УДК 517.5

С. О. Чайченко (Донбас. гос. пед. ун-т)

ПРИБЛИЖЕНИЯ СУММАМИ ФУРЬЕ НА МНОЖЕСТВАХ $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$

We study some problems of embedding of the sets of ψ-integrals of the functions $f \in L^{p(\cdot)}$ and determine the orders of approximations of functions from these sets by Fourier's sums.

Вивчаються питання вкладення множин ψ-інтегралів функцій $f \in L^{p(\cdot)}$, а також знайдено порядки наближення сумами Фур'є функцій з цих множин.

1. Определения и постановка задачи. Пусть $p = p(x)$ — 2π-периодическая измеримая и существенно ограниченная функция. Через $L^{p(\cdot)}$ обозначают пространства измеримых 2π-периодических функций f таких, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(x)\big|^{p(x)} dx < \infty.$$

Если $\underline{p} := \operatorname{ess\,inf}_x \big|p(x)\big| > 1$ и $\bar{p} := \operatorname{ess\,sup}_x \big|p(x)\big| < \infty$, то $L^{p(\cdot)}$ являются банаховыми пространствами [1] (см. также [2]) с нормой, которая может быть задана формулой

$$\|f\|_{p(\cdot)} := \inf \left\{ \alpha > 0 \colon \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} dx \le 1 \right\}.$$

Пространства $L^{p(\cdot)}$ получили название обобщенных пространств Лебега с переменным показателем. Понятно, что в случае, когда $p = p(x) = \mathrm{const} > 0$, пространства $L^{p(\cdot)}$ совпадают с классическими пространствами Лебега L_p. В свою очередь, если $\bar{p} < \infty$, пространства $L^{p(\cdot)}$ являются частным случаем так называемых пространств Орлича – Муселяка [3]. Пространства Лебега с переменным показателем впервые появились в статье В. Орлича [4]. В работе [5] пространства $L^{p(\cdot)}$ рассматривались как пример более общих функциональных пространств и в дальнейшем исследовались многими авторами в разных направлениях. С основными результатами теории этих пространств можно ознакомиться, например, в работах [1, 2, 6 – 9]. Отметим также, что обобщенные пространства Лебега с переменным показателем применяются в теории упругости, механике, теории дифференциальных операторов, вариационном исчислении [10 – 12].

Приведем ряд определений, которые будем использовать при формулировке и доказательстве результатов в этой работе.

Определение 1. *Говорят, что функция $p = p(x)$ удовлетворяет условию Дини – Липшица порядка γ, если*

$$\omega(p;\delta)\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{\gamma} \le K, \quad 0 < \delta < 1,$$

где

$$\omega(p;\delta) = \sup_{x_1,x_2 \in [-\pi;\pi]} \Big\{ \big|p(x_1) - p(x_2)\big| \colon |x_1 - x_2| \le \delta \Big\}.$$

Множество 2π-периодических показателей $p = p(x) > 1$, которые на периоде удовлетворяют условию Дини–Липшица порядка $\gamma \geq 1$, будем обозначать через $\mathcal{P}^\gamma$. Очевидно, что если $p \in \mathcal{P}^\gamma$, то $\underline{p} > 1$ и $\bar{p} < \infty$.

В работе [1] показано, что в случае, когда $1 < \underline{p}$, $\bar{p} < \infty$, пространство $L^{q(\cdot)}$, где $q(x) = \dfrac{p(x)}{p(x)-1}$, является сопряженным с $L^{p(\cdot)}$ и для произвольных функций $f \in L^{p(\cdot)}$ и $g \in L^{q(\cdot)}$ справедливым является аналог классического неравенства Гельдера

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big|f(x)g(x)\big| dx \leq K_{p,q} \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{q(\cdot)}, \qquad K_{p,q} \leq 1/\underline{p} + 1/\underline{q}, \tag{1}$$

из которого, в частности, следует включение $L^{p(\cdot)} \subset L$, где L — пространство 2π-периодических суммируемых на периоде функций.

Далее нам понадобятся определения ψ-интеграла и ψ-производной, которые принадлежат А. И. Степанцу.

Определение 2 [13, с. 149]**.** *Пусть* $f \in L$ *и*

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k(f) \cos\ kx + b_k(f) \sin\ kx \Big) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x) \tag{2}$$

— ряд Фурье функции f. *Пусть, далее,* $\psi(k) = (\psi_1; \psi_2)$ *— пара произвольных числовых последовательностей* $\psi_1(k)$ *и* $\psi_2(k)$, $k = 1, 2, \ldots$. *Рассмотрим ряд*

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \big(\psi_1(k) A_k(f; x) + \psi_2(k) \tilde{A}_k(f; x) \big), \tag{3}$$

где A_0 *— некоторое число и*

$$\tilde{A}_k(f; x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx.$$

Если ряд (3) *для данной функции* f *и пары* ψ *является рядом Фурье некоторой функции из* $F \in L$, *то функцию* F *называют* ψ*-интегралом функции* f *и обозначают* $F(\cdot) = \mathcal{J}^\psi(f; \cdot)$. *Множество* ψ*-интегралов всех функций из* L *обозначается через* L^ψ.

Определение 3 [13, с. 149, 150]**.** *Пусть* $f \in L$, (2) *— ее ряд Фурье и пара* $\psi = (\psi_1; \psi_2)$ *удовлетворяет условию*

$$\psi^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\psi_1(k)}{\psi^2(k)} A_k(f; x) - \frac{\psi_2(k)}{\psi^2(k)} \tilde{A}_k(f; x) \right)$$

является рядом Фурье некоторой функции $\varphi \in L$, *то* φ *назовем* ψ*-производной функции* f *и будем писать* $\varphi(\cdot) = D^\psi(f; \cdot) = f^\psi(\cdot)$.

Подмножество функций $f \in L$, *у которых существуют* ψ*-производные, обозначают через* $\bar{L}^\psi$.

Связь между ψ-интегралами и ψ-производными устанавливается в следующем утверждении.

Лемма А [13, с. 150]. *Если $f \in L$, ряд* (2) *— ее ряд Фурье и выполнено условие* (4), *то функция $\mathcal{J}^{\psi}(f;x)$ имеет ψ-производную и справедливо равенство*

$$D^{\psi}\big(\mathcal{J}^{\psi}(f;\cdot)\big) = f(\cdot) - \frac{a_0}{2}.$$

Если же $f \in \bar{L}^{\psi}$ и ряд (2) *— ее ряд Фурье, то функция $D^{\psi}(f;x)$ имеет ψ-интеграл и при этом*

$$\mathcal{J}^{\psi}\big(D^{\psi}(f;\cdot)\big) = f(\cdot) + A_0,$$

где A_0 — некоторая постоянная.

Обозначим через $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ классы ψ-интегралов функций $f \in L^{p(\cdot)}$ и, как обычно,

$$S_n(f;x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\big(a_k(f)\cos\ kx + b_k(f)\sin kx\big), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

— частные суммы порядка n ряда Фурье функции f. В этой работе будут исследованы вопросы вложения множеств $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$, а также найдены порядки приближения суммами Фурье функций из этих множеств. Все утверждения, полученные здесь, являются распространением на случай пространств Лебега с переменным показателем $L^{p(\cdot)}$ результатов, полученных А. И. Степанцом [14, с. 29 – 46] для классических пространств Лебега L_p.

2. Вспомогательные результаты. При доказательстве основных утверждений работы будем использовать следующие результаты.

Теорема А [9]. *Если $p \in \mathcal{P}^{\gamma}$, то для произвольной функции $f \in L^{p(\cdot)}$ выполняются оценки*

$$\big\|S_n(f)\big\|_{p(\cdot)} \le c_p\|f\|_{p(\cdot)}, \tag{5}$$

$$\|\tilde{f}\|_{p(\cdot)} \le c_p\|f\|_{p(\cdot)}, \tag{6}$$

где $\tilde{f}(\cdot)$ — функция, тригонометрически сопряженная с $f(\cdot)$, а c_p — величина, которая зависит только от показателя $p = p(x)$.

Из неравенства (5), в частности, следует, что для произвольной функции $f \in L^{p(\cdot)}$ при условии $p \in \mathcal{P}^{\gamma}$ ряд Фурье этой функции сходится к ней в метрике пространств $L^{p(\cdot)}$, т. е.

$$\big\|f - S_n(f)\big\|_{p(\cdot)} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{7}$$

а также выполняется соотношение

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \le \big\|f - S_{n-1}(f)\big\|_{p(\cdot)} \le K_p E_n(f)_{p(\cdot)}, \tag{8}$$

в котором

$$E_n(\varphi)_{p(\cdot)} := \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{n-1}} \|\varphi - t_{n-1}\|_{p(\cdot)}, \quad \varphi \in L^{p(\cdot)},$$

— наилучшее приближение функции φ с помощью подпространства $\mathcal{T}_{n-1}$ тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$, а K_p — величина, которая зависит только от $p = p(x)$.

Лемма B [15]. *Пусть последовательность* $\mu(k),\ k=0,1,2,\ldots,$ *удовлетворяет условиям*

$$\nu_0=\nu_0(\mu)=\sup_k\bigl|\mu(k)\bigr|\le C,\qquad \sigma_0=\sigma_0(\mu)=\sup_{m\in\mathbb{N}}\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}}\bigl|\mu(k+1)-\mu(k)\bigr|\le C,$$

где C — *величина, которая не зависит от* k *и* m.

Тогда если $p\in\mathcal{P}^\gamma$, *то для данной функции* $f\in L^{p(\cdot)}$ *существует функция* $F\in L^{p(\cdot)}$ *такая, что ряд*

$$\frac{\mu(0)a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\bigl(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx\bigr)$$

является рядом Фурье функции F *и выполняется оценка*

$$\|F\|_{p(\cdot)}\le K\lambda\|f\|_{p(\cdot)},\quad \lambda=\max\{\nu_0,\sigma_0\},\tag{9}$$

в которой величина K *не зависит от функции* f.

В случае $p=p(x)\equiv\mathrm{const}$ это утверждение является известной леммой Марцинкевича для мультипликаторов [17].

Будем также использовать следующую теорему Харди – Литтлвуда.

Теорема B [16]. *Пусть* $1<p<s<\infty,\ p,s=\mathrm{const},\ \alpha=p^{-1}-s^{-1}$ *и*

$$D_\alpha(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\alpha}\cos kt.$$

Тогда для произвольной функции $\varphi\in L_p$ *свертка*

$$\Phi_\alpha(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)D_\alpha(t)\,dt$$

принадлежит L_s, *причем*

$$\|\Phi_\alpha\|_s\le C_{s,p}\|\varphi\|_p,$$

где $C_{s,p}$ — *величина, зависящая только от* s *и* p.

Следует отметить, что если $\varphi\in L_p$ и $S[\varphi]=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(\varphi;x)$, то

$$S[\Phi_\alpha]=\sum_{k=0}^{\infty}k^{-\alpha}A_k(\varphi;x),$$

т. е. $\Phi_\alpha=M_\alpha(\varphi)$, где M_α — оператор-мультипликатор, который определяется последовательностью $\mu_\alpha(k)=k^{-\alpha}$, $k=0,1,2,\ldots,$ и действует из L_p в L_s, где показатели $1<p<s<\infty$, $p,s=\mathrm{const}$, связаны соотношением $p^{-1}-s^{-1}=\alpha$.

3. Теоремы вложения для множеств $L^\psi L^{p(\cdot)}$. Будем говорить, что пара $\psi=(\psi_1;\psi_2)$ систем чисел $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$, $k=0,1,2,\ldots,$ $\psi_1(0)=1$, $\psi_2(0)=0$, принадлежит множеству Υ_α, $\alpha\ge 0$, если величины

$$\nu_\alpha(\psi_i) := \sup_{k\in\mathbb{N}} \big|\psi_i(k)\big| k^\alpha, \quad i=1,2,$$

$$\sigma_\alpha(\psi_i) := \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{2^m}^{2^{m+1}} \big|\psi_i(k+1)(k+1)^\alpha - \psi_i(k)k^\alpha\big|, \quad i=1,2,$$

являются конечными.

Условимся в этом пункте и далее через $K,\ K_{p,s},\ C_{p,s},\ldots,$ обозначать положительные постоянные, зависящие от указанных параметров, вообще говоря, различные в разных местах текста, и рассмотрим сначала случай $p(x)\equiv s(x)$.

Теорема 1. *Если $\psi\in\Upsilon_0$ и $p\in\mathcal{P}^\gamma$, то $L^\psi L^{p(\cdot)}\subset L^{p(\cdot)}$.*

Доказательство. Принимая во внимание связь между ψ-интегралом и ψ-производной (см. лемму A), для произвольной функции $f\in L^\psi L^{p(\cdot)}$ можем записать равенство

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x) =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\psi_1(k)A_k(f^\psi;x) + \sum_{k=1}^{\infty}\psi_2(k)\tilde{A}_k(f^\psi;x) =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)A_k(f^\psi;x) + \sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\mu}(k)\tilde{A}_k(f^\psi;x) =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + M(f^\psi)(x) + \tilde{M}(\tilde{f}^\psi)(x), \tag{10}$$

где $\tilde{f}^\psi$ — функция, тригонометрически сопряженная с f^ψ, а M и $\tilde{M}$ — операторы-мультипликаторы, задающиеся формулами

$$M = \big\{\mu(k)=\psi_1(k), k=1,2,\ldots\big\},$$

$$\tilde{M} = \big\{\tilde{\mu}(k)=\psi_2(k), k=1,2,\ldots\big\}.$$

Условие $\psi\in\Upsilon_0$ вместе с леммой B означает, что операторы-мультипликаторы M и $\tilde{M}$ действуют из $L^{p(\cdot)}$ в $L^{p(\cdot)}$. Условие же $f\in L^\psi L^{p(\cdot)}$ дает включение $f^\psi\in L^{p(\cdot)}$. Значит, согласно теореме A (неравенство (6)) $\tilde{f}^\psi\in L^{p(\cdot)}$. Поэтому на основании соотношения (10) находим

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \left\|\frac{a_0(f)}{2} + M(f^\psi) + \tilde{M}(\tilde{f}^\psi)\right\|_{p(\cdot)} \le$$

$$\le \left\|\frac{a_0(f)}{2}\right\|_{p(\cdot)} + \left\|M(f^\psi)\right\|_{p(\cdot)} + \left\|\tilde{M}(\tilde{f}^\psi)\right\|_{p(\cdot)} \le$$

$$\le \left\|\frac{a_0(f)}{2}\right\|_{p(\cdot)} + K\|f^\psi\|_{p(\cdot)} + K\|\tilde{f}^\psi\|_{p(\cdot)} \le C_p,$$

т. е. $f\in L^{p(\cdot)}$.

Теорема 1 доказана.

В работе [18] показано, что если $1 \le s(x) \le p(x) \le \bar{p} < \infty$, то для произвольной функции $f \in L^{p(\cdot)}$ выполняется оценка

$$\|f\|_{s(\cdot)} \le K_{s,p}\|f\|_{p(\cdot)}. \tag{11}$$

Учитывая этот факт, из теоремы 1 получаем такое следствие.

***Следствие* 1.** *Если $\psi \in \Upsilon_0$ и $p, s \in \mathcal{P}^\gamma$, $s(x) \le p(x)$, то $L^\psi L^{p(\cdot)} \subset L^{s(\cdot)}$.*

Рассмотрим теперь случай, когда $p(x) \le s(x)$.

Теорема 2. *Пусть $p, s \in \mathcal{P}^\gamma$, $p(x) \le s(x)$ и $\psi \in \Upsilon_\alpha$, где $\alpha = 1/\underline{p} - 1/\overline{s}$. Тогда $L^\psi L^{p(\cdot)} \subset$ $\subset L^{s(\cdot)}$.*

Доказательство. Обозначим через M_α и $\tilde{M}_\alpha$ мультипликаторы, порождаемые последовательностями $k^\alpha \psi_1(k)$ и $k^\alpha \psi_2(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, соответственно. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f^\psi; x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha \psi_1(k) \Big[k^{-\alpha} A_k(f^\psi; x) \Big] =$$

$$= M_\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} A_k(f^\psi; x) \right) = M_\alpha \left(S \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^\psi(x+t) D_\alpha(t)\, dt \right] \right), \tag{12}$$

где $D_\alpha(t)$ — функция, определенная в теореме В.

Поскольку $f \in L^\psi L^{p(\cdot)}$, то $f^\psi \in L^{p(\cdot)}$ и тем более $f^\psi \in L^{\underline{p}}$. На основании теоремы В заключаем, что свертка

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^\psi(x+t) D_\alpha(t) dt$$

находится в $L^{\overline{s}}$ и тем более $g_\alpha \in L^{s(\cdot)}$. Из условия $\psi \in \Upsilon_\alpha$ на основании леммы В следует, что оператор-мультипликатор M_α действует из $L^{s(\cdot)}$ в $L^{s(\cdot)}$ для любого $s \in \mathcal{P}^\gamma$. Поэтому из соотношения (7) и равенства (12) получаем

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f^\psi; x) \right\|_{s(\cdot)} = \Big\| M_\alpha \Big(S[g_\alpha] \Big) \Big\|_{s(\cdot)} \le K \|g_\alpha\|_{s(\cdot)} \le C_{p,s}, \tag{13}$$

где величина $C_{p,s}$ зависит только от функций $p = p(x)$ и $s = s(x)$.

Аналогично находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_2(k) \tilde{A}_k(f^\psi; x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha \psi_2(k) \Big[k^{-\alpha} \tilde{A}_k(f^\psi; x) \Big] =$$

$$= \tilde{M}_\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} \tilde{A}_k(f^\psi; x) \right) = \tilde{M}_\alpha \big(S[\tilde{g}_\alpha] \big). \tag{14}$$

Поскольку оператор-мультипликатор $\tilde{M}_{\alpha}$ действует из $L^{s(\cdot)}$ в $L^{s(\cdot)}$ для любого $s \in \mathcal{P}^{\gamma}$, а функция $\tilde{g}_{\alpha} \in L^{s(\cdot)}$, на основании соотношения (7), равенства (14) и леммы B будем иметь

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \psi_2(k) \tilde{A}_k(f^{\psi}; \cdot) \right\|_{s(\cdot)} = \left\| \tilde{M}_{\alpha}\big(S[\tilde{g}_{\alpha}]\big) \right\|_{s(\cdot)} \leq K_{p,s}. \tag{15}$$

Сопоставляя теперь соотношения (10), (13) и (15), убеждаемся в справедливости утверждения теоремы.

Теорема 2 доказана.

4. Приближения суммами Фурье функций из множеств $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$. В этом пункте для функций $f \in L^{\psi}L^{p(\cdot)}$, $p, s \in \mathcal{P}^{\gamma}$, при условии, что пары ψ принадлежат Υ_{α}, $\alpha = 1/\underline{p} - 1/\overline{s}$, и подчинены некоторым дополнительным условиям, будут найдены порядковые оценки для величин $E_n(f)_{s(\cdot)}$ и $\left\|\rho_n(f; \cdot)\right\|_{s(\cdot)}$, где

$$\rho_n(f; x) = f(x) - S_{n-1}(f; x).$$

Убедимся в справедливости следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 1. *Пусть показатели $p, s \in \mathcal{P}^{\gamma}$ на периоде $x \in [0; 2\pi]$ связаны одним из соотношений $p(x) < s(x)$ либо $p(x) \geq s(x)$. Пусть, далее,*

$$\alpha = \left(\frac{1}{\underline{p}} - \frac{1}{\overline{s}}\right)_{+} = \begin{cases} \dfrac{1}{\underline{p}} - \dfrac{1}{\overline{s}}, & p(x) < s(x), \\ 0, & p(x) \geq s(x), \end{cases} \tag{16}$$

$M_{\alpha}^{(n)}$ и $\tilde{M}_{\alpha}^{(n)}$ — операторы-мультипликаторы, задаваемые последовательностями

$$\mu_{\alpha}^{(n)} = \mu_{\alpha}^{(n)}(k) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ k^{\alpha}\psi_1(k), & k \geq n, \end{cases} \tag{17}$$

и

$$\tilde{\mu}_{\alpha}^{(n)} = \tilde{\mu}_{\alpha}^{(n)}(k) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ k^{\alpha}\psi_2(k), & k \geq n, \end{cases} \tag{18}$$

и такие, что при любом $n \in \mathbb{N}$ для произвольной функции $f \in L^{s(\cdot)}$ имеют место включения

$$M_{\alpha}^{(n)}(f) \in L^{s(\cdot)}, \qquad \tilde{M}_{\alpha}^{(n)}(f) \in L^{s(\cdot)}.$$

Тогда если $f \in L^{\psi}L^{p(\cdot)}$, то для произвольного $n \in \mathbb{N}$ выполняется соотношение

$$E_n(f)_{s(\cdot)} \leq \left\|\rho_n(f; \cdot)\right\|_{s(\cdot)} \leq K_{p,s}^{(n)} \left\|\rho_n(f^{\psi}; \cdot)\right\|_{p(\cdot)} \leq C_{p,s}^{(n)} E_n(f^{\psi})_{p(\cdot)}, \tag{19}$$

где $K_{p,s}^{(n)}$, $C_{p,s}^{(n)}$ — положительные константы, зависящие от n и функций $p = p(x)$, $s = s(x)$.

Доказательство. Используя соотношение (10), находим

$$E_n(f)_{s(\cdot)} \le \|\rho_n(f;\cdot)\|_{s(\cdot)} = \left\|\sum_{k=n}^{\infty} A_k(f;\cdot)\right\|_{s(\cdot)} \le$$

$$\le \left\|\sum_{k=n}^{\infty} \mu(k) A_k(f^{\psi};\cdot)\right\|_{s(\cdot)} + \left\|\sum_{k=n}^{\infty} \tilde{\mu}(k) \tilde{A}_k(f^{\psi};\cdot)\right\|_{s(\cdot)}, \tag{20}$$

где $\mu(k)$ и $\tilde{\mu}(k)$ — последовательности, определенные равенствами

$$\mu(k) = \psi_1(k), \quad \tilde{\mu}(k) = \psi_2(k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть сначала показатели $p, s \in \mathcal{P}^{\gamma}$ в каждой точке $x \in [0; 2\pi]$ удовлетворяют неравенству $s(x) > p(x)$. В этом случае будем иметь (см. (13))

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mu(k) A_k(f^{\psi};x) = \sum_{k=n}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f^{\psi};x) = M_{\alpha}^{(n)}\left(S\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(f^{\psi};x+t) D_{\alpha}(t)\, dt\right]\right),$$

где $M_{\alpha}^{(n)}$ — оператор-мультипликатор, который задается последовательностью (17). Отсюда на основании леммы В и теоремы В получаем

$$\left\|\sum_{k=n}^{\infty} \mu(k) A_k(f^{\psi};\cdot)\right\|_{s(\cdot)} = \left\|M_{\alpha}^{(n)}\left(S\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(f^{\psi};\cdot+t) D_{\alpha}(t)\, dt\right]\right)\right\|_{s(\cdot)} \le$$

$$\le K_{n,s}\left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(f^{\psi};\cdot+t) D_{\alpha}(t)\, dt\right\|_{s(\cdot)} \le$$

$$\le K_{n,s}\left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(f^{\psi};\cdot+t) D_{\alpha}(t) dt\right\|_{\bar{s}} \le$$

$$\le K_{n,s}\big\|\rho_n(f^{\psi};\cdot)\big\|_{\underline{p}} \le K_{n,s}\big\|\rho_n(f^{\psi};\cdot)\big\|_{p(\cdot)}. \tag{21}$$

Проводя аналогичные рассуждения, с учетом неравенства (6) находим

$$\left\|\sum_{k=n}^{\infty} \tilde{\mu}(k) \tilde{A}_k(f^{\psi};\cdot)\right\|_{s(\cdot)} = \left\|\tilde{M}_{\alpha}^{(n)} U\left(S\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(f^{\psi};\cdot+t) D_{\alpha}(t)\, dt\right]\right)\right\|_{s(\cdot)} \le$$

$$\le K_{n,s}\left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(f^{\psi};\cdot+t) D_{\alpha}(t) dt\right\|_{s(\cdot)} \le K_{n,s}\big\|\rho_n(f^{\psi};\cdot)\big\|_{p(\cdot)}, \tag{22}$$

где U — оператор тригонометрического сопряжения.

Объединяя соотношения (20) – (22), получаем промежуточную оценку в соотношении (19), и для завершения доказательства леммы в случае, когда $s(x) > p(x)$, остается воспользоваться неравенством (8).

Если $s(x) \le p(x)$, то $\alpha = 0$, и тогда при $k \ge n$ будем иметь $\mu_{\alpha}^{(n)}(k) = \mu_0^{(n)}(k) = \psi_1(k)$. Поэтому

$$\left\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f^{\psi};\cdot) \right\|_{s(\cdot)} = \left\| M_0^{(n)}\big(\rho_n(f^{\psi};\cdot)\big) \right\|_{s(\cdot)} \le K_{n,s} \|\rho_n(f^{\psi};\cdot)\|_{s(\cdot)}. \tag{23}$$

Аналогично, учитывая соотношение (6), находим

$$\left\| \sum_{k=n}^{\infty} \psi_2(k) \tilde{A}_k(f^{\psi};\cdot) \right\|_{s(\cdot)} \le K_{n,s} \big\|\rho_n(f^{\psi};\cdot)\big\|_{s(\cdot)}. \tag{24}$$

Сопоставляя соотношения (20) и (23), (24), получаем

$$E_n(f)_{s(\cdot)} \le \big\|\rho_n(f;\cdot)\big\|_{s(\cdot)} \le K_{p,s}^{(n)} \big\|\rho_n(f^{\psi};\cdot)\big\|_{s(\cdot)}.$$

Если теперь $s(x) \equiv p(x)$, то для получения (19) достаточно применить оценку (8). Если же в некоторой части периода $[0; 2\pi]$ выполняется строгое неравенство $s(x) < p(x)$, то предварительно следует воспользоваться неравенством (11).

Лемма 1 доказана.

При каждом фиксированном $\alpha \ge 0$ через $\Upsilon_{\alpha,n}$ обозначим подмножество пар $\psi = (\psi_1; \psi_2)$ из Υ_{α}, для которых при любом натуральном n выполняются условия

$$\nu_{\alpha}(\psi_i; n) = \sup_k \big|\psi_{i,n}(k)\big| k^{\alpha} \le C \nu_i(n) n^{\alpha}, \quad i = 1, 2, \tag{25}$$

$$\sigma_{\alpha}(\psi_i; n) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} \big|\psi_{i,n}(k+1)(k+1)^{\alpha} - \psi_{i,n}(k) k^{\alpha}\big| \le C \nu_i(n) n^{\alpha}, \quad i = 1, 2, \tag{26}$$

где

$$\psi_{i,n}(k) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ \psi_i(k), & k \ge n, \end{cases} \qquad i = 1, 2,$$

$\nu_i(n) = \nu(\psi_i; n) = \sup_{k \ge n} \big|\psi_i(k)\big|$, $i = 1, 2$, C — константа, равномерно ограниченная по n, и докажем такое утверждение.

Лемма 2. *Если $\psi \in \Upsilon_{\alpha,n}$, то мультипликаторы $M_{\alpha}^{(n)}$ и $\tilde{M}_{\alpha}^{(n)}$, порождаемые последовательностями* (17) *и* (18), *действуют из $L^{p(\cdot)}$ в $L^{p(\cdot)}$ при любом $p \in \mathcal{P}^{\gamma}$, причем*

$$\big\|M_{\alpha}^{(n)}(f)\big\|_{p(\cdot)} \le C_{p,\alpha} \nu_1(n) n^{\alpha} \|f\|_{p(\cdot)} \tag{27}$$

и

$$\big\|\tilde{M}_{\alpha}^{(n)}(f)\big\|_{p(\cdot)} \le C_{p,\alpha} \nu_2(n) n^{\alpha} \|f\|_{p(\cdot)}, \tag{28}$$

где $C_{p,\alpha}$ — величина, зависящая от $p = p(x)$ и α.

Доказательство следует из теоремы B. Действительно, согласно соотношениям (25), (26)

$$\nu_0(\mu_{n,\alpha}) = \sup_k \big|\mu_{n,\alpha}(k)\big| = \sup_{k\geq n} \big|\psi_1(k)\big| k^\alpha \leq C\nu_1(n)n^\alpha,$$

$$\sigma_0(\mu_{n,\alpha}) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \big|\psi_{1,n}(k+1)(k+1)^\alpha - \psi_{1,n}(k)(k)^\alpha\big| \leq C\nu_2(n)n^\alpha,$$

и поскольку для произвольного $n\in\mathbb{N}$

$$\nu_1(n)n^\alpha = \sup_{k\geq n}\big|\psi_1(k)\big|n^\alpha \leq \sup_{k\in\mathbb{N}}\big|\psi_1(k)\big|k^\alpha,$$

вследствие включения $\psi\in\Upsilon_\alpha$ величины $\nu_1(n)n^\alpha$ являются конечными. Значит, для произвольного показателя $p\in\mathcal{P}^\gamma$ и $f\in L^{p(\cdot)}$ имеет место включение $M_\alpha^{(n)}(f)\in L^{p(\cdot)}$. Кроме того, в рассматриваемом случае

$$\lambda = \lambda(\mu_{n,\alpha}) \leq \nu_1(n)n^\alpha,$$

поэтому неравенство (27) следует из оценки (9). Ясно, что такие же рассуждения могут быть использованы и для доказательства справедливости соотношения (28).

Лемма 2 доказана.

Используя в ходе доказательства леммы 1 неравенства (27), (28) и учитывая при этом соотношение

$$\frac{1}{2}\big(\nu_1(n)+\nu_2(n)\big) \leq \nu(n) \leq \big(\nu_1(n)+\nu_2(n)\big) \quad \forall n\in\mathbb{N},$$

где $\nu(n) = \sup_{k\geq n}\psi(k)$, $\psi(k)=\sqrt{\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)}$, приходим к такому утверждению.

Теорема 3. *Пусть показатели $p,s\in\mathcal{P}^\gamma$ на периоде $x\in[0;2\pi]$ связаны одним из соотношений $p(x)<s(x)$ либо $p(x)\geq s(x)$. Пусть, далее, $\alpha = \left(\dfrac{1}{\underline{p}} - \dfrac{1}{\overline{s}}\right)_+$ и $\psi\in\Upsilon_{\alpha,n}$. Тогда если $f\in L^\psi L^{p(\cdot)}$, то для произвольного $n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$E_n(f)_{s(\cdot)} \leq \big\|\rho_n(f;\cdot)\big\|_{s(\cdot)} \leq C_{p,s}\nu(n)n^\alpha\big\|\rho_n(f^\psi;\cdot)\big\|_{p(\cdot)} \leq K_{p,s}\nu(n)n^\alpha E_n(f^\psi)_{p(\cdot)}, \tag{29}$$

где $\nu(n)=\sup_{k\geq n}\psi(k)$, $\psi(k)=\sqrt{\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)}$, $C_{p,s}$, $K_{p,s}$ — величины, равномерно ограниченные по n и f.

Отметим один важный частный случай теоремы 3. Если числа $\big|\psi_i(k)\big|k^\alpha$, $i=1,2$, $\alpha\geq 0$, $k\in\mathbb{N}$, не возрастают, то пара $\psi=(\psi_1;\psi_2)$ принадлежит $\Upsilon_{\alpha,n}$ и при этом

$$\nu_\alpha(\psi_i;n) = |\psi_i(n)|n^\alpha$$

и

$$\sigma_\alpha(\psi_i;n) \leq 2\big|\psi_i(n)\big|n^\alpha, \quad i=1,2.$$

Поэтому $\nu_1(n)=|\psi_1(n)|$, $\nu_2(n)=|\psi_2(n)|$ и $\nu(n)=\psi(n)$. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть показатели* $p, s \in \mathcal{P}^{\gamma}$ *на периоде* $x \in [0; 2\pi]$ *связаны одним из соотношений* $p(x) < s(x)$ *либо* $p(x) \geq s(x)$. *Пусть, далее,* $\alpha = \left(\dfrac{1}{\underline{p}} - \dfrac{1}{\overline{s}}\right)_+$ *и числа* $\big|\psi_i(k)\big|k^{\alpha}$, $i = 1, 2$, $k \in \mathbb{N}$, *не возрастают. Тогда если* $f \in L^{\psi}L^{p(\cdot)}$, *то для произвольного* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$E_n(f)_{s(\cdot)} \leq \big\|\rho_n(f; \cdot)\big\|_{s(\cdot)} \leq C_{p,s}\psi(n)n^{\alpha}\big\|\rho_n(f^{\psi}; \cdot)\big\|_{p(\cdot)} \leq K_{p,s}\psi(n)n^{\alpha}E_n(f^{\psi})_{p(\cdot)}, \tag{30}$$

где $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$, $K_{p,s}, C_{p,s}$ *— величины, равномерно ограниченные по* n *и* f.

Пусть $L^{\psi}_{p(\cdot)} := L^{\psi}U^{p(\cdot)}$, где $U^{p(\cdot)} = \big\{f \in L^{p(\cdot)} \colon \|f\|_{p(\cdot)} \leq 1\big\}$. Тогда

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \leq \|f^{\psi} - 0\|_{p(\cdot)} \leq \|f^{\psi}\|_{p(\cdot)} \leq 1 \quad \forall f \in L^{p(\cdot)}.$$

Учитывая этот факт, из теорем 3 и 4 получаем такое следствие.

Следствие 2. *Пусть показатели* $p, s \in \mathcal{P}^{\gamma}$ *на периоде* $x \in [0; 2\pi]$ *связаны одним из соотношений* $p(x) < s(x)$ *либо* $p(x) \geq s(x)$. *Пусть, далее,* $\alpha = \left(\dfrac{1}{\underline{p}} - \dfrac{1}{\overline{s}}\right)_+$ *и* $\psi \in \Upsilon_{\alpha,n}$. *Тогда*

$$E_n(L^{\psi}_{p(\cdot)})_{s(\cdot)} \leq \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{p(\cdot)})_{s(\cdot)} \leq C_{p,s}\nu(n)n^{\alpha}. \tag{31}$$

В частности, если последовательности $\big|\psi_i(k)\big|k^{\alpha}$, $i = 1, 2$, $k \in \mathbb{N}$, *не возрастают, то*

$$E_n(L^{\psi}_{p(\cdot)})_{s(\cdot)} \leq \mathcal{E}_n\Big(L^{\psi}_{p(\cdot)}\Big)_{s(\cdot)} \leq C_{p,s}\psi(n)n^{\alpha}, \tag{32}$$

где

$$E_n\Big(L^{\psi}_{p(\cdot)}\Big)_{s(\cdot)} := \sup_{f \in L^{\psi}_{p(\cdot)}} \inf_{T_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}} \|f - T_{n-1}\|_{s(\cdot)}$$

— наилучшее приближение класса $L^{\psi}_{p(\cdot)}$ *посредством подпространства* $\mathcal{T}_{n-1}$ *тригонометрических полиномов порядка не выше* $n - 1$,

$$\mathcal{E}_n\Big(L^{\psi}_{p(\cdot)}\Big)_{s(\cdot)} = \sup_{f \in L^{\psi}_{p(\cdot)}} \big\|f - S_{n-1}(f)\big\|_{s(\cdot)}$$

— верхняя грань отклонения сумм Фурье на классе $L^{\psi}_{p(\cdot)}$ *в метрике пространств* $L_{s(\cdot)}$.

1. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(x)}([0; 1])$ // Мат. заметки. – 1979. – **26**, № 4. – С. 613 – 632.
2. *Kováčik O., Rakósník J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ // Chech. Math. J. – 1991. – **41(116)**, № 4. – P. 592 – 618.
3. *Musielak J.* Orlicz spaces and modular spaces. – Berlin: Springer, 1983.
4. *Orlicz W.* Über conjugierte Exponentenfolgen // Stud. Math. – 1931. – **3**. – S. 200 – 211.
5. *Nakano H.* Topology of linear topological spaces. – Tokyo: Maruzen Co. Ltd., 1951.
6. *Samko S. G.* Differentiation and integration of variable order and the spaces $L^{p(x)}$ // Proc. Int. Conf. Operator Theory and Complex and Hypercomplex Analysis (Mexico, 12 – 17 December 1994): Contemp. Math. – 1994. – **212**. – P. 203 – 219.
7. *Шарапудинов И. И.* О равномерной ограниченности в $L^p\big(p = p(x)\big)$ некоторых семейств операторов свертки // Мат. заметки. – 1996. – **59(2)**. – С. 291 – 302.

8. *Fan X., Zhao D.* On the spaces $L^{p(x)}$ and $W^{m,p(x)}$ // J. Math. Anal. and Appl. – 2001. – **263**, № 2. – P. 424 – 446.
9. *Шарапудинов И. И.* Некоторые вопросы теории приближения в пространствах $L^{p(x)}(E)$ // Anal. Math. – 2007. – **33**. – P. 135 – 153.
10. *Diening L., Ruzicka M.* Calderon – Zigmund operators on generelized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ and problems releted to fluid dynamics. – Preprint / Albert-Ludwings-Univ. Freiburg, 04.07.2002.
11. *Ruzicka M.* Electroreological fluids: Modeling and mathematical theory // Lect. Notes Math. – 2000. – **1748**. – 176 p.
12. *Samko S. G.* On a progress in the theory of Lebesgue spaces whith variable exponent: maximal and singular operators // Integral Transforms Spec. Funct. – 2005. – **16**, № 5 – 6. – P. 461 – 482.
13. *Степанец А. И.* Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
14. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 2. – 468 с.
15. *Kokilashvili V., Samko S.* Operators of harmonis analysis in weighted spaces with nonstandard growth // J. Math. Anal. and Appl. – 2009. – **352**. – P. 15 – 34.
16. *Hardy, G., Littlewood J.* Some properties of fractional integrals // IMZ. – 1928. – **27**. – P. 565 – 606.
17. *Marcinkievicz J.* Sur les multiplicateures des séries de Fourier // Stud. Math. – 1938. – **8**. – P. 78 – 91.
18. *Шарапудинов И. И.* О базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(x)}([0;1])$ и принципе локализации в среднем // Мат. сб. – 1986. – **130(1722)**, № 2(6). – С. 275 – 283.

Получено 21.06.13