УДК 517.518

Ю. С. Волков (Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия)

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СПЛАЙНАМИ ЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ ПО СУББОТИНУ И ПО МАРСДЕНУ *

We consider the problem of interpolation by splines of even degree in the senses of Subbotin and Marsden. The study is based on the representation of spline derivatives in the bases of normalized and nonnormalized B-splines. The systems of equations for the coefficients of these representations are obtained. The estimations of the derivatives of the error function in the approximation of an interpolated function by the complete spline are established in terms of the norms of inverse matrices of the investigated systems of equations. The relationship between the splines in the sense of Subbotin and the splines in the sense of Marsden is established.

Розглянуто задачу інтерполяції сплайнами парного степеня по Субботіну і по Марсдену. Вивчення ґрунтується на зображенні похідних сплайна в базисах нормалізованих і ненормалізованих B-сплайнів. Отримано системи рівнянь для коефіцієнтів таких зображень. Встановлено оцінки похідних функції похибки при наближенні інтерпольованої функції повним сплайном через норми обернених матриць розглянутих систем рівнянь. Показано зв'язок між конструкціями сплайнів по Субботіну і по Марсдену.

1. Введение. В задаче интерполяции сплайнами используются две сетки: узлы сплайна и точки интерполяции. В 1953 г. И. Шенбергом и А. Уитни были установлены [1] необходимые и достаточные условия на взаимное расположение узлов этих сеток для разрешимости задачи интерполяции. Позднее было обнаружено (см., например, [2]), что при интерполяции сплайнами нечетной степени оптимальным является случай, когда эти сетки совпадают. Однако в случае совпадения сеток интерполяционный сплайн четной степени может и не существовать [3]. По этой причине Ю. Н. Субботин в 1967 г. предложил [4] для сплайнов четной степени узлы сплайна выбирать между точками интерполяции. Оказалось, что данная конструкция весьма удачна. Например, параболические сплайны по свойствам похожи на кубические сплайны, для тех и других можно применять единые методы исследований и многие результаты для интерполяционных параболических сплайнов перенесены с кубических. Подробное исследование задачи интерполяции для таких сплайнов второй степени было проведено С. Б. Стечкиным и Ю. Н. Субботиным [5, 6], при этом часть результатов была получена и для кубических сплайнов.

В 1974 г. М. Марсден тоже рассмотрел [7] задачу интерполяции сплайнами второй степени, но его конструкция интерполяционного сплайна отличается от конструкции сплайна Ю. Н. Субботина. Если в подходе по Субботину заданной считается сетка точек интерполяции, узлы сплайна выбираются посередине между точками интерполяции, то в подходе по Марсдену, наоборот, заданной считается сетка узлов сплайна, а точки интерполяции выбираются посередине между узлами сплайна. В итоге получаются две принципиально различные конструкции, предназначенные, вообще говоря, для разных задач. Например, если задан набор дискретных значений, которые требуется интерполировать, то здесь подходит сплайн по Субботину, в то время как сплайн по Марсдену будет существовать не для любой неравномерной сетки данных. В других случаях, наоборот, подходят именно сплайны по Марсдену. Например, при приближении функции (значения которой можно вычислять в любой точке) требуется, чтобы узлы

* Выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-07-00447) и гранта совместных Интеграционных проектов СО РАН и УрО РАН (проект 2012-Б-32).

сплайна находились в определенных точках (это может диктоваться положением возможных разрывов второй производной интерполянта). Такая задача легко решается сплайном по Марсдену, а сплайн по Субботину для каких-то сеток может не существовать.

Конечно, в случае равномерных сеток получается одна и та же конструкция, но в общем случае эти два разных сплайна, как оказалось, имеют различные аппроксимативные свойства. Например, в классе непрерывных функций на любой последовательности сеток имеет место равномерная сходимость квадратичной интерполяции по Марсдену [7], в то время как в [5] приведен пример непрерывной функции и последовательности сеток, на которой интерполяционный параболический сплайн по Субботину расходится.

Отметим, что для сплайнов четной степени выше второй задача интерполяции на неравномерной сетке мало исследована. В данной работе мы развиваем подход, использованный ранее автором [8, 9] для получения методов построения сплайнов нечетных степеней. В качестве определяемых параметров выбираются коэффициенты разложения одной из производных искомого сплайна по B-сплайнам соответствующей степени. Мы записываем системы линейных уравнений относительно выбранных параметров и рассматриваем способы практического вычисления элементов возникающих матриц. Матрицы данных систем ленточные и вполне неотрицательны (см. [10]). Последнее свойство весьма важно, так как метод исключения Гаусса при решении системы уравнений с такой матрицей не требует выбора главного элемента [11].

Мы одновременно рассматриваем обе конструкции интерполяционных сплайнов четной степени $2m$ (по Марсдену и по Субботину) и показываем, что хотя это две совершенно разные конструкции, они тесно связаны между собой. Оказывается, что в данном подходе матрицы определяющих систем уравнений для интерполяционных сплайнов по Марсдену являются транспонированными к матрицам некоторых систем для сплайнов по Субботину. Данное обстоятельство позволяет получить одинаковые условия сходимости процессов интерполяции для k-й производной интерполяционных сплайнов по Марсдену, если $f \in C^k[a,b]$, и для $(2m-k)$-й производной сплайнов по Субботину, если $f \in C^{2m-k}[a,b]$.

2. Интерполяционные сплайны четной степени. Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы две сетки узлов

$$\Delta_x\colon\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b,$$

$$\Delta_y\colon\ a = y_0 < y_1 < \ldots < y_N < y_{N+1} = b,$$

причем $y_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, $i = 1, \ldots, N$. Мы будем рассматривать два различных множества сплайнов дефекта 1 по сеткам узлов Δ_x или Δ_y.

Интерполяционным сплайном четной степени $2m$ по Субботину будем называть сплайн s с узлами на сетке Δ_y, который принимает в узлах сетки Δ_x известные значения некоторой функции f, т. е.

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, N. \tag{1}$$

Интерполяционным сплайном четной степени $2m$ по Марсдену будем называть сплайн s с узлами на сетке Δ_x, который принимает в узлах сетки Δ_y известные значения некоторой функции f, т. е.

$$s(y_i) = f(y_i), \quad i = 0, \ldots, N+1. \tag{2}$$

Так же, как и в случае сплайнов нечетной степени, для однозначного определения сплайна четной степени нужны какие-либо краевые условия. Например, если известно, что интерполируемая функция f является $(b-a)$-периодической, то естественно считать и сплайн $(b-a)$-периодическим. Другой вид краевых условий, которые мы как раз будем рассматривать, это задание в крайних точках отрезка $[a,b]$ необходимого количества производных (по аналогии со сплайнами нечетной степени будем называть такие сплайны *полными*).

Отметим, что относительно задачи периодической интерполяции сплайнами четной степени не известны результаты об однозначной разрешимости в общем случае. Разрешимость задачи интерполяции полными сплайнами четной степени как по Субботину, так и по Марсдену следует из условий Шенберга – Уитни [1]. Для сплайнов по Субботину степени $2m$ требуется задание по m производных в точках a и b

$$s^{(\nu)}(a) = f^{(\nu)}(a), \qquad s^{(\nu)}(b) = f^{(\nu)}(b), \quad \nu = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

а для сплайнов по Марсдену нужно задавать в этих точках по $m-1$ производных

$$s^{(\nu)}(a) = f^{(\nu)}(a), \qquad s^{(\nu)}(b) = f^{(\nu)}(b), \quad \nu = 1, \ldots, m-1. \tag{4}$$

В частности, для определения сплайнов второй степени по Субботину надо задать значения $f'(a)$ и $f'(b)$, а для сплайнов по Марсдену никакие дополнительные условия не нужны.

В рассматриваемом нами случае (интерполяция полным сплайном) считаем, что сетки узлов сплайнов расширены влево и вправо необходимым количеством кратных узлов, совпадающих с концами отрезка $[a,b]$:

$$\ldots = x_{-2} = x_{-1} = x_0, \qquad x_N = x_{N+1} = x_{N+2} = \ldots.$$

В дальнейшем, говоря, что *сплайн s является полным сплайном четной степени $2m$ по Субботину, интерполирующим функцию f*, считаем, что выполнены условия интерполяции (1) и (3). Соответственно, если *сплайн s является полным сплайном четной степени $2m$ по Марсдену, интерполирующим некоторую функцию f*, будем считать, что выполнены условия интерполяции (2) и (4).

3. *B*-сплайны и их свойства. Сплайн с носителем из r последовательных интервалов некоторого разбиения $\Delta\colon \ldots < t_1 < t_2 < \ldots < t_l < \ldots$ называется *B-сплайном* степени $r-1$ (порядка r) на сетке Δ. На каждом таком носителе B-сплайн определяется однозначно с точностью до нормирующего множителя. Распространены B-сплайны с двумя нормировками, определяемые равенствами

$$N_{i,r}(x) = (t_{i+r} - t_i)(\cdot - x)_+^{r-1}[t_i, \ldots, t_{i+r}], \qquad M_{i,r}(x) = \frac{r}{t_{i+r} - t_i}\, N_{i,r}(x).$$

Здесь $g[t_i, \ldots, t_{i+r}]$ обозначает разделенную разность r-го порядка от функции g по точкам $t_i, \ldots, t_{i+r}$ разбиения Δ.

Любой сплайн σ на сетке Δ при $x \in [t_j, t_l]$, $j \leqslant i$, $i + r \leqslant l$, единственным образом может быть представлен через сплайны $N_{i,r}$ или $M_{i,r}$:

$$\sigma(x) = \sum_{i=1-r}^{l-1} \alpha_i N_{i,r}(x) = \sum_{i=1-r}^{l-1} \beta_i M_{i,r}(x), \qquad \alpha_i = \frac{r}{t_{i+r} - t_i}\, \beta_i.$$

Отметим ряд свойств B-сплайнов. Для рассматриваемых B-сплайнов $N_{i,r}$ и $M_{i,r}$ выполняются соотношения

$$\sum_{j=i-r+1}^{i} N_{j,r}(x) \equiv 1 \qquad \text{для} \quad x \in [t_i, t_{i+1}], \qquad \int\limits_{t_i}^{t_{i+r}} M_{i,r}(\tau)\, d\tau = 1. \tag{5}$$

Свойства (5) послужили основанием для названий L_∞-*нормализованные* (или просто *нормализованные*) для B-сплайнов $N_{i,r}$ и, соответственно, L_1-*нормализованные* для $M_{i,r}$.

Коэффициенты $\alpha_i^{(\nu)}$ разложения ν-й производной сплайна по B-сплайнам

$$\sigma^{(\nu)} = \Big(\sum_i \alpha_i N_{i,r}\Big)^{(\nu)} = \sum_i \alpha_i^{(\nu)} N_{i,r-\nu}$$

могут быть выражены через коэффициенты α_i разложения самого сплайна по рекуррентным формулам

$$\alpha_i^{(p)} = \begin{cases} \alpha_i & \text{при} \quad p = 0, \\ \dfrac{r-p}{t_{i+r-p} - t_i}\big(\alpha_i^{(p-1)} - \alpha_{i-1}^{(p-1)}\big) & \text{при} \quad p > 0. \end{cases}$$

Аналогичные соотношения справедливы и для коэффициентов $\beta_i^{(\nu)}$. Справедливо представление производной в виде

$$N'_{i,r+1}(x) = \frac{r}{t_{i+r} - t_i} N_{i,r}(x) - \frac{r}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} N_{i+1,r}(x) = M_{i,r}(x) - M_{i+1,r}(x). \tag{6}$$

Для разделенной разности r-го порядка функции $g \in W_1^r[a,b]$ по значениям аргумента $x = t_i, \ldots, t_{i+r}$ справедливо равенство

$$g[t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+r}] = \frac{1}{r!} \int\limits_{t_i}^{t_{i+r}} M_{i,r}(\tau) g^{(r)}(\tau)\, d\tau. \tag{7}$$

Мы привели определение и свойства B-сплайнов (см. [12, 13]) на сетке Δ. В дальнейшем будем рассматривать сплайны на двух разных сетках Δ_x и Δ_y, поэтому, чтобы различать, будем в обозначении B-сплайнов дополнительно использовать индекс рассматриваемой сетки.

Для k-й ($k = 0, \ldots, 2m$) производной сплайна по Субботину представление по базису из B-сплайнов имеет вид

$$s^{(k)}(x) = \sum_{i=-2m+k}^{N-1} \alpha_i^{(k)} N_{i,2m+1-k,y}(x) = \sum_{i=-2m+k}^{N-1} \beta_i^{(k)} M_{i,2m+1-k,y}(x), \tag{8}$$

а для k-й производной сплайна по Марсдену имеем представление

$$s^{(k)}(x) = \sum_{i=-2m+k}^{N} \alpha_i^{(k)} N_{i,2m+1-k,x}(x) = \sum_{i=-2m+k}^{N} \beta_i^{(k)} M_{i,2m+1-k,x}(x). \tag{9}$$

4. Системы определяющих уравнений. Начнем рассмотрение со сплайнов по Марсдену. По свойству разделенных разностей (7) и с использованием представления (9) получаем

$$s[y_i,\ldots,y_{i+k}] = \frac{1}{k!}\sum_{j=-2m+k}^{N-1}\alpha_j^{(k)}\left(\int\limits_{y_i}^{y_{i+k}} M_{i,k,y}(\tau)N_{j,2m+1-k,x}(\tau)\,d\tau\right). \tag{10}$$

Ясно, что величины

$$X_{i,j}^k = \int\limits_{y_i}^{y_{i+k}} M_{i,k,y}(\tau)N_{j,2m+1-k,x}(\tau)\,d\tau \tag{11}$$

не зависят от сплайна и полностью определяются рассматриваемыми сетками (точнее, сеткой Δ_x, так как по ней однозначно определяется сетка Δ_y).

Равенства (10), записанные для разных индексов i, представляют собой набор линейных соотношений, связывающих значения сплайна в узлах сетки Δ_y и коэффициенты разложения k-й производной сплайна по L_∞-нормализованным B-сплайнам сетки Δ_x. Поскольку в задаче интерполяции полным сплайном четной степени по Марсдену именно в узлах сетки Δ_y заданы значения функции, соотношения (10) позволяют записать системы линейных уравнений относительно определяемых параметров — коэффициентов разложения одной из производных интерполяционного сплайна s по B-сплайнам.

Пусть выбрано целое число k $(0 \leqslant k \leqslant 2m)$. Будем определять параметры $\alpha_{-2m+k}^{(k)},\ldots$ $\ldots,\alpha_{N-1}^{(k)}$ — коэффициенты B-сплайн-разложения k-й производной на сетке Δ_x. С учетом краевых условий можем считать, что левые части соотношений (10) определены при $i = 1-m,\ldots,N+m-k$, а правые — при $i=1-k,\ldots,N$. Поэтому рассмотрение разбивается на два случая: $k<m$ и $k \geqslant m$.

Если $k\geqslant m$, то соотношения (10) для $i=1-m,\ldots,N+m-k$ образуют систему из $N+2m-k$ уравнений относительно $N+2m-k$ неизвестных $\alpha_{-2m+k}^{(k)},\ldots,\alpha_{N-1}^{(k)}$ (в силу кратности узлов сетки Δ_x на концах отрезка $[a,b]$ данные уравнения параметров $\alpha_j^{(k)}$ с индексами j, отличными от указанных, содержать не будут). В матричной форме эта система имеет вид

$$\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{\alpha}^k = \boldsymbol{c}^k, \tag{12}$$

где $\boldsymbol{A}_k = \left(a_{i,j}^k\right)$ — матрица с элементами

$$a_{i,j}^k = X_{i-m,j-2m+k-1}^k, \quad i,j=1,\ldots,N+2m-k,$$

$\boldsymbol{\alpha}^k = \left(\alpha_{-2m+k}^{(k)},\ldots,\alpha_{N-1}^{(k)}\right)^T$ — вектор неизвестных и $\boldsymbol{c}^k = (c_1^k,\ldots,c_{N+2m-k}^k)^T$ — вектор правой части системы с элементами $c_i^k = k!\,f[y_{i-m},\ldots,y_{i-m+k}]$.

Если же $k<m$, то соотношения (10) можно записать лишь для индексов $i=1-k,\ldots,N$, т. е. всего $N+k$ уравнений. Здесь опять-таки по причине кратности крайних узлов уравнения содержат только слагаемые с неизвестными $\alpha_{-2m+k}^{(k)},\ldots,\alpha_{N-1}^{(k)}$. Для получения замкнутой системы уравнений требуется еще $2(m-k)$ уравнений. Дополнительные уравнения мы получаем из (9), приравнивая значения $s^{(\nu)}$ известным на краях отрезка $[a,b]$ значениям $f^{(\nu)}$:

$$\sum_{j=k-2m}^{-1}\alpha_j^{(k)}N_{j,2m+1-k,x}^{(\nu-k)}(x_0) = f^{(\nu)}(a), \qquad \sum_{j=N-2m+k}^{N-1}\alpha_j^{(k)}N_{j,2m+1-k,x}^{(\nu-k)}(x_N) = f^{(\nu)}(b)$$

для $\nu=k,\ldots,m-1$.

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям из работ [14, 15], приходим к явным формулам

$$\alpha_{j-2m+k}^{(k)} = \sum_{p=0}^{j} \frac{(2m-k-p)!}{(2m-k)!} \operatorname{sym}_p(x_1 - x_0, \ldots, x_j - x_0) f^{(k+p)}(a), \tag{13}$$

$$\alpha_{N-1-j}^{(k)} = \sum_{p=0}^{j} \frac{(2m-k-p)!}{(2m-k)!} \operatorname{sym}_p(x_{N-1} - x_N, \ldots, x_{N-j} - x_N) f^{(k+p)}(b), \tag{14}$$

где $j = 0, \ldots, m-k-1$. Здесь $\operatorname{sym}_p(t_1, \ldots, t_\nu)$, — символы элементарных симметрических функций от ν аргументов степени p. Это многочлены, состоящие из C_ν^p слагаемых (C_ν^p — биномиальные коэффициенты). Они имеют вид

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sym}_0(t_1, \ldots, t_\nu) = 1, \\
&\operatorname{sym}_1(t_1, \ldots, t_\nu) = t_1 + \ldots + t_\nu, \\
&\operatorname{sym}_2(t_1, \ldots, t_\nu) = t_1 t_2 + t_1 t_3 + \ldots + t_{\nu-1} t_\nu, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\operatorname{sym}_\nu(t_1, \ldots, t_\nu) = t_1 \ldots t_\nu.
\end{aligned}$$

Исключая теперь из уравнений (10) при $i = -k+1, \ldots, N$ найденные коэффициенты, получаем систему $N+k$ уравнений

$$\boldsymbol{A}_k \boldsymbol{\alpha}^k = \boldsymbol{c}^k \tag{15}$$

относительно оставшихся неизвестных $\boldsymbol{\alpha}^k = \left(\alpha_{-m}^{(k)}, \ldots, \alpha_{N-m+k-1}^{(k)}\right)^T$ с некоторой матрицей $\boldsymbol{A}_k = (a_{i,j}^k)$ и вектором в правой части $\boldsymbol{c}^k = (c_1^k, \ldots, c_{N+k}^k)^T$. Матрица $\boldsymbol{A}_k$ имеет структуру, подобную структуре матрицы системы (12). Ее элементами также являются интегралы от произведений B-сплайнов

$$a_{i,j}^k = X_{i-k,j-m-1}^k, \quad i, j = 1, \ldots, N+k,$$

а вектор правой части имеет компоненты

$$\begin{aligned}
c_i^k &= \xi_i^k - \sum_{j=-2m+k}^{-m-1} \alpha_j^{(k)} X_{i-k,j}^k, && i = 1, \ldots, m-1, \\
c_i^k &= \xi_i^k, && i = m, \ldots, N+k-m+1, \\
c_i^k &= \xi_i^k - \sum_{j=N+k-m}^{N-1} \alpha_j^{(k)} X_{i-k,j}^k, && i = N+k-m+2, \ldots, N+k,
\end{aligned}$$

где $\xi_i^k = k!\, f[y_{i-k}, \ldots, y_i]$, а $X_{i,j}^k$ определены формулами (11).

Переходя к сплайнам по Субботину, аналогично, в силу (8) получаем

$$s[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \frac{1}{k!} \sum_{j=-2m+k}^{N} \alpha_j^{(k)} \left(\int_{x_i}^{x_{i+k}} M_{i,k,x}(\tau) N_{j,2m+1-k,y}(\tau)\, d\tau \right). \tag{16}$$

Здесь также величины

$$Y_{i,j}^k = \int\limits_{x_i}^{x_{i+k}} M_{i,k,x}(\tau) N_{j,2m+1-k,y}(\tau)\, d\tau \tag{17}$$

не зависят от сплайна, а полностью определяются сеткой Δ_x.

Теперь сетки Δ_x и Δ_y как бы меняются местами. Равенства (16), записанные для разных индексов i, представляют собой набор линейных соотношений, связывающих значения сплайна в узлах сетки Δ_x и коэффициенты разложения k-й производной сплайна по L_∞-нормализованным B-сплайнам сетки Δ_y. Поскольку теперь в задаче интерполяции именно в узлах сетки Δ_x известны значения интерполируемой функции, эти соотношения позволяют записать системы линейных уравнений относительно определяемых параметров — коэффициентов разложения какой-либо производной сплайна s по B-сплайнам.

Пусть выбрано k $(0 \leqslant k \leqslant 2m)$ и надо определять параметры $\alpha_{-2m+k}^{(k)}, \ldots, \alpha_N^{(k)}$ — коэффициенты B-сплайн-разложения k-й производной на сетке Δ_y. С учетом краевых условий можем считать, что левые части соотношений (16) определены при $i = -m, \ldots, N+m-k$, а правые — при $i = 1-k, \ldots, N-1$. Поэтому рассмотрение разбивается на два случая: $k \leqslant m$ и $k > m$.

Если $k > m$, то соотношения (16) для $i = -m, \ldots, N+m-k$ образуют систему из $N+2m-k+1$ уравнений относительно $N+2m-k+1$ неизвестных $\alpha_{-2m+k}^{(k)}, \ldots, \alpha_N^{(k)}$ (в силу кратности узлов сетки Δ_y на концах отрезка $[a,b]$ данные уравнения параметров $\alpha_j^{(k)}$ с индексами j, отличными от указанных, содержать не будут). В матричной форме эта система имеет вид

$$\boldsymbol{B}_k \boldsymbol{\alpha}^k = \boldsymbol{c}^k, \tag{18}$$

где $\boldsymbol{B}_k = \left(b_{i,j}^k\right)$ — матрица с элементами

$$b_{i,j}^k = Y_{i-m-1,j-2m+k-1}^k, \quad i,j = 1, \ldots, N+2m-k+1,$$

$\boldsymbol{\alpha}^k = \left(\alpha_{-2m+k}^{(k)}, \ldots, \alpha_N^{(k)}\right)^T$ — вектор неизвестных и $\boldsymbol{c}^k = (c_1^k, \ldots, c_{N+2m-k+1}^k)^T$ — вектор в правой части системы с элементами $c_i^k = k!\, f[x_{i-m-1}, \ldots, x_{i-m+k-1}]$.

Если же $k \leqslant m$, то соотношения (16) записываются лишь для индексов $i = 1-k, \ldots, N-1$, т. е. всего $N+k-1$ уравнений. Здесь опять-таки по причине кратности крайних узлов уравнения содержат только слагаемые с неизвестными $\alpha_{-2m+k}^{(k)}, \ldots, \alpha_N^{(k)}$. Для получения замкнутой системы уравнений требуется еще $2(m-k+1)$ уравнений. Дополнительные уравнения мы получаем из (8), приравнивая значения $s^{(\nu)}$ известным на краях отрезка $[a,b]$ значениям $f^{(\nu)}$,

$$\sum_{j=k-2m}^{-1} \alpha_j^{(k)} N_{j,2m+1-k,y}^{(\nu-k)}(y_0) = f^{(\nu)}(a), \qquad \sum_{j=N-2m+k+1}^{N} \alpha_j^{(k)} N_{j,2m+1-k,y}^{(\nu-k)}(y_N) = f^{(\nu)}(b)$$

при $\nu = k, \ldots, m$.

Снова, проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям из работ [14, 15], приходим к явным формулам

$$\alpha_{j-2m+k}^{(k)} = \sum_{p=0}^{j} \frac{(2m-k-p)!}{(2m-k)!} \operatorname{sym}_p(y_1 - y_0, \ldots, y_j - y_0) f^{(k+p)}(a),$$

$$\alpha_{N-j}^{(k)} = \sum_{p=0}^{j} \frac{(2m-k-p)!}{(2m-k)!} \operatorname{sym}_p(y_{N-1}-y_N, \ldots, y_{N-j}-y_N) f^{(k+p)}(b),$$

где $j = 0, \ldots, m-k$.

Теперь из уравнений (16) при $i = -k+1, \ldots, N-1$ исключим найденные коэффициенты. В результате получим систему $N+k-1$ уравнений

$$\boldsymbol{B}_k \boldsymbol{\alpha}^k = \boldsymbol{c}^k \tag{19}$$

относительно оставшихся неизвестных $\boldsymbol{\alpha}^k = \big(\alpha_{-m+1}^{(k)}, \ldots, \alpha_{N-m+k-1}^{(k)}\big)^T$ с некоторой матрицей $\boldsymbol{B}_k = (b_{i,j}^k)$ и вектором в правой части $\boldsymbol{c}^k = (c_1^k, \ldots, c_{N+k-1}^k)^T$. Матрица $\boldsymbol{B}_k$ имеет структуру, подобную структуре матрицы системы (18). Ее элементами также являются интегралы от произведений B-сплайнов

$$b_{i,j}^k = Y_{i-k,j-m}^k, \quad i,j = 1, \ldots, N+k-1,$$

а вектор в правой части имеет компоненты

$$\begin{aligned} c_i^k &= \xi_i^k - \sum_{j=-2m+k}^{-m} \alpha_j^{(k)} Y_{i-k,j}^k, && i = 1, \ldots, m, \\ c_i^k &= \xi_i^k, && i = m+1, \ldots, N+k-m-1, \\ c_i^k &= \xi_i^k - \sum_{j=N+k-m}^{N} \alpha_j^{(k)} Y_{i-k,j}^k, && i = N+k-m, \ldots, N+k-1, \end{aligned}$$

где $\xi_i^k = k!\, f[x_{i-k}, \ldots, x_i]$ и $Y_{i,j}^k$ определены формулами (17).

Итак, для сплайнов четной степени и по Марсдену, и по Субботину мы получили набор систем уравнений для определения параметров — коэффициентов разложения одной из производных искомого сплайна по L_∞-нормализованным B-сплайнам. Кроме того, повторяя рассуждения из работы [16], получаем и системы уравнений относительно коэффициентов разложения одной из производных сплайна по L_1-нормализованным B-сплайнам.

Для сплайна степени $2m$ по Марсдену система уравнений при $m \leqslant k \leqslant 2m$ имеет вид

$$\boldsymbol{B}_{2m+1-k}^T \boldsymbol{\beta}^k = \boldsymbol{d}^k, \tag{20}$$

где $\boldsymbol{B}_{2m+1-k}$ является матрицей системы уравнений (19) для построения сплайна степени $2m$ по Субботину, $\boldsymbol{\beta}^k = \big(\beta_{-2m+k}^{(k)}, \ldots, \beta_{N-1}^{(k)}\big)^T$ — вектор неизвестных коэффициентов разложения $s^{(k)}$ по L_1-нормализованным B-сплайнам на сетке Δ_x и $\boldsymbol{d}^k = (d_1^k, \ldots, d_{N+2m-k}^k)^T$ — вектор правой части с элементами

$$d_i^k = (k-1)! \big\{ f[y_{i-m+1}, \ldots, y_{i-m+k}] - f[y_{i-m}, \ldots, y_{i-m+k-1}] \big\}. \tag{21}$$

Как и в случае сплайнов нечетной степени [16], полученную систему уравнений (20) можно распространить и для значения k на 1 больше степени сплайна.

Для любой функции $g \in W_1^{r-1}[a,b]$ на основании свойств B-сплайнов (6) и (7) справедливо представление разделенной разности в виде

$$g[y_i,\ldots,y_{i+r}] = -\frac{1}{y_{i+r}-y_i}\int\limits_{y_i}^{y_{i+r}} \frac{1}{(r-1)!} N'_{i,r,y}(\tau) g^{(r-1)}(\tau)\,d\tau.$$

Применим эту формулу для сплайна s степени $2m$ по Марсдену при $r = 2m+1$, тогда

$$s[y_i,\ldots,y_{i+2m}] - s[y_{i+1},\ldots,y_{i+2m+1}] = \frac{1}{(2m)!}\int\limits_{y_i}^{y_{i+2m+1}} N'_{i,2m+1,y}(\tau) s^{(2m)}(\tau)\,d\tau.$$

Поскольку на каждом отрезке $[x_j, x_{j+1}]$ сетки Δ_x функция $s^{(2m)}$ постоянна, интеграл в правой части равенства легко может быть выражен через разрывы

$$\beta_j^{(2m+1)} = s^{(2m)}(x_j+0) - s^{(2m)}(x_j-0)$$

старшей производной сплайна

$$\sum_{j=i}^{i+2m} N_{i,2m+1,y}(x_j)\ \beta_j^{(2m+1)} = d_{i+m}^{2m+1}, \tag{22}$$

причем компоненты правой части определены формулами (21) в силу интерполяции.

Полученные равенства представляют собой систему линейных уравнений относительно разрывов старшей производной.

Отметим, что обозначение разрывов $(2m)$-й производной сплайна тем же символом, что и коэффициентов разложения производной по L_1-нормализованным B-сплайнам $M_{i,r,x}$, вполне закономерно, если считать$M_{i,0,x} = \delta_{x_i}$. В этом случае $X_{j,i}^0 = N_{i,2m+1,y}(x_j)$ и соотношения (20) при $k = 2m+1$ совпадут с (22). Напомним, δ_t — δ-функция Дирака, сосредоточенная в точке t (обобщенная функция).

При $k < m$ система уравнений записывается лишь относительно вектора неизвестных $\boldsymbol{\beta}^k = \left(\beta_{-m}^{(k)},\ldots,\beta_{N-m+k-1}^{(k)}\right)^T$ и имеет вид

$$\boldsymbol{B}_{2m+1-k}^T \boldsymbol{\beta}^k = \boldsymbol{d}^k. \tag{23}$$

Здесь матрица $\boldsymbol{B}_{2m+1-k}^T$ является транспонированной к матрице $\boldsymbol{B}_{2m+1-k}$ системы (18) для $(2m+1-k)$-й производной построения сплайна степени $2m$ по Субботину, а вектор правой части $\boldsymbol{d}^k = \left(d_1^k,\ldots,d_{N+k}^k\right)^T$ имеет компоненты

$$\begin{aligned}
d_i^k &= \eta_i^k - \sum_{j=-2m+k}^{-m-1} \beta_j^{(k)} X_{i-k,j}^k, && i = 1,\ldots,m-1,\\
d_i^k &= \eta_i^k, && i = m,\ldots,N+k-m+1,\\
d_i^k &= \eta_i^k - \sum_{j=N+k-m}^{N-1} \beta_j^{(k)} X_{i-k,j}^k, && i = N+k-m+2,\ldots,N+k,
\end{aligned}$$

где $\eta_i^k = (k-1)!\bigl\{f[y_{i-k+1},\ldots,y_i] - f[y_{i-k},\ldots,y_{i-1}]\bigr\}$. Недостающие коэффициенты $\beta_{-2m+k}^{(k)},\ldots$ $\ldots,\beta_{-m-1}^{(k)}$ и $\beta_{N-m+k}^{(k)},\ldots,\beta_{N-1}^{(k)}$ разложения k-й производной искомого сплайна по L_1-нормализованным B-сплайнам находятся по явным формулам

$$\beta^{(k)}_{j-2m+k} = u_{j+1}\sum_{p=0}^{j}\frac{(2m-k-p)!}{(2m-k+1)!}\,\mathrm{sym}_p(u_1,\ldots,u_j)f^{(k+p)}(a), \tag{24}$$

$$\beta^{(k)}_{N-1-j} = -v_{j+1}\sum_{p=0}^{j}\frac{(2m-k-p)!}{(2m-k+1)!}\,\mathrm{sym}_p(v_1,\ldots,v_j)f^{(k+p)}(b), \tag{25}$$

где $j=0,\ldots,m-k-1$, $u_\nu = x_\nu - x_0$, $v_\nu = x_{N-\nu}-x_N$.

И, наконец, запишем аналогичные системы уравнений и для сплайнов степени $2m$ по Субботину. При $k>m$ получаем

$$\boldsymbol{A}^T_{2m+1-k}\boldsymbol{\beta}^k = \boldsymbol{d}^k, \tag{26}$$

где матрица $\boldsymbol{A}_{2m+1-k}$ также является матрицей системы (15), вектор неизвестных $\boldsymbol{\beta}^k = \big(\beta^{(k)}_{-2m+k},\ldots,\beta^{(k)}_N\big)^T$ состоит из коэффициентов разложения k-й производной искомого сплайна s по Субботину по L_1-нормализованным B-сплайнам и $\boldsymbol{d}^k = (d^k_1,\ldots,d^k_{N+2m-k+1})^T$ — вектор правой части системы с элементами

$$d^k_i = (k-1)!\big\{f[x_{i-m},\ldots,x_{i-m+k-1}] - f[x_{i-m-1},\ldots,x_{i-m+k-2}]\big\}.$$

Как и в случае интерполяционных сплайнов по Марсдену, здесь также можно считать, что система уравнений (26) будет иметь место и при $k=2m+1$, если неизвестными являются разрывы старшей производной искомого интерполяционного сплайна по Субботину.

Если $k\leqslant m$, то система уравнений записывается относительно вектора неизвестных $\boldsymbol{\beta}^k = \big(\beta^{(k)}_{-m+1},\ldots,\beta^{(k)}_{N-m+k-1}\big)^T$ и имеет вид

$$\boldsymbol{A}^T_{2m+1-k}\boldsymbol{\beta}^k = \boldsymbol{d}^k. \tag{27}$$

Здесь матрица $\boldsymbol{A}^T_{2m+1-k}$ является транспонированной к матрице $\boldsymbol{A}_{2m+1-k}$ системы (12) для $(2m+1-k)$-й производной построения сплайна степени $2m$ по Марсдену, а вектор правой части $\boldsymbol{d}^k = \big(d^k_1,\ldots,d^k_{N+k-1}\big)^T$ имеет компоненты

$$\begin{aligned}
d^k_i &= \eta^k_i - \sum_{j=-2m+k}^{-m}\beta^{(k)}_j Y^k_{i-k,j}, && i=1,\ldots,m,\\
d^k_i &= \eta^k_i, && i=m+1,\ldots,N+k-m-1,\\
d^k_i &= \eta^k_i - \sum_{j=N+k-m}^{N}\beta^{(k)}_j Y^k_{i-k,j}, && i=N+k-m,\ldots,N+k-1,
\end{aligned}$$

где $\eta^k_i = (k-1)!\big\{f[x_{i-k+1},\ldots,x_i] - f[x_{i-k},\ldots,x_{i-1}]\big\}$. Недостающие крайние коэффициенты $\beta^{(k)}_{-2m+k},\ldots,\beta^{(k)}_{-m}$ и $\beta^{(k)}_{N-m+k},\ldots,\beta^{(k)}_N$ находятся по явным формулам

$$\beta^{(k)}_{j-2m+k} = u_{j+1}\sum_{p=0}^{j}\frac{(2m-k-p)!}{(2m-k+1)!}\,\mathrm{sym}_p(u_1,\ldots,u_j)f^{(k+p)}(a),$$

$$\beta^{(k)}_{N-j} = -v_{j+1}\sum_{p=0}^{j}\frac{(2m-k-p)!}{(2m-k+1)!}\,\mathrm{sym}_p(v_1,\ldots,v_j)f^{(k+p)}(b),$$

где $j=0,\ldots,m-k$, $u_\nu = y_\nu - y_0$, $v_\nu = y_{N-\nu}-y_N$.

Заметим, что для интерполяционных сплайнов второй степени по Субботину и по Марсдену все эти системы получены в [17].

5. Вычисление элементов и свойства матриц определяющих систем уравнений. Задачу построения интерполяционного сплайна s четной степени $2m$ как по Субботину, так и по Марсдену мы рассматриваем как задачу определения его параметров. В качестве таких параметров рассматриваем коэффициенты разложения производной степени k по B-сплайнам. В предыдущем пункте были выведены системы линейных уравнений для разных случаев, однако структура матриц $\boldsymbol{A}_k$ и $\boldsymbol{B}_k$ во всех случаях одинакова — их элементами являются интегралы от произведений B-сплайнов по сеткам Δ_x и Δ_y (см. (11), (17)).

Практическое вычисление элементов матриц $\boldsymbol{A}_k$ и $\boldsymbol{B}_k$ в каждом конкретном случае не вызывает особых проблем. Можно, например, воспользоваться квадратурными формулами Гаусса, которые точны на многочленах. С другой стороны, в работе [18] было указано, что интегралы от произведений B-сплайнов, т. е. величины $X^k_{i,j}$ или $Y^k_{i,j}$, можно вычислять по устойчивым рекуррентным формулам.

Перейдем к изучению свойств матриц $\boldsymbol{A}_k$ и $\boldsymbol{B}_k$ рассматриваемых систем уравнений (12), (15) и (18), (19).

Для векторов $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_N)^T$ и $(N \times N)$-матриц $\boldsymbol{G} = (g_{i,j})$ будем рассматривать нормы

$$\|\boldsymbol{\gamma}\| = \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\gamma_i|, \qquad \|\boldsymbol{G}\| = \max_{1\leqslant i\leqslant N} \sum_{j=1}^{N} |g_{i,j}|.$$

Теорема 1. *Для любого* k, $1 \leqslant k \leqslant 2m$, *матрицы* $\boldsymbol{A}_k$ *и* $\boldsymbol{B}_k$ *систем уравнений* (12), (15) *и* (18), (19) *являются* $(2m+1)$*-диагональными с неотрицательными элементами и* $\|\boldsymbol{A}_k\| = \|\boldsymbol{B}_k\| = 1$.

Доказательство. Элементами матриц $\boldsymbol{A}_k$ и $\boldsymbol{B}_k$ всех четырех систем уравнений (12), (15) и (18), (19) являются интегралы от произведений B-сплайнов (величины $X^k_{i,j}$ и $Y^k_{i,j}$), что объясняет их неотрицательность. Носитель сплайна $M_{i,k,y}$ состоит из k интервалов сетки Δ_y, а носитель $N_{j,2m-k+1,x}$ — из $2m-k+1$ интервалов сетки Δ_x, поэтому $X^k_{i,j} \neq 0$ лишь при $j = i+k-2m, \ldots, i+k$. Следовательно, для любого $1 \leqslant k \leqslant 2m$ матрицы $\boldsymbol{A}_k$ всегда ленточные с ненулевыми $2m+1$ диагоналями. Это же справедливо и для матриц $\boldsymbol{B}_k$.

Поскольку элементы этих матриц неотрицательны, для вычисления норм матриц достаточно вычислить суммы элементов по строкам. Ограничимся рассмотрением лишь системы уравнений (15). Ее размерность равна $N+k$. При $i = m, \ldots, N+k-m+1$ с учетом свойств нормировки B-сплайнов имеем

$$\sum_{j=1}^{N+k} a^k_{i,j} = \sum_{j=1}^{N+k} \int\limits_{y_{i-k}}^{y_i} M_{i-k,k,y}(\tau) N_{j-m,2m-k+1,x}(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int\limits_{y_{i-k}}^{y_i} M_{i-k,k,y}(\tau) \left(\sum_{j=i+1-2m}^{i-1} N_{j,2m-k+1,x}(\tau) \right) d\tau =$$

$$= \int\limits_{y_{i-k}}^{y_i} M_{i-k,k,y}(\tau)\, d\tau = 1,$$

а в первых и последних m строках сумма будет равна 1 только после добавления слагаемых

$$\sum_{j=-2m+k}^{-m-1} X_{i-k,j}^{k} \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=N+k-m}^{N-1} X_{i-k,j}^{k}$$

соответственно.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Для любого* k, $1 \leqslant k \leqslant 2m$, *матрицы* $\boldsymbol{A}_k$ *и* $\boldsymbol{B}_k$ *систем уравнений* (12), (15) *и* (18), (19) *вполне неотрицательны.*

Доказательство. Требуется доказать, что все миноры любого порядка неотрицательны. Воспользуемся [10, с. 218] интегральным тождеством для двух систем функций $\psi_1(t), \ldots, \psi_p(t)$ и $\chi_1(t), \ldots, \chi_p(t)$:

$$\frac{1}{p!}\int_a^b \ldots \int_a^b \begin{vmatrix} \psi_1(t_1) & \ldots & \psi_1(t_p) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_p(t_1) & \ldots & \psi_p(t_p) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \chi_1(t_1) & \ldots & \chi_1(t_p) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \chi_p(t_1) & \ldots & \chi_p(t_p) \end{vmatrix} dt_1 \ldots dt_p =$$

$$= \begin{vmatrix} \int_a^b \psi_1(t)\chi_1(t)dt & \ldots & \int_a^b \psi_1(t)\chi_p(t)dt \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \int_a^b \psi_p(t)\chi_1(t)dt & \ldots & \int_a^b \psi_p(t)\chi_p(t)dt \end{vmatrix}.$$

Положим в этом тождестве

$$\psi_1 = M_{i_1,k,y}, \ldots, \psi_p = M_{i_p,k,y}, \qquad \chi_1 = N_{j_1,m,x}, \ldots, \chi_p = N_{j_p,m,x}.$$

Тогда правая часть тождества будет представлять минор матрицы $\boldsymbol{A}_k$ порядка p. Требуется доказать, что он должен быть неотрицателен при любом наборе индексов $i_1 < i_2 < \ldots \ldots < i_p$ и $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$. Левая часть тождества в качестве подынтегрального выражения будет содержать произведение миноров B-сплайновых коллокационных матриц по сеткам Δ_x и Δ_y. Поскольку B-сплайновая коллокационная матрица является вполне неотрицательной (см. [13]), все ее миноры неотрицательны. Следовательно, левая часть тождества всегда является неотрицательной величиной.

Меняя в рассуждениях местами сетки Δ_x и Δ_y, доказываем теорему и для матриц $\boldsymbol{B}_k$.

6. Оценки погрешностей приближения производных. В пункте 4 в задаче интерполяции сплайнами четной степени как по Марсдену, так и по Субботину получены системы уравнений относительно коэффициентов B-сплайн-разложения некоторой k-й производной интерполяционного сплайна, являющихся определяющими параметрами искомого сплайна. Важной характеристикой систем уравнений, особенно при практическом построении сплайна, является величина обусловленности системы или величина нормы обратной матрицы (поскольку в силу теоремы 1 выполнено $\|\boldsymbol{A}_k\| = \|\boldsymbol{B}_k\| = 1$). Однако помимо информации о величине возможной погрешности при практическом решении этих систем, т. е. об ошибке нахождения параметров интерполяционного сплайна, погрешность метода, в данном случае величина $s^{(k)} - f^{(k)}$, также может быть оценена в терминах обусловленности (нормы обратной матрицы). Мы установим оценку погрешности $s^{(k)} - f^{(k)}$ в равномерной норме через модуль непрерывности функции $f^{(k)}$, т. е. при минимальных требованиях к гладкости интерполируемой функции f.

Отметим, что если полный сплайн s четной степени $2m$ по Субботину интерполирует функцию f гладкости $C^k[a,b]$ при $k < m$ и функция f на краях отрезка $[a,b]$ не имеет нужного количества производных (меньше m), то считаем, что производные сплайна s в (3) интерполируют вместо недостающих производных функции f произвольные числовые значения, но за ними в этом случае по-прежнему сохраним обозначения $f^{(\nu)}(a)$ или $f^{(\nu)}(b)$. Аналогично, если полный сплайн s степени $2m$ по Марсдену интерполирует функцию $f \in C^k[a,b]$ при $k < m-1$, также считаем, что при отсутствии нужного числа производных функции f в точках a и b (см. (4)) берем вместо них произвольные числовые значения, обозначая их теми же символами $f^{(\nu)}(a)$ или $f^{(\nu)}(b)$.

Как обычно, для любой функции g, заданной на $[a,b]$, полагаем

$$\omega(g;h) = \max_{s,t\in[a,b],|s-t|\leqslant h} \big|g(s) - g(t)\big|, \qquad \|g\|_\infty = \operatorname{ess}\sup_{a\leqslant x\leqslant b} \big|g(x)\big|.$$

Ясно, что если $g \in C[a,b]$, то $\omega(g;h) \to 0$ при $h \to 0$. Кроме того, обозначим $h_i = x_{i+1} - x_i$, $\bar h = \max\{h_i \colon 0 \leqslant i \leqslant N-1\}$.

Результаты сформулируем в виде следующих теорем.

Теорема 3. *Если $f \in C^k[a,b]$, $0 \leqslant k \leqslant m-1$, то для сплайна s четной степени $2m$ по Субботину справедливы оценки*

$$\big\|s^{(k)} - f^{(k)}\big\|_\infty \leqslant K\big\|\boldsymbol{B}_k^{-1}\big\|\,\omega\big(f^{(k)};\bar h\big) + K'\big\|\boldsymbol{B}_k^{-1}\big\|\,\bar h,$$

$$\big\|s^{(k)} - f^{(k)}\big\|_\infty \leqslant \widehat K\big\|(\boldsymbol{A}_{2m-k}^T)^{-1}\big\|\,\omega\big(f^{(k)};\bar h\big) + \widehat K'\big\|(\boldsymbol{A}_{2m-k}^T)^{-1}\big\|\,\bar h,$$

где $\boldsymbol{B}_k$ — матрица системы уравнений (19), *$\boldsymbol{A}_{2m-k}$ — матрица системы* (12), *константы K, K' и $\widehat K$, $\widehat K'$ зависят только от k и m, но не от сеток Δ_x и Δ_y.*

Теорема 4. *Если $f \in C^k[a,b]$, $m \leqslant k \leqslant 2m$, то для сплайна s четной степени $2m$ по Субботину справедливы оценки*

$$\big\|s^{(k)} - f^{(k)}\big\|_\infty \leqslant K\big\|\boldsymbol{B}_k^{-1}\big\|\,\omega\big(f^{(k)};\bar h\big),$$

$$\big\|s^{(k)} - f^{(k)}\big\|_\infty \leqslant \widehat K\big\|(\boldsymbol{A}_{2m-k}^T)^{-1}\big\|\,\omega\big(f^{(k)};\bar h\big),$$

где $\boldsymbol{B}_k$ — матрица системы уравнений (18) *при $k > m$ или системы* (19) *при $k = m$, $\boldsymbol{A}_{2m-k}$ — матрица системы* (15), *константы K и $\widehat K$ зависят только от k и m, но не от сеток Δ_x и Δ_y.*

Теорема 5. *Если $f \in C^k[a,b]$, $0 \leqslant k \leqslant m-2$, то для сплайна s четной степени $2m$ по Марсдену справедливы оценки*

$$\big\|s^{(k)} - f^{(k)}\big\|_\infty \leqslant K\big\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\big\|\,\omega\big(f^{(k)};\bar h\big) + K'\big\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\big\|\,\bar h, \tag{28}$$

$$\big\|s^{(k)} - f^{(k)}\big\|_\infty \leqslant \widehat K\big\|(\boldsymbol{B}_{2m-k}^T)^{-1}\big\|\,\omega\big(f^{(k)};\bar h\big) + \widehat K'\big\|(\boldsymbol{B}_{2m-k}^T)^{-1}\big\|\,\bar h, \tag{29}$$

где $\boldsymbol{A}_k$ — матрица системы уравнений (15), *$\boldsymbol{B}_{2m-k}$ — матрица системы* (18), *константы K, K' и $\widehat K$, $\widehat K'$ зависят только от k и m, но не от сеток Δ_x и Δ_y.*

Теорема 6. *Если $f \in C^k[a,b]$, $m-1 \leqslant k \leqslant 2m$, то для сплайна s четной степени $2m$ по Марсдену справедливы оценки*

$$\left\|s^{(k)} - f^{(k)}\right\|_\infty \leqslant K\left\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\right\| \, \omega\bigl(f^{(k)};\bar h\bigr),$$

$$\left\|s^{(k)} - f^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \widehat{K}\left\|(\boldsymbol{B}_{2m-k}^T)^{-1}\right\| \, \omega\bigl(f^{(k)};\bar h\bigr),$$

где $\boldsymbol{A}_k$ — матрица системы уравнений (12) *при $k \geqslant m$ или системы* (15) *при $k = m-1$, $\boldsymbol{B}_{2m-k}$ — матрица системы* (19), *константы K и $\widehat{K}$ зависят только от k и m, но не от сеток Δ_x и Δ_y.*

Основой для первых неравенств в каждой из теорем 3 – 6 являются системы уравнений (12), (15) и (18), (19), т. е. системы, где определяемыми параметрами служат коэффициенты разложения k-й производной искомого сплайна по L_∞-нормализованным B-сплайнам. Доказательство вторых неравенств в этих теоремах основывается в первую очередь на системах уравнений (20), (23) и (26), (27), т. е. на системах, в которых определяемыми параметрами являются коэффициенты разложения k-й производной искомого сплайна по L_1-нормализованным B-сплайнам. Поскольку доказательство теорем 3 – 6 проводится по единой схеме, докажем лишь теорему 5.

***Доказательство теоремы* 5.** Для представления сплайна $s^{(k)}$ нужны коэффициенты $\alpha^{(k)}_{-2m+k},\ldots,\alpha^{(k)}_{N-1}$, из которых $\alpha^{(k)}_{-2m+k},\ldots,\alpha^{(k)}_{-m-1}$ и $\alpha^{(k)}_{N-m+k},\ldots,\alpha^{(k)}_{N-1}$ вычисляются явно из граничных условий по формулам (13), (14), а остальные определяются из системы уравнений (15). Чтобы оценить величину отклонения $s^{(k)} - f^{(k)}$, введем вспомогательный локальный сплайн s_k, отличающийся от сплайна $s^{(k)}$ тем, что неизвестные коэффициенты $\alpha^{(k)}_{-m},\ldots,\alpha^{(k)}_{N-m+k-1}$ заменены компонентами некоторого вектора $\boldsymbol{\xi}^k = (\xi_1^k,\ldots,\xi_{N+k}^k)^T$, где $\xi_i^k = k!\ f[y_{i-k},\ldots,y_i]$, отличающегося от вектора правой части $\boldsymbol{c}^k$ системы (15) первыми и последними $m-1$ компонентами.

Установим вначале оценку отклонения $s^{(k)}$ от s_k. Имеем

$$\left|s^{(k)}(x) - s_k(x)\right| = \left|\sum_{j=1}^{N+k}\bigl(\alpha^{(k)}_{j-m} - \xi_j^k\bigr)N_{j-m,2m-k+1,x}(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\boldsymbol{\alpha}^k - \boldsymbol{\xi}^k\right\| \leqslant \left\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\right\|\left\|\boldsymbol{c}^k - \boldsymbol{A}_k\boldsymbol{\xi}^k\right\|. \tag{30}$$

Последнее неравенство следует из системы уравнений $\boldsymbol{A}_k\bigl(\boldsymbol{\alpha}^k - \boldsymbol{\xi}^k\bigr) = \boldsymbol{c}^k - \boldsymbol{A}_k\boldsymbol{\xi}^k$, получаемой из (15).

Рассмотрим сначала первые $m-1$ компонент вектора $\boldsymbol{c}^k - \boldsymbol{A}_k\boldsymbol{\xi}^k$. При $i = 1,\ldots,m-1$ имеем

$$\bigl(\boldsymbol{c}^k - \boldsymbol{A}_k\boldsymbol{\xi}^k\bigr)_i = \xi_i^k - \sum_{j=-2m+k}^{-1-m}\alpha_j^{(k)}X^k_{i-k,j} - \sum_{j=1}^{N+k}a^k_{i,j}\xi^k_j =$$

$$= \sum_{j=-2m+k}^{-1-m}\bigl(\xi_i^k - \alpha_j^{(k)}\bigr)X^k_{i-k,j} + \sum_{j=1}^{N+k}\bigl(\xi_i^k - \xi_j^k\bigr)a^k_{i,j}.$$

Поскольку

$$\sum_{j=-2m+k}^{-1-m} X_{i-k,j}^k + \sum_{j=1}^{N+k} a_{i,j}^k = \sum_{j=i-m}^{i+m} X_{i-k,j-m-1}^k = 1,$$

то

$$\left|\left(\boldsymbol{c}^k - \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{\xi}^k\right)_i\right| \leqslant \max\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant m-k}\left|\xi_i^k - \alpha_{j-2m+k}^{(k)}\right|, \max_{|i-j|\leqslant m-1}\left|\xi_i^k - \xi_j^k\right|\right\}. \tag{31}$$

Если обозначить $u_\nu = x_\nu - x_0$, то в соответствии с (13) заключаем, что

$$\left|\xi_i^k - \alpha_{j-2m+k}^{(k)}\right| = \left|\xi_i^k - \sum_{p=0}^{j-1} \operatorname{sym}_p(u_1,\ldots,u_{j-1}) \frac{(2m-k-1-p)!}{(2m-k-1)!} f^{(k+p)}(a)\right| \leqslant$$

$$\leqslant (m-1)\,\omega\left(f^{(k)};\bar h\right) + K_a \bar h,$$

где

$$K_a = \sum_{p=1}^{m-k-1} (m-1)^p \bar h^{p-1}\left|f^{(k+p)}(a)\right|, \tag{32}$$

а для второго максимума в (31) можно применить неравенство

$$\left|\xi_i^k - \xi_j^k\right| = \left|f^{(k)}(\tau_i) - f^{(k)}(\tau_j)\right| \leqslant \big(|i-j|+k\big)\,\omega\big(f^{(k)};\bar h\big), \quad \tau_i \in [y_{i-k}, y_k], \tag{33}$$

по свойству разделенных разностей. Следовательно,

$$\left|\left(\boldsymbol{c}^k - \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{\xi}^k\right)_i\right| \leqslant (m-1+k)\,\omega\big(f^{(k)};\bar h\big) + K_a \bar h. \tag{34}$$

Рассмотрение последних $m-1$ компонент вектора $\boldsymbol{c}^k - \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{\xi}^k$ аналогично, поэтому для $i = N+k-m+1,\ldots,N+k-1$ выполняются неравенства

$$\left|\left(\boldsymbol{c}^k - \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{\xi}^k\right)_i\right| \leqslant (m-1+k)\,\omega\big(f^{(k)};\bar h\big) + K_b \bar h, \tag{35}$$

где

$$K_b = \sum_{p=1}^{m-k-1} (m-1)^p \bar h^{p-1}\left|f^{(k+p)}(b)\right|. \tag{36}$$

Для оставшихся компонент $i = m,\ldots,N+k-m$ вектора $\boldsymbol{c}^k - \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{\xi}^k$, совпадающих с соответствующими компонентами вектора $\boldsymbol{\xi}^k - \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{\xi}^k$, с учетом оценки (33) получаем

$$\left|\left(\boldsymbol{c}^k - \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{\xi}^k\right)_i\right| = \left|\sum_{j=i-m+1}^{i+m-1} a_{i,j}^k\big(\xi_i^k - \xi_j^k\big)\right| \leqslant (m-1+k)\,\omega\big(f^{(k)};\bar h\big). \tag{37}$$

Наконец, объединяя неравенства (34), (35) и (37), можем утверждать, что справедлива оценка

$$\left\|\boldsymbol{c}^k - \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{\xi}^k\right\| \leqslant (m-1+k)\,\omega\big(f^{(k)};\bar h\big) + K_{ab} \bar h$$

с константой $K_{ab} = \max\{K_a, K_b\}$. И, следовательно, из (30) заключаем, что

$$\left\|s^{(k)} - s_k\right\|_\infty \leqslant \left\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\right\|\Big[(m-1+k)\,\omega\big(f^{(k)};\bar h\big) + K_{ab}\bar h\Big]. \tag{38}$$

Теперь оценим погрешность приближения производной $f^{(k)}$ сплайном s_k. В силу свойства нормировки B-сплайнов имеем

$$\bigl|s_k(x) - f^{(k)}(x)\bigr| = \Biggl|\sum_{j=-2m+k}^{-1-m} \bigl[\alpha_j^{(k)} - f^{(k)}(x)\bigr] N_{j,2m-k+1,x}(x) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N+k} \bigl[\xi_j^k - f^{(k)}(x)\bigr] N_{j-m,2m-k+1,x}(x) +$$

$$+ \sum_{j=N-m+k}^{N-1} \bigl[\alpha_j^{(k)} - f^{(k)}(x)\bigr] N_{j,2m-k+1,x}(x)\Biggr| \leqslant$$

$$\leqslant \max\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}, \tag{39}$$

где

$$\sigma_1 = \max_{-2m+k \leqslant j \leqslant -1-m} \bigl|\alpha_j^{(k)} - f^{(k)}(x)\bigr|,$$

$$\sigma_2 = \max_{1 \leqslant j \leqslant N+k} \bigl|\xi_j^k - f^{(k)}(x)\bigr|,$$

$$\sigma_3 = \max_{N-m+k \leqslant j \leqslant N-1} \bigl|\alpha_j^{(k)} - f^{(k)}(x)\bigr|.$$

Заметим, что в силу финитности B-сплайнов в (39) под знаком максимума надо учитывать σ_1 только при $x \in [x_0, x_{m-k}]$, а σ_3 — при $x \in [x_{N-m+k}, x_N]$. Величины $\alpha_j^{(k)}$ в выражении (39) задаются формулами (13), (14), поэтому при $x \in [x_0, x_{m-k}]$ выполнено $\sigma_1 \leqslant (m-k)\,\omega\bigl(f^{(k)}; \bar h\bigr) + K_a \bar h$, а при $x \in [x_{N-m+k}, x_N]$ — $\sigma_3 \leqslant (m-k)\,\omega\bigl(f^{(k)}; \bar h\bigr) + K_b \bar h$, где величина K_a определена равенством (32), а K_b — равенством (36). Аналогично, если $x \in [x_i, x_{i+1}]$, то σ_2 под знаком максимума в (39) надо учитывать только при индексах $i+1 \leqslant j \leqslant i+2m-k$. В этом случае $\sigma_2 \leqslant n\,\omega\bigl(f^{(k)}; \bar h\bigr)$.

Таким образом,

$$\bigl|s_k(x) - f^{(k)}(x)\bigr| \leqslant n\,\omega\bigl(f^{(k)}; \bar h\bigr) + K_{ab}\bar h \tag{40}$$

с константой $K_{ab} = \max\{K_a, K_b\}$. В итоге, складывая оценки (38) и (40), приходим к неравенству (28). Первая часть теоремы 5 доказана.

Докажем теперь неравенство (29). Поскольку сплайн s интерполирует функцию $f \in C^k$ в узлах сетки Δ_y, по теореме Ролля не далее, чем на $k+1$ интервалах сетки Δ_y от произвольной точки x, существует точка θ такая, что $s^{(k)}(\theta) = f^{(k)}(\theta)$. Следовательно,

$$\bigl|s^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)\bigr| \leqslant \Bigl|s^{(k)}(x) - s^{(k)}(\theta)\Bigr| + \Bigl|f^{(k)}(\theta) - f^{(k)}(x)\Bigr| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_\theta^x s^{(k+1)}(\tau)d\tau\right| + (k+1)\,\omega\bigl(f^{(k)}; \bar h\bigr). \tag{41}$$

Будем считать сплайн $s^{(k+1)}$ представленным в базисе из L_1-нормализованных B-сплайнов

$$s^{(k+1)}(x) = \beta^{(k+1)}_{1-2m+k} M_{1-2m+k,2m-k,x}(x) + \ldots + \beta^{(k+1)}_{N-1} M_{N-1,2m-k,x}(x). \tag{42}$$

Тогда, используя условие нормировки B-сплайнов, получаем

$$\left| \int\limits_{\theta}^{x} s^{(k+1)}(\tau) d\tau \right| \leqslant \sum_j \left|\beta_j^{(k+1)}\right|,$$

причем сумма содержит не более $2m$ слагаемых в силу того, что точки θ и x разнесены не более, чем на $k+1$ интервалов сетки. Указанное обстоятельство позволяет записать неравенство

$$\left| \int\limits_{\theta}^{x} s^{(k+1)}(\tau)\ d\tau \right| \leqslant (2m-1)\left\|\boldsymbol{\beta}^{k+1}\right\| +\ (m-k-1) \max_{1\leqslant j\leqslant m-k-1} \left\{ \left|\beta^{(k+1)}_{j-2m+k}\right|, \left|\beta^{(k+1)}_{N-j}\right| \right\}. \tag{43}$$

Второе слагаемое в (43) появилось в силу того, что крайние коэффициенты разложения (42) не входят в систему (23), а определяются по явным формулам (24) и (25). И для этого слагаемого справедлива оценка

$$(m-k-1) \max_{1\leqslant j\leqslant m-k-1} \left\{ \left|\beta^{(k+1)}_{j-2m+k}\right|, \left|\beta^{(k+1)}_{N-j}\right| \right\} \leqslant (m-k-1)\bar{h}K_{ab}, \tag{44}$$

так как в силу (24), (25) выполняются неравенства

$$\max_{1\leqslant j\leqslant m-k-1} \left|\beta^{(k+1)}_{j-2m+k}\right| \leqslant \bar{h}K_a, \qquad \max_{1\leqslant j\leqslant m-k-1} \left|\beta^{(k+1)}_{N-j}\right| \leqslant \bar{h}K_b.$$

Из системы уравнений (23) следует, что $\|\boldsymbol{\beta}^{k+1}\| \leqslant \left\|(\boldsymbol{B}^T_{2m-k-1})^{-1}\right\| \, \|\boldsymbol{d}_{k+1}\|$, а для компонент d_i^{k+1} вектора правой части этой системы справедливы оценки

$$\left|d_i^{k+1}\right| = k! \left| f[y_{i+1}, \ldots, y_{i+k+1}] - f[y_i, \ldots, y_{i+k}] \right| =$$

$$= \left| f^{(k)}(\tau_{i+k+1}) - f^{(k)}(\tau_{i+k}) \right| \leqslant (k+1)\ \ \omega\big(f^{(k)}; \bar{h}\big),$$

где τ_j — некоторые точки из интервалов (y_{j-k}, y_j). В результате имеет место неравенство

$$\|\boldsymbol{\beta}^{k+1}\| \leqslant (k+1)\left\|(\boldsymbol{B}^T_{2m-k-1})^{-1}\right\| \, \omega\big(f^{(k)}; \bar{h}\big). \tag{45}$$

Теперь требуемая оценка (29) непосредственно следует из (41), (43), (44) и (45).

Теорема полностью доказана.

Полученные теоремы показывают, что хотя интерполяционные сплайны четной степени по Марсдену и по Субботину — это две совершенно разные конструкции, вопросы сходимости таких сплайнов тесно связаны между собой. Например, поскольку оценка сходимости сплайна степени $2m$ по Марсдену для k-й производной и оценка сходимости сплайна степени $2m$ по Субботину для $(2m-k)$-й производной выражаются через одну и ту же матрицу $\boldsymbol{A}_k$, условия сходимости процессов интерполяции для интерполируемых функций с минимальными требованиями гладкости будут одинаковы, так как, согласно [19], величины $\left\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\right\|$ и $\left\|\left(\boldsymbol{A}_k^T\right)^{-1}\right\|$ для наших ленточных матриц эквивалентны.

1. *Schoenberg I. J., Whitney A.* On Pólya frequency functions, III: The positivity of translation determinants with application to the interpolation problem by spline curves // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – **74**, № 2. – P. 246 – 259.
2. *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972. – 316 с.
3. *Sharma A., Meir A.* Degree of approximation of spline interpolation // J. Math. and Mech. – 1966. – **15**, № 5. – P. 759 – 767.
4. *Субботин Ю. Н.* О кусочно-полиномиальной интерполяции // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 1. – С. 63 – 70.
5. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Добавления // Теория сплайнов и ее приложения / Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. – М.: Мир, 1972. – С. 270 – 309.
6. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. – 248 с.
7. *Marsden M.* Quadratic spline interpolation // Bull. Amer. Math. Soc. – 1974. – **80**, № 5. – P. 903 – 906.
8. *Волков Ю. С.* О построении интерполяционных полиномиальных сплайнов // Вычислит. системы. – Вып. 159. Сплайн-функции и их приложения. – 1997. – С. 3 – 18.
9. *Волков Ю. С.* Вполне неотрицательные матрицы в методах построения интерполяционных сплайнов нечетной степени // Мат. труды. – 2004. – **7**, № 2. – С. 3 – 34.
10. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 359 с.
11. *de Boor C., Pinkus A.* Backward error analysis for totally positive linear systems // Numer. Math. – 1977. – **27**, № 4. – P. 485 – 490.
12. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
13. *de Boor C.* A practical guide to splines. – New York: Springer, 1978. – 392 p.
14. *Волков Ю. С.* О нахождении полного интерполяционного сплайна через B-сплайны // Сиб. электрон. мат. изв. – 2008. – **5**. – С. 334—338.
15. *Volkov Yu. S.* Obtaining a banded system of equations in complete spline interpolation problem via B-spline basis // Cent. Eur. J. Math. – 2012. – **10**, № 1. – P. 352 – 356.
16. *Волков Ю. С.* Исследование сходимости процесса интерполяции для производных полного сплайна // Укр. мат. вісн. – 2012. – **9**, № 2. – С. 278 – 296.
17. *Волков Ю. С., Шевалдин В. Т.* Условия формосохранения при интерполяции сплайнами второй степени по Субботину и по Марсдену // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – **18**, № 4. – С. 145 – 152.
18. *de Boor C., Lyche T., Schumaker L.L.* On calculating with B-splines, II. Integration // Numer. Meth. Approximationstheorie / Int. Ser. Numer. Math. – Basel: Birkhäuser, 1976. – **30**. – P. 123 – 146.
19. *Demko S.* Inverses of band matrices and local convergence of spline projections // SIAM J. Numer. Anal. – 1977. – **14**, № 4. – P. 616 – 619.

Получено 20.08.13