mathbb{R},$$

де $\tilde\delta_k = [\gamma] + \{\gamma\}/\gamma + k$, а функція

$$G(t,x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\xi)e^{-i\xi x} d\xi \quad (16)$$

є неперервно диференційовною функцією аргументу $t \in (0,T]$.

Лема 4. *Функція* $G(t,x)$ (16), *як абстрактна функція параметра* t *із значеннями у просторі* Φ, *є диференційовною по* t.

Доведення. Необхідно показати, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(x) := \frac{G(t+\Delta t, x) - G(t,x)}{\Delta t} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}G(t,x), \quad \Delta t \to 0,$$

виконується в розумінні збіжності у просторі Φ [10], тобто: 1) $\forall m \in \mathbb{Z}_+$: $D^m_x \Phi_{\Delta t} \rightrightarrows$ $\rightrightarrows D^m_x \left(\frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)\right)$, $\Delta t \to 0$, на кожному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$; 2) $\forall p \in \mathbb{Z}_+$ $\exists c(p) > 0$: $\|\Phi_{\Delta t}\|_p \le$ $\le c_p$, де стала c_p не залежить від Δt.

Функція G є диференційовною по t у звичайному розумінні, тому $\Phi_{\Delta t}(x) = G'(t+\theta\Delta t, x)$, $0 < \theta < 1$. Отже,

$$D^m_x \Phi_{\Delta t}(x) = -(2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} (-i\xi)^m f\big(a(\xi)\big) Q(t+\theta\Delta t,\xi)e^{-ix\xi} d\xi, \quad m \in \mathbb{Z}_+,$$

$$D_x^m\left(\frac{\partial}{\partial t}G(t,x)\right)=-(2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}}(-i\xi)^m f\big(a(\xi)\big)Q(t,\xi)e^{-ix\xi}d\xi,\quad m\in\mathbb{Z}_+.$$

Вважаємо, що Δt — настільки мала за модулем величина, що $t/2<t+\theta\Delta t<T$ для довільного фіксованого $t\in(0,T)$. Тоді

$$\left|D_x^m\left(\Phi_{\Delta t}(x)-\frac{\partial}{\partial t}G(t,x)\right)\right|\le$$

$$\le(2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}}|\xi|^m\Big|f\big(a(\xi)\big)\Big|e^{-\tilde{t}f(a(\xi))}\big|Q_2(\xi)\big|d\xi\theta|\Delta t|\le c_{t,m}\cdot|\Delta t|,\quad \tilde{t}>0$$

(збіжність останнього інтеграла випливає з умов, які задовольняють функції f та a). Якщо $t=T$, то розглядаються відповідні односторонні похідні у цій точці. Звідси отримуємо, що

$$D_x^m\Phi_{\Delta t}\to D_x^m\left(\frac{\partial}{\partial t}G(t,\cdot)\right),\qquad \Delta t\to 0,\quad m\in\mathbb{Z}_+,$$

рівномірно відносно $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}$, що й потрібно було довести.

Доведемо, що умова 2 також виконується. Для цього насамперед проведемо оцінювання похідних (по x) функції $\Phi_{\Delta t}(x)$. Якщо $x\neq 0$, $\xi\neq 0$, то, інтегруючи частинами $s=1+[\gamma]+m$ разів, маємо

$$|D_x^m\Phi_{\Delta t}(x)|\le\frac{c}{|x|^s}\Big|\int\limits_{\mathbb{R}}D_\xi^m(\xi^m f(a(x))Q(t+\theta\Delta t,\xi))e^{-ix\xi}d\xi\Big|$$

(те, що позаінтегральні доданки дорівнюють нулеві, обґрунтується, як і при доведенні леми 3). Отже,

$$\big|D_x^m\Phi_{\Delta t}(x)\big|\le\frac{c}{|x|^s}\int\limits_{\mathbb{R}}\Big|D_\xi^s\Big(\xi^m f\big(a(x)\big)\Big)Q(t+\theta\Delta t,\xi)\Big|d\xi\le$$

$$\le\frac{c}{|x|^s}\sum_{k=0}^{s}C_s^k\int\limits_{\mathbb{R}}\Big|D_\xi^k\Big(\xi^m f\big(a(\xi)\big)\Big)\Big|\Big|D_\xi^{s-k}Q(t+\theta\Delta t,\xi)\Big|d\xi\le$$

$$\le\frac{c}{|x|^s}\sum_{k=0}^{s}C_s^k\tilde{\beta}_{s-k}\int\limits_{\mathbb{R}}|\xi|^{\omega_{s-k}-(s-k)}e^{-d_0't|\xi|^\gamma}\Big|D_\xi^k\Big(\xi^m f\big(a(\xi)\big)\Big)\Big|d\xi$$

(тут ми використали оцінки похідних функції $Q(t,\xi)$, наведені у наслідку 1). Крім того,

$$\Big|D_\xi^k\Big(\xi^m f\big(a(\xi)\big)\Big)\Big|\le\Big|\xi^m D_\xi^k f\big(a(\xi)\big)\Big|+mk\Big|\xi^{m-1}D_\xi^{k-1}f\big(a(\xi)\big)\Big|+$$

$$+\frac{1}{2!}m(m-1)k(k-1)\Big|\xi^{m-2}D_\xi^{k-2}f\big(a(\xi)\big)\Big|+\ldots$$

$$\ldots+m(m-1)\ldots\big(m-(k-1)\big)\Big|\xi^{m-k}f\big(a(\xi)\big)\Big|,\quad k\le m.$$

Якщо $|\xi| < 1$, $\xi \neq 0$, то з оцінок функції $f\big(a(\xi)\big)$ та її похідних, наведених в [11], випливає, що

$$\big|D_\xi^{k-j} f\big(a(\xi)\big)\big| \leq c_{k-j}|\xi|^{\gamma-(k-j)}, \quad 0 \leq j \leq k;$$

якщо $|\xi| \geq 1$, то (див. [11])

$$\big|D_\xi^{k-j} f\big(a(\xi)\big)\big| \leq \tilde{c}_{k-j}|\xi|^{\omega_{k-j}-(k-j)+1} \equiv \tilde{c}_{k-j}|\xi|^{(k-j)(\gamma-1)+1}.$$

Якщо $s = 1 + [\gamma] + m$, то в околі точки $\xi = 0$ підінтегральна функція у кожному доданку вигляду

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-d_0' t|\xi|^\gamma} |\xi|^{\omega_{s-k}-(s-k)} |\xi|^{m-j} \big|D_\xi^{k-j} f\big(a(\xi)\big)\big| d\xi, \qquad 0 \leq j \leq k, \quad 0 \leq k \leq s,$$

еквівалентна функції $|\xi|^{-(1+[\gamma]-\gamma)} = |\xi|^{-(1-\{\gamma\})}$, де $0 < 1 - \{\gamma\} < 1$, тобто всі такі невласні інтеграли з особливою точкою $\xi = 0$ є збіжними. Збіжність цих інтегралів на нескінченності забезпечується тим, що функція $f(a)$ разом з усіма своїми похідними на нескінченності зростає не швидше за степеневу функцію.

Отже, при $|x| \geq 1$ з наведених вище оцінок випливає нерівність

$$\big|D_x^m \Phi_{\Delta t}(x)\big| \leq c_m |x|^{-(1+[\gamma]+m)}, \quad m \in \mathbb{Z}_+,$$

де сталі $c_m > 0$ не залежать від Δt та x. Тоді

$$\sum_{m=0}^{p} M(x)^{\omega_0+m} \big|D_x^m \Phi_{\Delta t}(x)\big| \leq c_p, \qquad c_p = \sum_{m=0}^{p} 2^{\gamma_0+m} c_m,$$

де $p \in \mathbb{Z}_+$ — фіксоване число. Якщо ж $|x| \leq 1$, то $\big|D_x^m \Phi_{\Delta t}(x)\big| \leq \tilde{c}_m$, де сталі $\tilde{c}_m > 0$ також не залежать від Δt та x. Отже, для x, $|x| < 1$, правильною є оцінка

$$\sum_{m=0}^{p} M(x)^{\omega_0+m} \big|D_x^m \Phi_{\Delta t}(x)\big| \leq \tilde{c}_p, \qquad \tilde{c}_p = \sum_{m=0}^{p} 2^{\gamma_0+m} \tilde{c}_m.$$

Підсумовуючи, можемо стверджувати, що для довільного фіксованого $p \in \mathbb{Z}_+$ справджується нерівність

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \sum_{m=0}^{p} M(x)^{\omega_0+m} \big|D_x^m \Phi_{\Delta t}(x)\big| \right\} \leq c_p',$$

де $c_p' > 0$ не залежить від Δt, тобто $\forall p \in \mathbb{Z}_+ \ \exists c_p' > 0 \colon \|\Phi_{\Delta t}\|_p \leq c_p'$.

Лему доведено.

***Наслідок* 2.** *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(g * G(t, \cdot)\big) = g * \frac{\partial}{\partial t} G(t, \cdot) \quad \forall g \in \Phi', \quad t \in (0, T].$$

Доведення. За означенням згортки узагальненої функції з основною маємо

$$g * G(t, \cdot) = \langle g_\xi, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\rangle, \quad \check{G}(t,\xi) = G(t,-\xi).$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(g * G(t,x)\big) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big[\big(f * G(t+\Delta t, x)\big) - \big(f * G(t,x)\big)\Big] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\langle f_\xi, \frac{1}{\Delta t}\Big[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)\Big]\right\rangle.$$

Згідно з лемою 4 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}\Big[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\cdot) - T_{-x}\check{G}(t,\cdot)\Big] \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial t} T_{-x}\check{G}(t,\cdot)$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору Φ, тому, з урахуванням неперервності функціонала f, маємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(g * G(t,\cdot)\big) = \left\langle g_\xi, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)\Big]\right\rangle =$$

$$= \langle g_\xi, \frac{\partial}{\partial t} T_{-x}\check{G}(t,\xi)]\Big\rangle = \Big\langle g_\xi, T_{-x}\frac{\partial}{\partial t}\check{G}(t,\xi)]\Big\rangle = g * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t}.$$

Твердження доведено.

Лема 5. *У просторі Φ' справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t \to +0} G(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} G(t,\cdot) = \delta \tag{17}$$

(δ — *дельта-функція Дірака*).

Доведення. Використавши властивість неперервності перетворення Фур'є та функції $G(t,\cdot)$, як абстрактної функції параметра t із значеннями у просторі Φ, співвідношення (17) замінимо еквівалентним граничним співвідношенням

$$\mu \lim_{t \to +0} F\big[G(t,\cdot)\big] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} F\big[G(t,\cdot)\big] = F[\delta] \tag{18}$$

у просторі Ψ'. Урахувавши зображення (16) функції G, запишемо (18) у вигляді

$$\mu \lim_{t \to +0} Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} Q(t,\cdot) = 1. \tag{19}$$

Для доведення (19) виберемо довільну функцію $\varphi \in \Psi$ і, використавши теорему про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, знайдемо

$$\mu \lim_{t \to +0} \left\langle Q(t,\cdot), \varphi\rangle - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} \langle Q(t,\cdot), \varphi \right\rangle =$$

$$= \mu \lim_{t\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left[\mu Q(0,\sigma) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q(t_k,\sigma)\right] \varphi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left[\frac{\mu}{\mu - \sum_{k=1}^{m} Q_1(t_k,\sigma)} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \frac{Q_1(t_k,\sigma)}{\mu - \sum_{l=1}^{m} \mu_l Q_1(t_l,\sigma)}\right] \varphi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)}{\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)} \varphi(\sigma)d\sigma = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(\sigma)d\sigma = \langle 1, \varphi\rangle.$$

Звідси випливає, що співвідношення (19) виконується у просторі Ψ', а отже, правильним є співвідношення (17).

Лему доведено.

***Наслідок* 3.** *Нехай* $\omega(t,x) = g * G(t,x)$, $g \in \Phi'_*$, $(t,x) \in \Omega$. *Тоді у просторі* Φ' *справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} \omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \omega(t,\cdot) = g. \tag{20}$$

Функція G є розв'язком рівняння (1). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} F^{-1}\big[Q(t,\sigma)\big] = F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)\right].$$

З іншого боку,

$$A_f G(t,x) = F^{-1}_{\sigma\to x}\Big[f(\sigma) F_{x\to\sigma}\big[G(t,x)\big]\Big] = F^{-1}\big[f(\sigma)Q(t,\sigma)\big] = -F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)\right],$$

звідки й випливає, що функція G задовольняє рівняння (1).

З наслідку 3 випливає, що для рівняння (1) m-точкову за часом задачу можна сформулювати так: знайти розв'язок $u \in C^1\big((0,T],\Phi\big)$ рівняння (1), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = g, \quad g \in \Phi'_*, \tag{21}$$

де граничне співвідношення (20) розглядається у просторі Φ' (обмеження на параметри μ, $\mu_1, \ldots, \mu_m$, $t_1, \ldots, t_m$ такі ж, як і у випадку задачі (1), (2)).

Далі функцію $G(t,x)$, яка задовольняє рівняння (1) та умову (17), називатимемо фундаментальним розв'язком нелокальної багатоточкової задачі (1), (21).

Теорема. *Задача* (1), (21) *є коректно розв'язною, тобто розв'язок* $u(t,x)$ *рівняння* (1) *існує,* $u(t,\cdot) \in C_1\big((0,T],\Phi\big)$, *задовольняє граничну умову* (21) *у просторі* Φ' *і неперервно залежить від граничної функції* $g \in \Phi'_*$.

Розв'язок дається формулою $u(t,x) = g * G(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, *де* G *— фундаментальний розв'язок нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння* (1).

Доведення. Насамперед переконаємося в тому, що функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (1). Справді (див. наслідок 2),

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\big(g * G(t,x)\big) = g * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t},$$

$$A_f u(t,x) = F^{-1}\Big[f(\sigma)F\big[g * G(t,x)\big](\sigma)\Big](x).$$

Оскільки g — згортувач у просторі Φ, то

$$F\big[g * G(t,x)\big](\sigma) = F[g](\sigma)F\big[G(t,x)\big](\sigma) = F[g](\sigma)\cdot Q(t,\sigma).$$

Отже,

$$A_f u(t,x) = F^{-1}\Big[f(\sigma)Q(t,\sigma)F[g](\sigma)\Big](x) = -F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)F[g](\sigma)\right] =$$

$$= -F^{-1}\left[F\left[\frac{\partial}{\partial t}G\right]\cdot F[g]\right] = -F^{-1}\left[F\left[g * \frac{\partial G}{\partial t}\right]\right] = -g * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t}.$$

Звідси дістаємо, що функція $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (1). З наслідку 3 випливає, що u задовольняє умову (21) у вказаному сенсі.

Зазначимо також, що u неперервно залежить від функції $g \in \Phi'_*$, оскільки операція згортки має властивість неперервності.

Залишилося переконатися в тому, що задача (1), (21) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} - A_f^* v = 0, \qquad (t,x) \in [0,t_0) \times \mathbb{R} \equiv \Omega', \qquad 0 \le t < t_0 \le T, \tag{22}$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0} = \psi, \quad \psi \in \Phi'_*, \tag{23}$$

де A_f^* — звуження спряженого оператора до оператора A_f на простір $\Phi \subset \Phi'$. Умову (23) розуміємо у слабкому сенсі. В цьому випадку $A_f^* = A_f$, задача Коші (22), (23) є розв'язною, при цьому $v(t,\cdot) \in \Phi$ при кожному $t \in [0,t_0)$.

Нехай $Q_{t_0}^t \colon \Phi'_* \to \Phi$ — оператор, який зіставляє функціоналу $\psi \in \Phi'_*$ розв'язок задачі (22), (23). Оператор $Q_{t_0}^t$ є лінійним і неперервним, він визначений для довільних t і t_0 таких, що $0 \le t < t_0 \le T$; при цьому

$$\frac{dQ_{t_0}^t\psi}{dt} - A_f^* Q_{t_0}^t \psi = 0, \qquad \lim_{t\to t_0} Q_{t_0}^t \psi = \psi$$

(границя розглядається у просторі Φ').

Далі розв'язок $u(t,x)$ задачі (1), (23) розумітимемо як регулярний функціонал з простору $\Phi'_* \supset \Phi$. Доведемо, що задача (1), (23) має єдиний розв'язок у просторі Φ'_*. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (1) при нульовій граничній функції може бути лише функціонал $u(t,x) \equiv 0$. Застосуємо функціонал $u(t,x)$ до функції $Q_{t_0}^t\psi \in \Phi \subset \Phi'_*$, де ψ — довільно фіксований елемент простору $\Phi \subset \Phi'_*$, $0 < t < t_0 \le T$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння (1), отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t\psi\rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q_{t_0}^t\psi \right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial}{\partial t} Q_{t_0}^t\psi \right\rangle =$$

$$= -\big\langle A_f u, Q_{t_0}^t\psi\big\rangle + \big\langle u, A_f^* Q_{t_0}^t\psi\big\rangle = -\big\langle A_f u, Q_{t_0}^t\psi\big\rangle + \big\langle A_f u, Q_{t_0}^t\psi\big\rangle = 0.$$

Отже, $\big\langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t\psi\big\rangle$ є сталою величиною. Із властивостей абстрактних функцій (див. [12, с. 94 – 96]) випливає співвідношення

$$\lim_{t\to t_0} \left\langle u(t,\cdot), Q_{t_0}^t\psi \right\rangle = \left\langle u(t_0,\cdot), \psi \right\rangle = \mathrm{const} = c$$

у довільній точці $t_0 \in (0,T]$. Якщо в (21) $g = 0$, то

$$\mu \lim_{t\to+0} \left\langle u(t,\cdot), \psi \right\rangle - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \langle u(t,\cdot), \psi\rangle = c\left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k\right) = 0,$$

тобто $c = 0$. Отже, $\langle u(t_0,\cdot), \psi\rangle = 0$ для довільного елемента $\psi \in \Phi \subset \Phi'_*$, тобто $u(t_0,\cdot)$ — нульовий функціонал у просторі Φ'_*. Оскільки $t_0 \in (0,T]$ і t_0 вибрано довільним чином, то $u(t,\cdot) \equiv 0$ для всіх $t \in (0,T]$.

Теорему доведено.

Зазначимо, що наведені результати є правильними і у випадку кількох просторових змінних.

1. *Эйдельман С. Д., Дринь Я. М.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решений задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений // Приближенные методы математического анализа. – Киев, 1974. – С. 60 – 69.
2. *Дринь Я. М.* Фундаментальное решение задачи Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 3. – С. 198 – 203.
3. *Ейдельман С. Д., Дрінь Я. М.* До теорії систем параболічних псевдодиференціальних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1989. – № 4. – С. 10 – 12.
4. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Berlin etc.: Birkhäuser, 2004. – 387 p.
5. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
6. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные значения решений некоторых классов дифференциальных уравнений // Мат. сб. – 1977. – **102**, № 1. – С. 124 – 150.
7. *Gorbachuk M. L., Gorbachuk V. I.* Boundary value problems for operator differential equations. – Dordrecht etc.: Klüwer, 1991. – 347 p.
8. *Gorbachuk M. L., Gorbachuk V. I.* On behavior of weak solutions of operator differential equations on $(0,\infty)$ // Oper. Theory: Adv. and Appl. – 2009. – **191**. – P. 116 – 126.
9. *Gorbachuk M. L., Gorbachuk V. I.* On extensions and restrictions of semigroups of linear operators in a Banach space and their applications // Math. Nachr. – 2012. – **285**, № 14-15. – S. 1860 – 1879.
10. *Городецький В. В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 225 с.
11. *Городецький В. В., Дрінь Я. М.* Псевдодиференціальні оператори нескінченного порядку в зліченно нормованих просторах гладких функцій // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 2. – С. 55 – 69.
12. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

Одержано 15.07.13