УДК 517.968.2

Н. Б. Енгибарян, А. Г. Барсегян (Ин-т математики НАН Армении, Ереван)

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ СВЕРТКИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

We study the problems of analytic theory and numerical-analytic solution of the integral convolution equation of the second kind

$$\varepsilon^2 f(x) + \int\limits_0^r K(x-t)f(t)dt = g(x)\,, \quad x \in [0,\, r),$$

where

$$\varepsilon > 0, \quad r \leq \infty, \quad K \in L_1\,(-\infty, \infty)\,, \quad K(x) = \int\limits_a^b e^{-|x|s} d\sigma(s) \geq 0.$$

The factorization approach is used and developed. The key role in this approach is played by the V. Ambartsumyan nonlinear equation.

Статтю присвячено питанням аналітичної теорії та чисельно-аналітичного розв'язання інтегрального рівняння згортки другого роду

$$\varepsilon^2 f(x) + \int\limits_0^r K(x-t)f(t)dt = g(x)\,, \quad x \in [0,\, r),$$

де

$$\varepsilon > 0, \quad r \leq \infty, \quad K \in L_1\,(-\infty, \infty)\,, \quad K(x) = \int\limits_a^b e^{-|x|s} d\sigma(s) \geq 0.$$

Застосовується і розвивається факторизаційний підхід, в якому ключову роль відіграє нелінійне рівняння В. Амбарцумяна.

1. Введение. Рассмотрим интегральное уравнение свертки второго рода

$$\varepsilon^2 f(x) + \int\limits_0^r K(x-t)f(t)dt = g(x)\,, \tag{1.1}$$

$$x \in [0,\, r)\,, \ \ \varepsilon > 0\,, \quad 0 < r \leq \infty\,,$$

с четной положительной ядерной функцией $K \in L_1\,(-\infty, \infty)$, представленной в виде суперпозиции экспонент:

$$K(x) = \int\limits_a^b e^{-|x|s} d\sigma(s) \geq 0. \tag{1.2}$$

Здесь σ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию

$$\mu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K\,(x)\,dx = 2\int\limits_a^b \frac{1}{s} d\sigma(s) < +\infty. \tag{1.3}$$

К уравнению (1.1) с ядром (1.2) сводится ряд задач теории линейной оптимальной фильтрации по определению минимальной среднеквадратичной оценки сигнала в рамках фильтров Винера, Колмогорова, Калмана – Бьюси, обобщенного процесса Бутерворта и др. (см. [1 – 3]).

Если σ — ограниченная функция, то функция K непрерывна на всей сомкнутой вещественной оси. В противном случае ядро K имеет интегрируемую особенность в точке 0.

Уравнение второго рода ($\varepsilon > 0$) соответствует случаю белого гауссового шума. При этом основной интерес представляет уравнение (1.1) при малых значениях ε, т. е. когда доля дельта-компоненты (неискаженной части) в белом шуме с ковариацией $\varepsilon^2\delta(x-t)+K(x-t)$ невелика.

Уравнение первого рода (когда $\varepsilon = 0$) соответствует случаю цветного шума. Тихоновский регуляризационный метод основан на замене его уравнением второго рода с малым параметром регуляризации ε^2 (см. [2]).

В [3] изложен метод численного решения уравнения фильтрации в случае белого шума, при $r < \infty$ и $g\,(x) = k\,(r - x)$, в связи с обобщенным процессом Бутерворта. С применением метода инвариантного погружения Беллмана решение семейства уравнений (1.1) с переменным $r < \infty$ сводится к трем задачам типа Коши. Достижением является следующее обстоятельство. Построение резольвентной функции $\Gamma\,(x, t, r)$ от трех переменных заменяется определением трех функций, зависящих от двух переменных, причем эти функции строятся с помощью рекуррентного процесса (путем постепенного увеличения r). Считается, что отмеченный подход позволяет численно решить уравнение с удовлетворительной точностью в реальном масштабе времени. Метод имеет прикладную направленность и не снабжен полными математическими обоснованиями.

Простейшим частным случаем уравнения (1.1) является уравнение с ядром Лалеско

$$\varepsilon^2 f\,(x) + \frac{1}{2}\int\limits_0^r e^{-|x-t|} f\,(t)\,dt\ = g\,(x)\,. \tag{1.4}$$

Уравнение (1.4) легко решается путем сведения к краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Но, с другой стороны, на примере этого тестового уравнения явно демонстрируются те сложности, которые возникают при применении к (1.1) таких известных методов, как метод Бубнова – Галеркина, дискретизация по аргументу x (в том числе в рамках метода инвариантного погружения) и др.

Изложенное свидетельствует о важности разработки адекватных методов решения уравнения в реальном масштабе времени, пригодных при малых значениях ε.

Настоящая работа посвящена вопросам аналитической теории и численно-аналитического решения уравнения (1.1), (1.2) в пространстве $L_2\,(0, r)$ при $\varepsilon > 0$, $r \leq \infty$. Применяется и развивается факторизационный подход, имеющий определенное сходство с методом, анонсированным в работе [4]. В этом подходе ключевую роль играет нелинейное уравнение Амбарцумяна. Указанное уравнение, возникшее в рамках теории переноса излучения, ранее плодотворно применялось в вопросах решения различных классов интегральных уравнений свертки с ядрами, представленными через экспоненты, как на полупрямой, так и на конечном промежутке (см. [5]).

С уравнением (1.1) с ядром (1.2) ассоциируется следующее уравнение Амбарцумяна:

$$\varepsilon\varphi(s) = 1 - \varphi(s) \int\limits_a^b \frac{1}{s+p}\varphi(p)\, d\sigma(p), \quad \varepsilon > 0. \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) отличается от ранее изученных вариантов уравнения Амбарцумяна тем, что оно соответствует отрицательной мере $-\varepsilon^{-2}d\sigma$, причем ограничение на величину ε^{-2} не накладывается.

2. О разрешимости уравнения (1.1). Пусть I — единичный оператор, а $\hat{K}_r$ — интегральный оператор

$$\left(\hat{K}_r f\right)(x) = \int\limits_0^r K(x-t) f(t)\, dt, \qquad x \in [0, r], \;\; r \le \infty, \tag{2.1}$$

с ядерной функцией (1.2). Если $r = \infty$, то $\hat{K} = \hat{K}_\infty$ является оператором Винера – Хопфа.

Пусть E_r — одно из пространств $L_p(0,r)$, $1 \le p \le \infty$, и $C[0,r]$, $r \le \infty$. Под $C[0,\infty]$ понимается пространство функций f, непрерывных на $[0,\infty)$ и имеющих конечный предел $f(\infty)$. Справедлива следующая оценка для нормы оператора $\hat{K}_r$ в любом из пространств E_r:

$$\left\|\hat{K}_r\right\| \le \mu_r = 2\int\limits_0^{r/2} K(x)\, dx, \qquad r \le \infty.$$

Важным свойством интегральных операторов, фигурирующих в линейных уравнениях фильтрации, является их положительность в соответствующем гильбертовом пространстве (см. [2]). Приведем непосредственную проверку положительности оператора $\hat{K}_r$ с ядром (1.2) в $L_2(0,r)$, $r \le \infty$. Этот факт представляет самостоятельный интерес, независимо от приложений в теории фильтрации.

Пусть f принадлежит $L_2(0,r)$. Рассмотрим скалярное произведение

$$\left\langle \hat{K}_r f, f \right\rangle = \int\limits_0^r \int\limits_0^r K(x-t) f(x) f(t)\, dx\, dt.$$

Покажем, что $\left\langle \hat{K}_r f, f \right\rangle \ge 0$. С учетом (1.2) имеем

$$\left\langle \hat{K}_r f, f \right\rangle = \int\limits_a^b d\sigma(p) \int\limits_0^r \int\limits_0^r e^{-|x-t|p} f(x) f(t)\, dx dt = 2\int\limits_a^b d\sigma(p) \int\limits_0^r \int\limits_0^x e^{-(x-t)p} f(x) f(t)\, dx dt.$$

Обозначая $F(x,p) = \int_0^x e^{tp} f(t)\, dt$ и интегрируя по частям, получаем

$$\left\langle \hat{K}_r f, f \right\rangle = 2\int\limits_a^b d\sigma(p) \int\limits_0^r e^{-2xp} F'_x(x,p) F(x,p)\, dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left[e^{-2rp} F^2(r,p) + 2p \int\limits_0^r e^{-2xp} F^2(x,p)\, dx \right] d\sigma(p) \ge 0, \tag{2.2}$$

что и требовалось доказать.

Нетрудно проверить также, что если функция σ непостоянна, то квадратичная форма $\left\langle \hat{K}_r f, f \right\rangle$ положительно определена, т. е. в случае ненулевой функции $f \in L_2\,(0,r)$ в (2.2) имеет место строгое неравенство $\left\langle \hat{K}_r f, f \right\rangle > 0$.

Из положительности оператора $\hat{K}_r$ в $L_2\,(0,r)$ следует, что его спектр сосредоточен в $[0,\infty)$, поэтому оператор $\varepsilon^2 I + \hat{K}_r$ обратим в $L_2\,(0,r)$ для любого $\varepsilon > 0$.

При $r < \infty$ оператор $\hat{K}_r$ вполне непрерывный в $L_2\,(0,r)$, все его собственные значения положительны.

Мы приходим к тому известному факту, что при $g \in L_2\,(0,r)$ уравнение (1.1) имеет единственное решение в $L_2\,(0,r)$, сколь малой бы не было число $\varepsilon > 0$.

3. Уравнения типа восстановления. В настоящем пункте приводятся некоторые вспомогательные факты (см., например, [5]), примененные к рассматриваемому случаю, по треугольным (формально вольтерровым) уравнениям свертки.

Пусть $V_\pm \in L_1^+ = L_1\,(0,\infty)$. Введем следующие треугольные операторы $\hat{V}_\pm$ на положительной полуоси:

$$\begin{aligned} \left(\hat{V}_+ f\right)(x) &= \int_0^x V_+(x-t) f(t)\,dt\,, \quad x > 0, \\ \left(\hat{V}_- f\right)(x) &= \int_x^\infty V_-(t-x) f(t)\,dt\,, \quad x > 0, \end{aligned} \qquad V_\pm \in L_1^+. \tag{3.1}$$

Рассмотрим уравнения

$$\left(\varepsilon I + \hat{V}_+\right) f = g, \tag{3.2}$$

$$\left(\varepsilon I + \hat{V}_-\right) f = g, \tag{3.3}$$

где $\varepsilon > 0, \quad g \in E^+ = E_\infty$.

Для уравнений (3.2) и (3.3) будем использовать названия „нижнее уравнение восстановления" и „верхнее уравнение восстановления" соответственно.

Рассмотрим следующие нижние уравнения восстановления:

$$\varepsilon \Phi_\pm\,(x) = V_\pm\,(x) - \int_0^x V_\pm\,(x-t)\,\Phi_\pm\,(t)\,dt. \tag{3.4}$$

Каждое из уравнений (3.4) имеет единственное локально интегрируемое на $[0,\infty)$ решение. Для обратимости в E^+ оператора $\varepsilon I + \hat{V}_+$ (или $\varepsilon I + \hat{V}_-$) необходимо и достаточно, чтобы

$$\Phi_+ \in L_1^+ (\text{ или } \Phi_- \in L_1^+). \tag{3.5}$$

При выполнении условий (3.5)

$$\left(\varepsilon I + \hat{V}_\pm\right)^{-1} = \varepsilon^{-1}\left(I - \hat{\Phi}_\pm\right), \tag{3.6}$$

где операторы $\hat{\Phi}_\pm$ определяются посредством формул

$$\left(\hat{\Phi}_+ f\right)(x) = \int\limits_0^x \Phi_+(x-t)f(t)dt, \qquad \left(\hat{\Phi}_- f\right)(x) = \int\limits_x^\infty \Phi_-(t-x)f(t)dt, \qquad x > 0. \tag{3.7}$$

Заметим, что через оператор $I - \hat{\Phi}_+$ выражается единственное локально интегрируемое решение уравнения (3.2) независимо от выполнения условия (3.5). Уравнение (3.3) аналогичного свойства не имеет.

Рассмотрим уравнения (3.4) в случае, когда ядерные функции $V_\pm$ имеют вид

$$V_\pm(x) = \int\limits_a^b e^{-xs} d\rho_\pm(s) \geq 0, \;\; x > 0, \tag{3.8}$$

где $\rho_\pm$ — неубывающие функции, причем

$$\gamma_\pm \equiv \int\limits_0^\infty V_\pm(x)\, dx = \int\limits_a^b \frac{1}{s} d\rho_\pm(s) < +\infty\,. \tag{3.9}$$

Имеет место следующая теорема, которая непосредственно следует из основной теоремы работы [6].

Теорема A. *Пусть $V_\pm$ имеют вид* (3.8)*. Тогда уравнения* (3.4) *имеют решения $\Phi_\pm \in L_1^+$ и справедливы формулы* (3.6)*. Функции $\Phi_\pm$ допускают представления*

$$\Phi_\pm(x) \; = \int\limits_a^c e^{-xp} d\omega_\pm(p)\,, \qquad b \leq c \leq \infty, \tag{3.10}$$

где $\omega_\pm$ — неубывающие функции. Имеют место равенства

$$\int\limits_a^c \frac{1}{p} d\omega_\pm(p) = \frac{\gamma_\pm}{\varepsilon + \gamma_\pm}\,. \tag{3.11}$$

В [6] приведен способ приближенного построения представления (3.10) в виде конечного линейного агрегата экспонент.

4. Факторизация уравнения (1.1) на полуоси и уравнение Амбарцумяна. При $r = \infty$ (1.1) обращается в уравнение Винера – Хопфа:

$$\varepsilon^2 f(x) + \int\limits_0^\infty K(x-t)f(t)dt = g(x)\,. \tag{4.1}$$

Будем рассматривать уравнение (1.1) в более общем случае, когда ядро K может быть несимметричным и имеет вид

$$K_\pm(x) \equiv K(\pm x) = \int\limits_a^b e^{-xs} d\sigma_\pm(s) \geq 0, \quad x > 0, \tag{4.2}$$

где $\sigma_\pm$ — неубывающие функции на (a, b), такие, что

$$\int_a^b \frac{1}{s} d\sigma_{\pm}(s) < \infty . \tag{4.3}$$

Пусть $\hat{K} = \hat{K}_\infty$ — интегральный оператор Винера – Хопфа (оператор вида (2.1) при $r = \infty$) с ядром (4.2). Рассмотрим следующую факторизацию типа Винера – Хопфа:

$$\varepsilon^2 I + \hat{K} = \left(\varepsilon I + \hat{V}_-\right)\left(\varepsilon I + \hat{V}_+\right), \tag{4.4}$$

где $\hat{V}_\pm$ — искомые операторы свертки вида (3.1).

Нами будет построена каноническая факторизация (4.4), при которой $\varepsilon I + \hat{V}_\pm$ обратимы в пространствах E^+. Каноническая факторизация единственна (см. [7]).

Существует простая связь между факторизацией (4.4) и уравнением Амбарцумяна (см. [5]). Приведем несимметричную форму уравнения Амбарцумяна (1.5), представляющую собой нелинейную систему относительно (φ_+, φ_-):

$$\varepsilon\varphi_\pm(s) = 1 - \varphi_\pm(s) \int_a^b \frac{1}{s+p} \varphi_\mp(p)\, d\sigma_\mp(p) . \tag{4.5}$$

Введем в рассмотрение B-пространство $L_1\left(\frac{1}{s} d\sigma_+(s)\right)$ функций φ, интегрируемых по мере $\frac{1}{s} d\sigma_+(s)$, с конечной нормой $\int_a^b |\varphi(s)| \frac{1}{s} d\sigma_+(s)$. Аналогично определяется B-пространство $L_1\left(\frac{1}{s} d\sigma_-(s)\right)$.

Из условия (4.3) следует, что если функция φ ограничена на (a, b), то $\varphi \in L_1\left(\frac{1}{s} d\sigma_\pm(s)\right)$, т. е. $M(a,b) \equiv L_\infty(a,b) \subset L_1\left(\frac{1}{s} d\sigma_\pm(s)\right)$.

Если уравнение Амбарцумяна (4.5) имеет решение

$$(\varphi_+, \varphi_-) \in L_1\left(\frac{1}{s} d\sigma_+(s)\right) \times L_1\left(\frac{1}{s} d\sigma_-(s)\right),$$

то имеет место факторизация (4.4), где (см. [5])

$$V_\pm(x) = \int_a^b e^{-xs} \varphi_\pm(s)\; d\sigma_\pm(s) \in L_1^+ . \tag{4.6}$$

Из (4.4) и (4.6) следуют формулы

$$\varphi_\pm(s) = \left[\varepsilon + \bar{V}_\mp(s)\right]^{-1}, \tag{4.7}$$

где $\bar{V}_\pm$ — суть преобразования Лапласа от $V_\pm$.

Предположим дополнительно, что $\varphi_\pm \geq 0$. Тогда ядра $V_\pm$ допускают представления вида (3.8) с положительными мерами

$$d\rho_\pm(s) = \varphi_\pm(s)\ d\sigma_\pm(s)\,.$$

Поэтому согласно теореме A операторы $\varepsilon I + \hat{V}_\pm$, фигурирующие в факторизации (4.4), обратимы, а сама факторизация каноническая. Из единственности канонической факторизации и формулы (4.7) следует единственность положительного ограниченного решения уравнения (4.5). Для резольвентных функций $\Phi_\pm$ операторов $\varepsilon I + \hat{V}_\pm$ имеют место представления вида (3.10) (с неубывающими функциями $\omega_\pm$).

Рассмотрим теперь случай четной функции K, когда $\sigma_\pm = \sigma$ в (4.2). Тогда система (4.5) сводится к скалярному уравнению (1.5) в следующем смысле: если $\varphi \in L_1\left(\frac{1}{s} d\sigma(s)\right)$ — решение уравнения (1.5), то $\varphi_+ = \varphi_- = \varphi$ является решением системы (4.5). Заметим, что при $\sigma_\pm = \sigma$ уравнение (1.5) может иметь несимметричное решение, такое, что $\varphi_+ \neq \varphi_-$. Тогда соответствующая факторизация (4.4) не будет канонической.

Лемма. 1. *Если существует ограниченное положительное решение* (φ_+, φ_-) *системы* (4.5), *то оно единственно и порождает каноническую факторизацию* (4.4) *по формулам* (4.6). *Резольвентные функции* $\Phi_\pm$ *операторов* $\varepsilon I + \hat{V}_\pm$ *допускают представления* (3.10).

2. *В симметричном случае* $\sigma_\pm = \sigma$ *справедливо равенство*

$$\varphi_+ = \varphi_- = \varphi, \quad V_\pm(x) = V(x) = \int\limits_a^b e^{-xs} \varphi(s) d\sigma(s), \tag{4.8}$$

где φ *удовлетворяет уравнению Амбарцумяна* (1.5).

3. *Имеет место равенство*

$$\gamma \equiv \int\limits_0^\infty V(x)dx = \int\limits_a^b \frac{1}{s} \varphi(s) d\sigma(s) = \sqrt{\varepsilon^2 + \mu} - \varepsilon\,. \tag{4.9}$$

Доказательство. Утверждение 1 доказано выше. Прямой проверкой убеждаемся, что если в случае $\sigma_\pm = \sigma$ пара (φ_+, φ_-) удовлетворяет системе (4.5), то ей удовлетворяет также пара (φ_-, φ_+), которой соответствует каноническая факторизация вида (4.4). Из единственности канонической факторизации следует утверждение 2 леммы. Для получения равенства (4.9) воспользуемся тем, что равенство (4.4) эквивалентно следующей факторизации символа $\varepsilon^2 + \bar{K}(s)$ оператора $\varepsilon^2 I + \hat{K}$ (см., например, [5]):

$$\varepsilon^2 + \bar{K}(s) = \left(\varepsilon + \bar{V}_-(s)\right)\left(\varepsilon + \bar{V}_+(s)\right), \tag{4.10}$$

где $\bar{K}, \bar{V}_\pm$ — суть преобразования Фурье от $K, V_\pm$.

Полагая в (4.10) $s = 0$, с учетом (1.3) получаем $\varepsilon^2 + \mu = (\varepsilon + \gamma)^2$, откуда приходим к равенству (4.9).

Лемма доказана.

Обозначим через $T(\sigma_\pm) \subset L_1\left(\frac{1}{s} d\sigma_\pm(s)\right)$ конусы положительных функций из $L_1\left(\frac{1}{s} d\sigma_\pm(s)\right)$.

Пусть $T_1 \subset C[a,b]$ — множество (конусный отрезок) неотрицательных функций φ, непрерывных на компакте $[a,b] \subset [0,\infty]$ и удовлетворяющих условию

$$0 \le \varphi(s) \le \varepsilon^{-1}.$$

Имеем $T_1 \subset T(\sigma_\pm) \left(\subset L_1 \left(\frac{1}{s} d\sigma_\pm(s) \right) \right)$.

Следствие. *Решение* $(\varphi_+, \varphi_-) \in T_1 \times T_1$ *уравнения Амбарцумяна* (4.5) *порождает каноническую факторизацию* (4.4). *Если уравнение* (4.5) *имеет решение* $(\varphi_+, \varphi_-) \in T_1 \times T_1$, *то оно единственное в* $T(\sigma_+) \times T(\sigma_-)$.

5. Построение основного решения уравнений Амбарцумяна (4.5) и (1.5). Нашей ближайшей целью является построение решения $(\varphi_+, \varphi_-) \in T_1 \times T_1$ уравнения (4.5) и тем самым построение канонической факторизации (4.4) по формулам (4.6).

Рассмотрим уравнение (4.5), которое соответствует представлению (4.2) ядра. Введем в рассмотрение следующие линейные $G_\pm$ и нелинейные $Q_\pm$ операторы:

$$G_\pm \varphi(s) = \int\limits_a^b \frac{1}{s+p} \varphi(p)\, d\sigma_\pm(p),$$

$$Q_\pm \varphi(s) = \left[\varepsilon + \int\limits_a^b \frac{1}{s+p} \varphi(p)\, d\sigma_\pm(p) \right]^{-1}.$$

Операторы $G_\pm$ непрерывно по норме $L_1 \left(\frac{1}{s} d\sigma_\pm(s) \right)$ переводят $T(\sigma_\pm) \subset L_1 \left(\frac{1}{s} d\sigma_\pm(s) \right)$ в $T_1 \subset T(\sigma_\pm)$, а $Q^\pm$ — монотонно убывающие (по соответствующим конусам) непрерывные операторы, переводящие $T(\sigma_\pm)$ в T_1. Запишем систему (4.5) в виде

$$\varphi^+ = Q^-\left(\varphi^-\right), \qquad \varphi^- = Q^+\left(\varphi^+\right). \tag{5.1}$$

Для построения решения системы (4.1) рассмотрим итерационный процесс

$$\begin{gathered} \varphi_{n+1}^+ = Q^-\left(\varphi_n^-\right), \\ \varphi_n^- = Q^+\left(\varphi_n^+\right), \\ \varphi_0^+ = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{5.2}$$

Итерации (5.2) определяют последовательности $\varphi_n^\pm \subset T_1$, следовательно, $0 \le \varphi_n^\pm(s) \le \varepsilon^{-1}$. Легко проверить, что последовательность φ_n^+ возрастает, а φ_n^- убывает. Из монотонности и ограниченности этих последовательностей в $T(\sigma_\pm)$ в силу полной правильности конусов $T(\sigma_\pm)$ следует сходимость $\varphi_n^\pm$ в $L_1 \left(\frac{1}{s} d\sigma_\pm(s) \right)$: $\varphi_n^\pm \to \varphi^\pm \in T(\sigma_\pm)$. В силу непрерывности операторов $Q^\pm$ в $L_1 \left(\frac{1}{s} d\sigma_\pm(s) \right)$ в соотношениях (5.2) можно выполнить предельный переход. Следовательно, построенная пара $(\varphi_+, \varphi_-) \in L_1 \left(\frac{1}{s} d\sigma_+(s) \right) \times L_1 \left(\frac{1}{s} d\sigma_-(s) \right)$ является решением системы (5.1). Поскольку операторы $Q^\pm$ переводят $T(\sigma_\pm)$ в $T_1 \subset T(\sigma_\pm)$, то $\varphi^\pm \in T_1$. Из непрерывности $\varphi^\pm$ и теоремы Дини следует, что монотонные сходимости $\varphi_n^\pm \to \varphi^\pm \in T_1$ равномерны.

По формулам (4.6) функции Амбарцумяна $\varphi^{\pm}$ порождают факторизацию (4.4). Согласно доказанной лемме, построенная факторизация является (единственной) канонической факторизацией.

Рассмотрим теперь другой итерационный процесс для (5.1), несколько отличный от (5.2):

$$\begin{gathered} \psi_n^+ = Q^-\left(\psi_n^-\right), \\ \psi_{n+1}^- = Q^+\left(\psi_n^+\right), \\ \psi_0^- = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{5.3}$$

Аналогично итерациям (5.2) показывается, что $\psi_n^{\pm} \to \psi^{\pm} \in T_1$, причем последовательность ψ_n^- возрастает, а ψ_n^+ убывает. В силу единственности решения (4.5) (см. лемму) приходим к равенству $\psi^{\pm} = \varphi^{\pm}$.

Перейдем к рассмотрению итераций (5.2) в симметричном случае $\sigma_{\pm} = \sigma$. Тогда, очевидно, $\varphi_n^{\pm} = \psi_n^{\mp}$, следовательно, $\varphi^{\pm} = \psi^{\mp} = \varphi^{\mp} = \varphi$ и φ удовлетворяет скалярному уравнению (1.5).

Пусть Q — следующий оператор:

$$Qf\left(s\right) = \left[\varepsilon + \int\limits_a^b \frac{1}{s+p} f\left(p\right) d\sigma\left(p\right)\right]^{-1}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Рассмотрим последовательность φ_n, определяемую следующим образом:

$$\varphi_{n+1} = Q\left(\varphi_n\right), \qquad \varphi_0 = 0, \qquad n = 0, 1, \ldots . \tag{5.4}$$

Исходя из свойств рассмотренных выше последовательностей $\varphi_n^{\pm}$ и $\psi_n^{\mp}$, заключаем, что подпоследовательности φ_{2n} и φ_{2n+1} сверху и снизу сходятся к φ. Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема. 1. *Уравнение Амбарцумяна* (4.5) *имеет единственное решение* (φ^+, φ^-) *в* $T_1 \times T_1$. *К этому решению в пространстве* $L_1\left(\frac{1}{s} d\sigma_+(s)\right) \times L_1\left(\frac{1}{s} d\sigma_-(s)\right)$ *равномерно сходятся как итерационные последовательности* $(\varphi_n^+, \varphi_n^-)$, *так и* (ψ_n^+, ψ_n^-) (*определяемые из* (5.2) *и* (5.3)).

2. *В симметричном случае* $\sigma_{\pm} = \sigma$ *итерации* φ_n, *определяемые согласно* (5.4), *сходятся к решению* $\varphi \in T_1$ *уравнения* (1.5) *как по норме пространства* $L_1\left(\frac{1}{s} d\sigma\left(s\right)\right)$, *так и равномерно. Четная и нечетная подпоследовательности* φ_{2n} *и* φ_{2n+1} *сходятся к* φ *снизу и сверху соответственно. Функция* φ *порождает каноническую факторизацию* (4.4), *где*

$$\left(\hat{V}_+ f\right)(x) = \int\limits_0^x V(x-t) f(t) dt, \qquad \left(\hat{V}_- f\right)(x) = \int\limits_x^\infty V(t-x) f(t) dt. \tag{5.5}$$

Их общая ядерная функция V *вполне монотонна и имеет вид*

$$V\left(x\right) = \int\limits_a^b e^{-xs} \varphi\left(s\right) d\sigma\left(s\right) \in L_1\left(0, \infty\right). \tag{5.6}$$

6. Решение уравнения Винера – Хопфа (4.1). Факторизация (4.4) сводит уравнение (4.1) к последовательному решению следующих двух уравнений:

$$\left(\varepsilon I + \hat{V}_-\right) F = g, \tag{6.1}$$

$$\left(\varepsilon I + \hat{V}_+\right) f = F. \tag{6.2}$$

Эти уравнения могут быть решены с использованием обратных операторов $\left(\varepsilon I + \hat{V}_\pm\right)^{-1} = \varepsilon^{-1}\left(I - \hat{\Phi}_\pm\right)$ (см. (3.1)), где $\hat{\Phi}_\pm$ имеют вид (3.7). Резольвентные функции $\Phi_\pm$ определяются из уравнений (3.4) и имеют представления (3.10). В симметричном случае имеем

$$\left(\hat{\Phi}_+ f\right)(x) = \int\limits_0^x \Phi(x-t) f(t)\, dt, \quad \left(\hat{\Phi}_- f\right)(x) = \int\limits_x^\infty \Phi(t-x) f(t)\, dt,$$

где резольвентная функция Φ определяется из уравнения (см. (3.4))

$$\varepsilon\Phi(x) = V(x) - \int\limits_0^x V(x-t)\,\Phi(t)\, dt. \tag{6.3}$$

Имеет место формула

$$\Phi(x) \ = \int\limits_a^c e^{-xp} d\omega(p)\,, \qquad b \le c \le \infty, \tag{6.4}$$

где ω — неубывающая функция. Используя (3.11) и (4.9), получаем

$$\int\limits_a^c \frac{1}{p} d\omega(p) = \frac{\gamma}{\varepsilon + \gamma} = 1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \mu}}. \tag{6.5}$$

На основании вышеизложенного сформулируем следующую схему решения уравнения (4.1) на полупрямой с симметричным ядром (1.2):

***Шаг* 1.** Итерациями (5.4) строится функция φ.

***Шаг* 2.** Определяется функция V по формуле (4.8).

***Шаг* 3.** Резольвентная функция Φ определяется в виде представления (6.4) с использованием метода работы [6].

Решение уравнения (4.1) при $\sigma_\pm = \sigma$ дается формулой

$$f = \varepsilon^{-1}\left(I - \hat{\Phi}_+\right) F, \quad \text{где} \quad F = \varepsilon^{-1}\left(I - \hat{\Phi}_-\right) g.$$

7. Уравнения (1.1) на конечном промежутке. Результаты предыдущих пунктов представляют собой распространение метода уравнения Амбарцумяна на уравнения Винера – Хопфа с отрицательным ядром, представленным через экспоненты. Ниже мы будем искать решение уравнения (1.1) на конечном промежутке, с использованием функции φ.

Попытки использовать функцию Амбарцумяна при решении интегрального уравнения переноса излучения в слое конечной толщины $r < +\infty$ имеют долгую историю. Точные результаты в данном направлении впервые были получены в работе [8].

В работе [9] была развита факторизационная трактовка метода из [8]. Такой подход значительно расширяет возможности метода. В настоящем пункте указанный факторизационный подход распространяется на уравнение (1.1) с ядром (1.2).

Рассмотрим уравнение (1.1), (1.2) при $r < \infty$ и $g \in L_2(0,r)$. Аналогично [9] уравнение (1.1) заменяется следующей системой относительно (f, F):

$$\varepsilon^2 F(x) + \int\limits_0^r K(x-t)\, f(t)\, dt = 0, \qquad x > r, \tag{7.1}$$

$$\varepsilon f\ (x) = g_1(x) - \int\limits_0^x V(x-t)\, f(t)\ dt + \varepsilon \int\limits_r^\infty \Phi(t-x)\, F(t)\, dt, \qquad 0 \le x \le r, \tag{7.2}$$

где

$$g_1(x) = \varepsilon^{-1} g(x) - \varepsilon^{-1} \int\limits_x^r \Phi(t-x) g(t) dt \in L_2(0,r).$$

Из результатов [9] следует, что уравнение (1.1) и система (7.1), (7.2) эквивалентны в следующем смысле:

1. Пусть пара $(f, F) \in L_2(0,r) \times L_2(r,\infty)$ удовлетворяет системе (7.1), (7.2). Тогда функция f является (единственным) решением уравнения (1.1).

2. Пусть функция $f \in L_2(0,r)$ является решением (1.1). Определим функцию $F \in L_2(r,\infty)$ как продолжение f на (r,∞) по формуле (7.1). Тогда пара (f, F) удовлетворяет системе (7.1), (7.2) и является ее единственным решением в $L_2(0,r) \times L_2(r,\infty)$.

Из (7.1) и принадлежности $f \in L_2(0,r)$, $r < \infty$, следует, что

$$F \in L_2(r,\infty) \cap L_1(r,\infty). \tag{7.3}$$

В случае ядра (1.2), используя представление (6.4) для Φ, получаем

$$g_1(x) = \varepsilon^{-1} g(x) - \varepsilon^{-1} \int\limits_a^c e^{xp} d\omega_-(p) \int\limits_x^r e^{-tp} g(t)\, dt. \tag{7.4}$$

Система (7.1), (7.2) допускает разделение переменных, в чем мы убедимся ниже.

8. Преобразование системы (7.1), (7.2). Подставляя в (7.1), (7.2) вместо Φ и K их выражения из формул (6.4) и (1.2), получаем

$$\varepsilon f\ (x) = g_1(x) - \int\limits_0^x V(x-t)\ f(t)\ dt + \varepsilon \int\limits_a^c e^{-(r-x)\,p} \beta(p)\ d\omega(p), \tag{8.1}$$

$$\varepsilon^2 F(x) = -\int\limits_a^b e^{-(x-r)\,s}\, \alpha(s)\, d\sigma(s). \tag{8.2}$$

Здесь

$$\alpha(s) = \int_0^r e^{-(r-t)\,s} f(t)\,dt, \qquad \beta(s) = \int_r^\infty e^{-(t-r)s} F(t)\,dt. \tag{8.3}$$

Из $f \in L_2(0,r)$ и $F \in L_2(r,\infty) \cap L_1(r,\infty)$ следует, что

$$\alpha\,,\ \beta \in C_0\,[0\,,\,\infty)\,, \tag{8.4}$$

где $C_0\,[0\,,\,\infty)$ — пространство функций, непрерывных на $[0,\infty)$ и стремящихся к 0 в ∞.

Ниже будет получена система интегральных уравнений относительно функций α и β.

Решая уравнение восстановления (8.1) относительно f, получаем

$$f(x) = g_2(x) + \int_a^c U(x,p)\,\beta(p)\,d\omega(p)\,, \tag{8.5}$$

где

$$g_2(x) = \varepsilon^{-1} g_1\ (x) - \varepsilon^{-1} \int_0^x \Phi\ (x-t)\,g_1\ (t)\ dt, \tag{8.6}$$

$$U\ (x,p) = e^{-(r-x)p} \left[1 - \int_0^x \Phi(t)\ e^{-t\,p}\,dt\right]. \tag{8.7}$$

Умножая обе части уравнения (8.2) на $e^{-(x-r)\,s}$ и интегрируя по x от r до ∞, имеем

$$\varepsilon^2 \beta(p) = -\int_a^b \frac{\alpha(s)}{s+p}\ d\sigma(s)\ . \tag{8.8}$$

Умножая уравнение (8.5) на $e^{-(r-x)\,s}$ и интегрируя по x от 0 до r, получаем второе соотношение между функциями α и β:

$$\alpha\ (s) = \alpha_0(s) + \int_0^b W(s,p)\,\beta(p)\ d\omega(p)\,, \tag{8.9}$$

где

$$\alpha_0(s) = \int_0^r e^{-(r-t)\,s}\,g_2(t)\ dt, \tag{8.10}$$

$$W(s,p) = \int_0^r e^{-(r-t)\,s}\,U(t,p)\ dt. \tag{8.11}$$

Формула (8.7) приводит к следующему выражению для функции W:

$$W(s,p) = \frac{1}{s+p}\left[A(p) - e^{-r\,p}\,B(s)\right], \tag{8.12}$$

где

$$A(p) = 1 - \int_0^r \Phi(t)\, e^{-tp}\, dt, \quad B(p) = e^{-rp}\left(1 + \int_0^r \Phi(t)\, e^{tp}\, dt\right). \tag{8.13}$$

Нами получена система интегральных уравнений (8.8), (8.9) относительно α, β. Эта система имеет единственное решение $(\alpha,\ \beta)$ в $C_0\,[0,\infty) \times C_0\,[0,\infty)$. Через это решение по формуле (8.5) определяется решение $f \in L_2\,(0,r)$ исходного уравнения (1.1).

Теперь можно сформулировать следующую схему решения уравнения (1.1) с ядром (1.2) при $r < \infty$. Первые три шага этой схемы идентичны с процедурой решения уравнения Винера – Хопфа (4.1), изложенной в конце п. 6. Продолжим эту процедуру.

***Шаг* 4.** Определяются функции g_1 , g_2 и U по формулам (7.4), (8.6), (8.7) соответственно.

***Шаг* 5.** Решением системы (8.8), (8.9) находятся функции α и β.

***Шаг* 6.** По формуле (8.5) определяется решение f уравнения (1.1).

9. Вычислительные аспекты. Схематически опишем численный метод решения уравнения (1.1) на полупрямой и на конечном промежутке, основанный на результатах настоящей работы.

С использованием метода работы [10] ядерная функция K заменяется конечным линейным агрегатом экспонент:

$$K(x) \approx K_N(x) = \sum_{m=1}^{N} a_m \exp\left(-s_m\,|x|\right), \qquad a_m > 0, \qquad 0 < s_1 < \ldots < s_N. \tag{9.1}$$

При этом обеспечивается требуемая близость функций K и K_N по норме L_1. Замена K на K_N эквивалентна замене функции σ ступенчатой функцией σ_N вида

$$\sigma(s) \approx \sigma_N(s) = \sum_{m=1}^{N} a_m \theta(s - s_m), \tag{9.2}$$

где θ — функция Хевисайда единичного скачка.

В результате дискретизации (9.2):

а) уравнение Амбарцумяна (1.5) обращается в конечную нелинейную систему

$$\varepsilon\varphi_m = 1 - \varphi_m \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k \varphi_k}{s_m + s_k}\,,$$

которая легко решается простыми итерациями;

б) функция V, заданная посредством (4.8), заменяется конечной суммой

$$V(x) \approx V_N(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k \exp\left(-s_k x\right);$$

в) резольвентная функция Φ строится в виде конечной суммы [6]

$$\Phi(x) \approx \Phi_N(x) = \sum_{m=1}^{N} b_m \exp\left(-p_m x\right),$$

где $b_m > 0,\ \ m = 1, 2, \ldots, N$, числа $\{p_m\}$ расположены в таком порядке:

$$s_1 < p_1 < s_2 < p_2 < \ldots < s_N < p_N;$$

г) система (8.8), (8.9) обращается в конечную линейную алгебраическую систему.

Вопрос оценок погрешностей мы в настоящей работе не рассматриваем.

1. *Браммер К., Зиффлинг Г.* Фильтр Калмана – Бьюси: детерминированное наблюдение и стохастическая фильтрация. – М.: Наука, 1982. – 200 с.
2. *Колос М. В., Колос И. В.* Методы оптимальной линейной фильтрации. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000. – 102 с.
3. *Касти Дж., Калаба Р.* Методы погружения в прикладной математике. – М.: Мир, 1976. – 223 с.
4. *Енгибарян Б. Н.* Уравнение Винера – Хопфа с отрицательным ядром // Второе рос.-арм. сов. по мат. физике, комплексному анализу и смежным вопросам: Тезисы докл. – М., 2008. – С. 33 – 34.
5. *Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б.* Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техники. Мат. анализ / ВИНИТИ. – 1984. – **22**. – С. 175 – 244.
6. *Барсегян А. Г.* Уравнения типа восстановления с вполне монотонным ядром // Изв. НАН Армении. Математика. – 2004. – **39**, № 3. – С. 13 – 20.
7. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. – М.: Мир, 1979. – 495 с.
8. *Енгибарян Н. Б., Мнацаканян М. А.* Об одном интегральном уравнении с разностным ядром // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 6. – С. 927 – 932.
9. *Барсегян А. Г.* Интегральное уравнение с суммарно-разностным ядром на конечном промежутке // Изв. НАН Армении. Математика. – 2005. – **40**, № 3. – С. 22 – 32.
10. *Енгибарян Н. Б., Мелконян Э. А.* О методе дискретных ординат // Докл. АН СССР. – 1987. – **292**, № 2. – С. 322 – 326.

Получено 14.01.12