УДК 517.956

К. К. Кенжебаев, Г. А. Абдикаликова, А. Б. Бержанов (Актюб. гос. ун-т им. К. Жубанова, Казахстан)

МНОГОПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С МНОГОМЕРНЫМ ВРЕМЕНЕМ

We study the existence and uniqueness of the multiperiodic solution of the first boundary-value problem for a system of parabolic equations with multidimensonal time.

Вивчаються існування та єдиність багатоперіодичного розв'язку першої крайової задачі для системи рівнянь параболічного типу з багатовимірним часом.

Вопросу существования, единственности решения краевых задач для уравнений и систем параболического типа, в которых условия связывают искомое решение и его производные в различных точках, лежащих на границе или внутри рассматриваемой области, посвящены многочисленные работы (см., например, [1, 2] и приведенную в них библиографию). Среди краевых задач, заданных во всем пространстве, значительный интерес представляют полупространственные краевые задачи, к которым, в свою очередь, приводит изучение периодических и почти периодических решений по временной и пространственным переменным систем уравнений параболического типа [3].

В настоящей работе изучаются существование и единственность многопериодического решения первой краевой задачи для системы уравнений параболического типа с многомерным временем.

Будем рассматривать линейное уравнение параболического типа с многомерным временем

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial t_j} - \Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \gamma u = f(\tau, t, x, y), \tag{1}$$

где $(\tau, t) \in E_{1+m}$ — пространство временных переменных, $y \in E_1^+ = [0, +\infty)$, E_n — n-мерное вещественное евклидово пространство векторов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$; $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа; $\gamma = \text{const} > 0$; $f(\tau, t, x, y)$ — заданная функция.

Будем полагать, что функция $f(\tau, t, x, y)$:

1) (θ, ω, σ)-периодична по τ, t, x равномерно относительно y

$$f(\tau + \theta, t + k\omega, x + p\sigma, y) = f(\tau, t, x, y), \qquad k \in Z^m, \qquad p \in Z^n,$$

где $\theta, \omega_1, \ldots, \omega_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — периоды, $k\omega = (k_1\omega_1, k_2\omega_2, \ldots, k_m\omega_m)$ — m-вектор, $p\sigma = (p_1\sigma_1, p_2\sigma_2, \ldots, p_n\sigma_n)$ — n-вектор;

2) удовлетворяет по временным τ, t и пространственным x, y переменным условию Гельдера с показателем $\dfrac{\alpha}{2}$ и α соответственно

$$\left\| f(\overline{\tau}, \overline{t}, \overline{x}, \overline{y}) - f(\tau, t, x, y) \right\| \leq$$
$$\leq \Gamma_1 \left(\|\overline{\tau} - \tau\|^{\alpha/2} + \left\|\overline{t} - t\right\|^{\alpha/2} + \|\overline{x} - x\|^{\alpha} + \|\overline{y} - y\|^{\alpha} \right),$$

где Γ_1 — const; $\alpha \in (0, 1)$.

Задача 1. Найти достаточные условия существования и единственности многопериодического по τ, t и x решения уравнения параболического типа (1), удовлетворяющего граничному условию

$$u(\tau, t, x, 0) = \Psi(\tau, t, x). \tag{2}$$

Предположим, что функция $\Psi(\tau, t, x)$ (θ, ω, σ)-периодична по τ, t, x:

$$\Psi(\tau+\theta, t+k\omega, x+p\sigma) = \Psi(\tau, t, x), \qquad k \in Z^m, \quad p \in Z^n,$$

и удовлетворяет по временным переменным τ, t и x условию Гельдера с показателем $\dfrac{\alpha}{2}$ и $\alpha \in (0,1)$ соответственно

$$\left\|\Psi\left(\overline{\tau}, \bar{t}, \overline{x},\right) - \Psi(\tau, t, x)\right\| \leq$$

$$\leq \Gamma_2\left(\|\overline{\tau}-\tau\|^{\alpha/2} + \left\|\bar{t}-t\right\|^{\alpha/2} + \|\overline{x}-x\|^{\alpha}\right),$$

где $\theta, \omega_1, \ldots, \omega_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — периоды, $k\omega = (k_1\omega_1, k_2\omega_2, \ldots, k_m\omega_m)$ — m-вектор, $p\sigma = (p_1\sigma_1, p_2\sigma_2, \ldots, p_n\sigma_n)$ — n-вектор; Γ_2 — const.

Развивая идеи работ [4 – 6] для нахождения достаточного условия существования и единственности многопериодического по τ, t и x решения первой краевой задачи (1), (2) уравнения параболического типа с многомерным временем, дополним задачу 1 начальным условием

$$u(\tau_0, t, x, y) = \varphi(t, x, y) \in CB\left(E^+_{m+n+1}\right), \tag{3}$$

где $CB\left(E^+_{m+n+1}\right)$ — банахово пространство непрерывных и ограниченных на E^+_{m+n+1} функций $\varphi(t, x, y)$ с нормой

$$\|\varphi(t, x, y)\|_{CB\left(E^+_{m+n+1}\right)} = \sup_{E^+_{m+n+1}} \|\varphi(t, x, y)\| +$$

$$+ \sup_{x, \overline{x} \in E_n} \frac{\|\varphi(t, \overline{x}, y) - \varphi(t, x, y)\|}{\|\overline{x}-x\|^{\alpha}}, \qquad \alpha \in (0,1).$$

Предположим, что выполнено условие согласования

$$\varphi(t, x, 0) = \Psi(\tau_0, t, x).$$

Для решения краевой задачи (1) – (3), а также для нахождения многопериодического решения краевой задачи (1), (2) путем специального выбора начальной функции $\varphi(t, x, y)$ вначале ищется решение предварительной вспомогательной задачи.

Задача 2. Найти единственное (θ, ω, σ)-периодическое решение уравнения

$$L\overline{u} = \overline{f}(\tau, t, x, y), \tag{4}$$

удовлетворяющего условиям

$$\overline{u}(\tau_0, t, x, y) = \overline{\varphi}(t, x, y), \tag{5}$$

$$\overline{u}(\tau, t, x, 0) = \Psi(\tau, t, x), \tag{6}$$

где

$$\overline{f}(\tau,t,x,y)=\begin{cases} f(\tau,t,x,y) & \text{для} \quad y\geq 0,\\ -f\left(\tau,t,x,-y\right) & \text{для} \quad y<0,\end{cases}$$

$$\overline{\varphi}(t,x,y)=\begin{cases} \varphi(t,x,y) & \text{для} \quad y\geq 0,\\ -\varphi\left(t,x,-y\right) & \text{для} \quad y<0.\end{cases}$$

Решение вспомогательной задачи (4) – (6) ищем в виде

$$\overline{u}(\tau,t,x,y)=e^{-\gamma(\tau-\tau_0)}\int\limits_{E_n} V\left(\tau-\tau_0,x-\xi\right)\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U\left(\tau-\tau_0,y-\eta\right)U_0\left(\tau-\tau_0,t-e\tau+e\tau_0\right)\times$$

$$\times\overline{\varphi}\left(t-e\tau+e\tau_0,\xi,\eta\right)d\eta d\xi+$$

$$+\int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{-\gamma(\tau-s)}\int\limits_{E_n} V\left(\tau-s,x-\xi\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U\left(\tau-s,y-\eta\right)\times$$

$$\times U_0\left(\tau-s,t-e\tau+es\right)\overline{f}\left(s,t-e\tau+es,\xi,\eta\right)d\eta d\xi ds+$$

$$+\int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{-\gamma(\tau-s)}\int\limits_{E_n} V\left(\tau-s,x-\xi\right)\frac{\partial U}{\partial\eta}\left(\tau-s,y-\eta\right)\times$$

$$\times U_0\left(\tau-s,t-e\tau+es\right)\Psi\left(s,t-e\tau+es,\xi\right)d\xi ds. \tag{7}$$

Отметим, что при изучении поставленной задачи важную роль играет фундаментальное решение оператора L. Известно, что функция $V\left(\tau-\tau_0,x-\xi\right)=\left[4\pi\left(\tau-\tau_0\right)\right]^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(\tau-\tau_0)}}$ является фундаментальным решением уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial\tau}-\Delta u=0$ при $\tau>\tau_0$, для $\tau\leq\tau_0$ фундаментальное решение $V\left(\tau-\tau_0,x-\xi\right)$ продолжено нулем. Уравнение $\dfrac{\partial u}{\partial\tau}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ имеет фундаментальное решение

$$U\left(\tau-\tau_0,y-\eta\right)=\left[4\pi\left(\tau-\tau_0\right)\right]^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{|y-\eta|^2}{4(\tau-\tau_0)}}$$

для $\tau>\tau_0$, для $\tau\leq\tau_0$ фундаментальное решение продолжено нулем. При всех $t,\,s\in E_m$, $x,\xi\in E_n$, $y,\eta\in E_1$ функция

$$V\left(\tau-\tau_0,x-\xi\right)U\left(\tau-\tau_0,y-\eta\right)U_0\left(\tau-\tau_0,t-e\tau+e\tau_0\right)e^{-\gamma(\tau-\tau_0)} \tag{8}$$

является фундаментальным решением оператора L при $\tau > \tau_0$, при $\tau \leq \tau_0$ фундаментальное решение продолжено нулем, $t - e\tau + es$ — характеристика дифференциального оператора $\dfrac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{m} \dfrac{\partial}{\partial t_j}$, $e = (1, 1, \ldots, 1) - m$-вектор.

Полагая, что функция $\overline{\varphi}(t, x, y)$ в (7) не является фиксированной, а любая из $CB\left(E_{m+n+1}\right)$, выделяем с помощью необходимого и достаточного условия периодичности относительно временной переменной τ

$$\overline{u}\left(\tau_0, t, x, y\right) = \overline{u}\left(\tau_0 + \theta, t, x, y\right)$$

среди решений (7) многопериодическое решение

$$\overline{\varphi}(t, x, y) = e^{-\gamma(\tau_0 + \theta - \tau_0)} \int\limits_{E_n} V\left(\tau_0 + \theta - \tau_0, x - \xi\right) \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U\left(\tau_0 + \theta - \tau_0, y - \eta\right) U_0\left(\tau_0 + \theta - \tau_0, t - e\tau_0 + \theta + e\tau_0\right) \times$$

$$\times \overline{\varphi}\left(t - e\tau_0 + \theta - \tau_0, \xi, \eta\right) d\eta d\xi + \int\limits_{\tau_0}^{\tau_0 + \theta} e^{-\gamma(\tau_0 + \theta - s)} \int\limits_{E_n} V\left(\tau_0 + \theta - s, x - \xi\right) \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U\left(\tau_0 + \theta - s, y - \eta\right) U_0\left(\tau_0 + \theta - s, t - e\tau_0 + \theta + es\right) \times$$

$$\times \overline{f}\left(s, t - e\tau + es, \xi, \eta\right) d\eta d\xi + \int\limits_{\tau_0}^{\tau_0 + \theta} e^{-\gamma(\tau_0 + \theta - s)} \int\limits_{E_n} V\left(\tau_0 + \theta - s, x - \xi\right) \times$$

$$\times \frac{\partial U}{\partial \eta}\left(\tau_0 + \theta - s, y - \eta\right) U_0\left(\tau_0 + \theta - s, t - e\tau_0 + \theta + es\right) \Psi\left(s, t - e\tau + es, \xi\right) d\xi ds.$$

Предполагая, что функция $\overline{f}(\tau, t, x, y)$ периодична по τ с положительным периодом θ, и при этом сохраняя периодичность по t и x равномерно относительно y, учитывая диагональную периодичность $V\left(\tau - \tau_0, x - \xi\right), U\left(\tau - \tau_0, y - \eta\right), U_0\left(\tau - \tau_0, t - e\tau + e\tau_0\right)$, используя формулу типа свертки, а также применяя метод последовательных приближений, получаем ряд

$$\overline{\varphi}(t, x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\varphi}_m(t, x, y), \tag{9}$$

члены которого определяются из рекуррентных соотношений

$$\overline{\varphi}_0(t, x, y) = \int\limits_{\tau_0 - \theta}^{\tau_0} e^{-\gamma(\tau_0 - s)} \int\limits_{E_n} V\left(\tau_0 - s, x - \xi\right) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} U(\tau_0 - s, y - \eta) U_0(\tau_0 - s, t - e\tau_0 + es) \overline{f}(s, t - e\tau + es, \xi, \eta) \, d\eta d\xi ds +$$

$$+ \int_{\tau_0-\theta}^{\tau_0} e^{-\gamma(\tau_0 - s)} \int_{E_n} V(\tau_0 - s, x - \xi) \times$$

$$\times \frac{\partial U}{\partial \eta}(\tau_0 - s, y - \eta) U_0(\tau_0 - s, t - e\tau_0 + es) \Psi(s, t - e\tau + es, \xi) \, d\xi ds,$$

$$\overline{\varphi}_1(t, x, y) = \int_{\tau_0-2\theta}^{\tau_0-\theta} e^{-\gamma(\tau_0 - s)} \int_{E_n} V(\tau_0 - s, x - \xi) U_0(\tau_0 - s, t - e\tau_0 + es) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} U(\tau_0 - s, y - \eta) \overline{f}(s, t - e\tau + es, \xi, \eta) \, d\eta d\xi ds +$$

$$+ \int_{\tau_0-2\theta}^{\tau_0-\theta} e^{-\gamma(\tau_0 - s)} \int_{E_n} V(\tau_0 - s, x - \xi) \times$$

$$\times \frac{\partial U}{\partial \eta}(\tau_0 - s, y - \eta) U_0(\tau_0 - s, t - e\tau_0 + es) \Psi(s, t - e\tau + es, \xi) \, d\xi ds,$$

$$. \quad . \qquad (10)$$

$$\overline{\varphi}_m(t, x, y) = e^{-\gamma\theta} \int_{E_n} V(\theta, x - \xi) \int_{-\infty}^{+\infty} U(\theta, y - \eta) U_0(\theta, t - e\tau_0 + \theta + e\tau_0) \times$$

$$\times \overline{\varphi}_{m-1}(t - e\tau_0 + \theta + e\tau_0, \xi, \eta) \, d\eta d\xi =$$

$$= \int_{\tau_0-(m+1)\theta}^{\tau_0-m\theta} e^{-\gamma(\tau_0 - s)} \int_{E_n} V(\tau_0 - s, x - \xi) U_0(\tau_0 - s, t - e\tau_0 + es) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} U(\tau_0 - s, y - \eta) \overline{f}(s, t - e\tau + es, \xi, \eta) \, d\eta d\xi ds +$$

$$+ \int_{\tau_0-(m+1)\theta}^{\tau_0-m\theta} e^{-\gamma(\tau_0 - s)} \int_{E_n} V(\tau_0 - s, x - \xi) \times$$

$$\times \frac{\partial U}{\partial \eta}\left(\tau_0 - s, y - \eta\right) U_0\left(\tau_0 - s, t - e\tau_0 + es\right) \Psi\left(s, t - e\tau + es, \xi\right) d\xi ds.$$

Можно установить, что ряд (9) сходится равномерно и абсолютно. Для доказательства сходимости ряда (9) представим его в виде

$$\overline{\varphi}_0(t,x,y) + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\overline{\varphi}_m(t,x,y) - \overline{\varphi}_{m-1}(t,x,y)\right]. \tag{10'}$$

Исходя из (10), имеем

$$\left|\overline{\varphi}_m(t,x,y) - \overline{\varphi}_{m-1}(t,x,y)\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\tau_0 - m\theta}^{\tau_0-(m-1)\theta} e^{-\gamma(\tau_0 - s)} \int\limits_{E_n} V\left(\tau_0 - s, x - \xi\right) U_0\left(\tau_0 - s, t - e\tau_0 + es\right) \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U\left(\tau_0 - s, y - \eta\right) \left|\overline{f}\left(s, t - e\tau + es, \xi, \eta\right)\right| d\eta d\xi ds +$$

$$+ \int\limits_{\tau_0 - m\theta}^{\tau_0-(m-1)\theta} e^{-\gamma(\tau_0 - s)} \int\limits_{E_n} V\left(\tau_0 - s, x - \xi\right) \times$$

$$\times \frac{\partial U}{\partial \eta}\left(\tau_0 - s, y - \eta\right) U_0\left(\tau_0 - s, t - e\tau_0 + es\right) \left|\Psi\left(s, t - e\tau + es, \xi\right)\right| d\xi ds \leq$$

$$\leq \int\limits_{\tau_0 - m\theta}^{\tau_0-(m-1)\theta} e^{-\gamma(\tau_0 - s)} M_0 f_0 ds + \int\limits_{\tau_0 - m\theta}^{\tau_0-(m-1)\theta} e^{-\gamma(\tau_0 - s)} M_1 \Psi_0 ds =$$

$$= M_0 f_0 \gamma^{-1}\left[e^{-\gamma(m-1)\theta} - e^{-\gamma m\theta}\right] + M_1 \Psi_0 \gamma^{-1}\left[e^{-\gamma(m-1)\theta} - e^{-\gamma m\theta}\right] =$$

$$= \gamma^{-1}\left[e^{-\gamma(m-1)\theta} - e^{-\gamma m\theta}\right]\left(M_0 f_0 + M_1 \Psi_0\right) =$$

$$= \gamma^{-1} e^{-\gamma m\theta}\left[e^{\gamma\theta} - 1\right]\left(M_0 f_0 + M_1 \Psi_0\right), \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

где

$$\left|U_0\left(\tau_0 - \tau, t - e\tau_0 + es\right)\right| \leq M_0, \qquad \left|\frac{\partial U}{\partial y}\left(\tau_0 - \tau, y - \eta\right)\right| \leq M_1,$$

$$\left|\overline{f}\left(\tau, t - e\tau + es, x, y\right)\right| \leq f_0, \qquad \left|\Psi\left(\tau, t - e\tau + es, x\right)\right| \leq \Psi_0.$$

Отметим, что при оценивании использованы известные оценки из общей теории (см., например, [3, с. 115]):

$$\int\limits_{E_n} V\left(\tau_0 - s, x - \xi\right) d\xi \leq 1, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U\left(\tau_0 - s, y - \eta\right) d\eta \leq 1.$$

Поскольку $e^{-\gamma\theta} < 1$, ряд $(10^{'})$ мажорируется сходящимся числовым рядом для любых t, x, $y \in E_{m+n+1}$: $\widetilde{\varphi}_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{\widetilde{\varphi}_0}{2^{m-1}}$, $\widetilde{\varphi}_0$ – const.

Таким образом, ряд (9) сходится равномерно и абсолютно.

Тогда имеем равномерную сходимость последовательных приближений (10) к предельной вектор-функции:

$$\overline{\varphi}^*(t,x,y) = \lim_{m\to\infty} \overline{\varphi}_m(t,x,y) = \int\limits_{-\infty}^{\tau_0} e^{-\gamma(\tau_0 - s)} \int\limits_{E_n} V\left(\tau_0 - s, x - \xi\right) U_0\left(\tau_0 - s, t - e\tau_0 + es\right) \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U\left(\tau_0 - s, y - \eta\right) \overline{f}\left(s, t - e\tau + es, \xi, \eta\right) d\eta d\xi ds +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\tau_0} e^{-\gamma(\tau_0 - s)} \int\limits_{E_n} V\left(\tau_0 - s, x - \xi\right) \times$$

$$\times \frac{\partial U}{\partial \eta}\left(\tau_0 - s, y - \eta\right) U_0\left(\tau_0 - s, t - e\tau_0 + es\right) \Psi\left(s, t - e\tau + es, \xi\right) d\xi ds. \qquad (10'')$$

Нетрудно показать, что $\overline{\varphi}^*(t,x,y)$ принадлежит $CB\left(E_{m+n+1}\right)$. За начальную вектор-функцию задачи примем вектор-функцию $\overline{\varphi}^*(t,x,y)$ и подставим в (7).

С учетом нечетного продолжения $\overline{f}(\tau,t,x,y)$ искомое решение задачи (1), (2) определяется так:

$$u^*(\tau,t,x,y) = \int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{-\gamma(\tau - s)} \int\limits_{E_n} V\left(\tau - s, x - \xi\right) U_0\left(\tau - s, t - e\tau + es\right) \times$$

$$\times \int\limits_{0}^{+\infty} \left[U\left(\tau - s, y - \eta\right) - U\left(\tau - s, y + \eta\right)\right] \times$$

$$\times f\left(s, t - e\tau + es, \xi, \eta\right) d\eta d\xi ds + \int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{-\gamma(\tau - s)} \int\limits_{E_n} V\left(\tau - s, x - \xi\right) \times$$

$$\times \frac{\partial U}{\partial \eta}\left(\tau - s, y - \eta\right) U_0\left(\tau - s, t - e\tau + es\right) \Psi\left(s, t - e\tau + es, \xi\right) d\xi ds. \qquad (11)$$

Сходимость интеграла (11) обеспечивается соотношением (8) и ограниченностью функций $f(\tau,t,x,y)$ и $\Psi\left(\tau,t,x\right)$. Из построения следует, что функция $u^*(\tau,t,x,y)$ является решением задачи (1), (2), причем $u^*(\tau,t,x,y)$ принадлежит $C^{(1,1,2,2)}_{\tau,t,x,y}\left(E^+_{1+m+n+1}\right)$. Здесь решающую роль играют условия на функции $f(\tau,t,x,y)$ и $\Psi\left(\tau,t,x\right)$, в том числе равномерное условие Гельдера.

Непосредственно можно установить следующие свойства функции $u^*(\tau,t,x,y)$:

1) она является (θ,ω,σ)-периодической по τ,t и x равномерно относительно y.

Действительно, рассмотрим

$$u^*\left(\tau+\theta,t+k\omega,x+p\sigma,y\right)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\tau+\theta}e^{-\gamma(\tau+\theta-s)}\int\limits_{E_n}V\left(\tau+\theta-s,x+p\sigma-\xi\right)U_0\left(\tau+\theta-s,t+k\omega-e(\tau+\theta)+es\right)\times$$

$$\times\int\limits_0^{+\infty}\left[U\left(\tau+\theta-s,y-\eta\right)-U\left(\tau+\theta-s,y+\eta\right)\right]\times$$

$$\times f\left(s,t+k\omega-e(\tau+\theta)+es,\xi,\eta\right)d\eta d\xi ds+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\tau+\theta}e^{-\gamma(\tau+\theta-s)}\int\limits_{E_n}V\left(\tau+\theta-s,x+p\sigma-\xi\right)\frac{\partial U}{\partial\eta}\left(\tau+\theta-s,y-\eta\right)\times$$

$$\times U_0\left(\tau+\theta-s,t+k\omega-e(\tau+\theta)+es\right)\Psi\left(s,t+k\omega-e(\tau+\theta)+es,\xi\right)d\xi ds.$$

В правой части выполним замену $s=s_1+\theta$ и $\xi=\xi_1+p\sigma$, затем в полученном интеграле s_1 и ξ_1 снова заменим на s и ξ. В результате придем к выражению

$$u^*\left(\tau+\theta,t+k\omega,x+p\sigma,y\right)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\tau}e^{-\gamma(\tau+\theta-(s+\theta))}\int\limits_{E_n}V\left(\tau+\theta-(s+\theta),x+p\sigma-(\xi+p\sigma)\right)\times$$

$$\times U_0\left(\tau+\theta-(s+\theta),t+k\omega-e(\tau+\theta)+e(s+\theta)\right)\times$$

$$\times\int\limits_0^{+\infty}\left[U\left(\tau+\theta-(s+\theta),y-\eta\right)-U\left(\tau+\theta-(s+\theta),y+\eta\right)\right]\times$$

$$\times f\left(s+\theta,t+k\omega-e(\tau+\theta)+e(s+\theta),\xi+p\sigma,\eta\right)d\eta d\xi ds+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\tau}e^{-\gamma(\tau+\theta-(s+\theta))}\int\limits_{E_n}V\left(\tau+\theta-(s+\theta),x+p\sigma-(\xi+p\sigma)\right)\frac{\partial U}{\partial\eta}\left(\tau+\theta-(s+\theta),y-\eta\right)\times$$

$$\times U_0\left(\tau+\theta-(s+\theta),t+k\omega-e(\tau+\theta)+e(s+\theta)\right)\times$$

$$\times\Psi\left(s+\theta, t+k\omega-e(\tau+\theta)+e(s+\theta), \xi+p\sigma\right) d\xi ds.$$

На основании (θ,ω,σ)-периодичности функций $f(\tau,t,x,y)$ и $\Psi\left(\tau,t,x\right)$ по τ, t и x, а также в силу (θ,σ)-, θ- и (θ,ω)-периодичности функций $V\left(\tau-\tau_0,x-\xi\right)$, $U\left(\tau-\tau_0,y-\eta\right)$, $U_0\left(\tau-\tau_0,t-e\tau+e\tau_0\right)$ соответственно имеем

$$u^*\left(\tau+\theta,t+k\omega,x+p\sigma,y\right)=\int\limits_{-\infty}^{\tau}e^{-\gamma(\tau-s)}\int\limits_{E_n}V\left(\tau-s,x-\xi\right)U_0\left(\tau-s,t-e\tau+es\right)\times$$

$$\times\int\limits_0^{+\infty}\left[U\left(\tau-s,y-\eta\right)-U\left(\tau-s,y+\eta\right)\right]\times$$

$$\times f\left(s,t-e\tau+es,\xi,\eta\right)d\eta d\xi ds+\int\limits_{-\infty}^{\tau}e^{-\gamma(\tau-s)}\int\limits_{E_n}V\left(\tau-s,x-\xi\right)\times$$

$$\times\frac{\partial U}{\partial\eta}\left(\tau-s,y-\eta\right)U_0\left(\tau-s,t-e\tau+es\right)\Psi\left(s,t-e\tau+es,\xi\right)d\xi ds=u^*(\tau,t,x,y).$$

2) Аналогично [3, с. 130] из самого построения ясно, что функция $u^*(\tau,t,x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) с граничным условием (2).

3) Покажем, что решение (11) ограничено для всех $\tau,t,x,y\in E^+_{1+m+n+1}$. Сначала оценим первое слагаемое в правой части (11):

$$\|I_1\|\le\int\limits_{-\infty}^{\tau}e^{-\gamma(\tau-s)}\int\limits_{E_n}V\left(\tau-s,x-\xi\right)U_0\left(\tau-s,t-e\tau+es\right)\times$$

$$\times\int\limits_0^{+\infty}\left[U\left(\tau-s,y-\eta\right)-U\left(\tau-s,y+\eta\right)\right]\times$$

$$\times\left\|f\left(s,t-e\tau+es,\xi,\eta\right)\right\|d\eta d\xi ds\le M_0f_0\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\tau}\left(\int\limits_0^{y/2\sqrt{\tau-s}}e^{-z^2}dz\right)e^{-\gamma(\tau-s)}ds,$$

где $\dfrac{y-\eta}{2\sqrt{\tau-s}}=z,\ -\dfrac{d\eta}{2\sqrt{\tau-s}}=dz,\ \dfrac{y+\eta}{2\sqrt{\tau-s}}=z,\ \dfrac{d\eta}{2\sqrt{\tau-s}}=dz.$

При этом используем замену $\tau-s=\lambda$, $ds=-d\lambda$. Тогда

$$\|I_1\|\le\frac{2M_0f_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{y/2\sqrt{\lambda}}e^{-z^2}dz\right)e^{-\gamma\lambda}d\lambda.$$

Далее, используя формулу интегрирования по частям и полагая

$$u=\int\limits_0^{y/2\sqrt{\lambda}}e^{-z^2}dz,\qquad du=e^{-(y/2\sqrt{\lambda})^2}\frac{y\left(-d\lambda\right)}{2\lambda\cdot2\sqrt{\lambda}},$$

$$dv = e^{-\gamma\lambda} d\lambda, \qquad v = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\lambda},$$

получаем

$$\|I_1\| \le \frac{2M_0 f_0}{\sqrt{\pi}} \left(\int\limits_0^{y/2\sqrt{\lambda}} e^{-z^2} dz \left(-\frac{1}{\gamma}\right) e^{-\gamma\lambda} - \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\lambda} e^{-\left(\frac{y}{2\sqrt{\lambda}}\right)^2} \frac{y}{4\lambda^{3/2}} d\lambda \right) \le$$

$$\le \frac{M_0 f_0}{\gamma} - \frac{2M_0 f_0}{\sqrt{\pi}} \frac{y}{4\gamma} \int\limits_0^{+\infty} e^{-(\gamma\lambda + y^2/4\lambda)} \frac{1}{\lambda^{3/2}} d\lambda.$$

Теперь, используя сначала замену $\sqrt{\lambda} = \dfrac{1}{s_1}$, $ds_1 = \dfrac{d\lambda}{2\lambda^{3/2}}$, а затем $\dfrac{y}{2} s_1 = s_2$, $ds_1 = \dfrac{2ds_2}{y}$, имеем

$$\|I_1\| \le \frac{M_0 f_0}{\gamma} - \frac{2M_0 f_0}{\sqrt{\pi}} \frac{y}{4\gamma} \frac{4}{y} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(s_2^2 + \frac{\gamma y^2}{4s_2^2}\right)} ds_2 \le \frac{M_0 f_0}{\gamma} \left(1 - e^{-\sqrt{\gamma} y}\right).$$

Перейдем к оценке второго слагаемого в правой части (11):

$$\|I_2\| \le \int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{-\gamma(\tau - s)} \int\limits_{E_n} V(\tau - s, x - \xi) \times$$

$$\times \frac{\partial U}{\partial \eta}(\tau - s, y - \eta) U_0(\tau - s, t - e\tau + es) \|\Psi(s, t - e\tau + es, \xi)\| d\xi ds \le$$

$$\le M_0 \Psi_0 \int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{-\gamma(\tau - s)} \frac{y e^{-\frac{y^2}{4(\tau - s)}}}{2\sqrt{\pi}(\tau - s)^{3/2}} ds.$$

В последнем неравенстве положим $\dfrac{y}{2\sqrt{\tau - s}} = r$, $ds = \dfrac{2(\tau - s)}{r} dr$. Тогда

$$\|I_2\| \le M_0 \Psi_0 \int\limits_0^{+\infty} e^{-\gamma \frac{y^2}{4r^2}} \frac{2e^{-r^2}}{\sqrt{\pi}} dr = \frac{2M_0 \Psi_0}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(r^2 + \frac{\gamma y^2}{4r^2}\right)} dr = M_0 \Psi_0 e^{-\sqrt{\gamma} y}.$$

Таким образом, используя полученные оценки I_1, I_2 для $u^*(\tau, t, x, y)$, получаем

$$\|u^*(\tau, t, x, y)\| \le \frac{M_0 f_0}{\gamma} \left(1 - e^{-\sqrt{\gamma} y}\right) + M_0 \Psi_0 e^{-\sqrt{\gamma} y} = M\gamma^{-1} + N e^{-\sqrt{\gamma} y}, \tag{12}$$

где $M = M_0 f_0$, $N = M_0 \Psi_0 - \dfrac{M_0 f_0}{\gamma}$.

4) Решение $u^*(\tau, t, x, y)$ единственно. Допустим, что задача имеет и другое многопериодическое решение. Пусть $u^{**}(\tau, t, x, y)$ — решение задачи, соответствующее произвольной начальной функции $\varphi^{**}(t, x, y)$, т. е.

$$u^{**}(\tau_0, t, x, y) = \varphi^{**}(t, x, y).$$

Для такого решения справедлива формула (7). Определенное выше формулой (11) многопериодическое решение $u^*(\tau,t,x,y)$ при $\tau=\tau_0$ обращается в начальную функцию $(10'')$. Имеем

$$u^{**}(\tau,t,x,y)-u^*(\tau,t,x,y)=e^{-\gamma(\tau-\tau_0)}\int\limits_{E_n} V\left(\tau-\tau_0,x-\xi\right)\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U\left(\tau-\tau_0,y-\eta\right)U_0\left(\tau-\tau_0,t-e\tau+e\tau_0\right)\times$$

$$\times\left[\varphi^{**}\left(t-e\tau+e\tau_0,\xi,\eta\right)-\overline{\varphi}^*\left(t-e\tau+e\tau_0,\xi,\eta\right)\right]d\eta d\xi.$$

Оценивая, получаем

$$\|u^{**}(\tau,t,x,y)-u^*(\tau,t,x,y)\|\le e^{-\gamma(\tau-\tau_0)}M_0C_1, \tag{13}$$

где

$$\left\|\varphi^{**}\left(t-e\tau+e\tau_0,\xi,\eta\right)-\overline{\varphi}^*\left(t-e\tau+e\tau_0,\xi,\eta\right)\right\|\le$$

$$\le\left\|\varphi^{**}\left(t-e\tau+e\tau_0,\xi,\eta\right)\right\|-\left\|\overline{\varphi}^*\left(t-e\tau+e\tau_0,\xi,\eta\right)\right\|<C_1=\mathrm{const}.$$

Поскольку многопериодическое решение не зависит от выбора τ_0, τ_0 можно считать произвольным в (13). В (13), фиксируя τ и переходя к пределу при $\tau_0\to-\infty$, получаем

$$\|u^{**}(\tau,t,x,y)-u^*(\tau,t,x,y)\|\le 0 \qquad \forall\tau,t,x,y\in E_{1+m+n+1}.$$

Отсюда следует $u^{**}(\tau,t,x,y)=u^*(\tau,t,x,y)$.

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *Если функции $f(\tau,t,x,y)$ и $\Psi(\tau,t,x)$ удовлетворяют приведенным условиям, то уравнение* (1) *при граничном условии* (2) *и $\gamma=\mathrm{const}>0$ имеет единственное многопериодическое решение $u^*(\tau,t,x,y)$ по τ, t, x равномерно относительно y, представимое в виде* (11) *и удовлетворяющее условию* (12).

1. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
2. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 444 с.
3. *Умбетжанов Д. У.* Почти периодические решения эволюционных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1990. – 184 с.
4. *Асанова А. Т.* Ограниченное решение нелинейного параболического уравнения // Изв. МН-АН РК. Сер. физ.-мат. – 1997. – № 1. – С. 33 – 39.
5. *Абдикаликова Г. А.* Многопериодическое решение одной краевой задачи для уравнения параболического типа с многомерным временем // „Ломоносов-2012”: Междунар. науч. конф. студентов, магистрантов и молодых ученых: Тез. докл. – Астана: Казахстан. филиал МГУ им. М. В. Ломоносова, 2012. – Ч. I. – С. 7 – 9.
6. *Abdikalikova Gulshat A.* On boundary value problem for the system of parabolic equations // Proc. VI Int. Sci. Conf. – Aktobe, 2012. – Pt I. – P. 178 – 180.

Получено 25.07.13,
после доработки — 13.01.14