УДК 517.9

Н. В. Скрипник (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова)

УСРЕДНЕНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С НЕЧЕТКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

We substantiate the possibility of application of the method of averaging on a finite interval for impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand sides containing a small parameter. In the case of periodic right-hand sides, it is shown that the estimate can be improved.

Наведено обґрунтування можливості застосування методу усереднення на скінченному проміжку до імпульсних диференціальних включень із нечіткою правою частиною, що містять малий параметр. Показано, що у випадку періодичних правих частин оцінку можна уточнити.

1. Введение. Теория нечетких множеств начала развиваться с 1965 г. после работы L. A. Zadeh [18] в результате обобщения, переосмысления достижений: многозначной логики, позволившей перейти к произвольному множеству значений истинности (трехзначная логика Лукасевича, k-значная логика Поста, бесконечнозначная логика); теории вероятностей и математической статистики, где аккумулируются всевозможные способы обработки экспериментальных данных (гистограммы, функции распределения) и указываются пути формализации неопределенностей; дискретной математики (теория матриц, теория автоматов, теория графов); многозначного анализа, предложившего инструмент для формулирования адекватных моделей при решении множества практических задач. Формализации нечетких понятий позволяют приближенно описывать поведение систем настолько сложных и плохо определенных, что они не поддаются точному математическому анализу. В ряде случаев такое описание является единственно возможным, так как в реальных ситуациях закономерности, ограничения, критерии выбора в большей части субъективны и точно не определены (см. обзоры [3, 4, 8]).

Пусть $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ — метрическое пространство непустых компактных выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа

$$h(F,G)=\max\left\{\sup_{f\in F}\inf_{g\in G}\|f-g\|,\sup_{g\in G}\inf_{f\in F}\|f-g\|\right\},$$

где под $\|\cdot\|$ понимается евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Введем в рассмотрение пространство $\mathbb{E}^n$ отображений $x\colon\mathbb{R}^n\to[0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) x нормально, т. е. существует вектор $y_0\in\mathbb{R}^n$ такой, что $x(y_0)=1$;

2) x нечетко выпукло, т. е. для любых $y,z\in\mathbb{R}^n$ и любого $\lambda\in[0,1]$ выполняется неравенство $x(\lambda y+(1-\lambda)z)\geq\min\{x(y),x(z)\}$;

3) x полунепрерывно сверху по Бэру, т. е. для любого вектора $y_0\in\mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(y_0,\varepsilon)>0$ такое, что для всех $y\in\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $\|y-y_0\|<\delta$, выполняется неравенство $x(y)<x(y_0)+\varepsilon$;

4) замыкание множества $\{y\in\mathbb{R}^n : x(y)>0\}$ компактно.

Нулем в пространстве $\mathbb{E}^n$ является отображение $\hat{0}(y)=\begin{cases}1, & y=0,\\ 0, & y\in\mathbb{R}^n\backslash 0.\end{cases}$

Определение 1. *α-Срезкой $[x]^\alpha$ отображения $x \in \mathbb{E}^n$ при $\alpha \in (0,1]$ назовем множество $\{y \in \mathbb{R}^n : x(y) \geq \alpha\}$. Нулевой срезкой отображения $x \in \mathbb{E}^n$ назовем замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n : x(y) > 0\}$.*

Теорема 1 [14]. *Если $x \in \mathbb{E}^n$, то*:

1) $[x]^\alpha \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ *для всех* $\alpha \in [0,1]$;

2) $[x]^{\alpha_2} \subset [x]^{\alpha_1}$ *для всех* $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$;

3) *если* $\{\alpha_k\} \subset [0,1]$ *— неубывающая последовательность, сходящаяся к* $\alpha > 0$, *то* $[x]^\alpha = \bigcap\limits_{k\geq 1} [x]^{\alpha_k}$.

Наоборот, если $\{A^\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ — семейство подмножеств $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям 1–3, то существует $x \in \mathbb{E}^n$ такое, что $[x]^\alpha = A^\alpha$ для $\alpha \in (0,1]$ и $[x]^0 = \overline{\bigcup\limits_{0<\alpha\leq 1} A^\alpha} \subset A^0$.

Определим в пространстве $\mathbb{E}^n$ метрику $D : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to [0,+\infty)$, положив

$$D(x,v) = \sup_{\alpha\in[0,1]} h([x]^\alpha, [v]^\alpha).$$

Пусть I — промежуток в $\mathbb{R}$.

Определение 2 [14]. *Отображение $F : I \to \mathbb{E}^n$ называется непрерывным на I, если для всех $\alpha \in [0,1]$ многозначное отображение $[F(t)]^\alpha$ непрерывно.*

Определение 3 [14]. *Интегралом от отображения $F : I \to \mathbb{E}^n$ по множеству I называется элемент $G \in \mathbb{E}^n$ такой, что $[G]^\alpha = \int_I [F(t)]^\alpha dt$ для всех $\alpha \in (0,1]$, где интеграл от многозначного отображения $[F(t)]^\alpha$ понимается в смысле Ауманна* [7].

Теорема 2 [14]. *Если отображение $F : I \to \mathbb{E}^n$ непрерывно, то оно интегрируемо на I.*

Определение 4 [14]. *Говорят, что отображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n$ удовлетворяет условию Липшица по x, если существует постоянная $\lambda \geq 0$ такая, что*

$$h\Big([F(t,x)]^\alpha, [F(t,\bar{x})]^\alpha\Big) \leq \lambda \|x - \bar{x}\|$$

для всех $\alpha \in [0,1]$.

Определение 5. *Говорят, что отображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n$ вогнутозначно по x, если*

$$\beta\big[F(t,x)\big]^\alpha + (1-\beta)\big[F(t,y)\big]^\alpha \subset \big[F(t, \beta x + (1-\beta)y)\big]^\alpha$$

для любых $\beta \in [0,1]$ и $\alpha \in [0,1]$.

В 1990 г. J.-P. Aubin [6] и В. А. Байдосов [1, 2] ввели в рассмотрение дифференциальные включения с нечеткою правою частью. Их подход к решению таких уравнений основан на сведении последних к обычным дифференциальным включениям.

Рассмотрим дифференциальное включение с нечеткой правой частью

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $t \in I \subset \mathbb{R}$ — время, $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n$ — нечеткое отображение.

Определение 6 [10]. *α-Решением включения* (1) *назовем абсолютно непрерывную функцию* $x\colon I \to \mathbb{R}^n$, *удовлетворяющую включению*

$$\dot{x}(t) \in [F(t, x(t))]^{\alpha},\ x(t_0) = x_0$$

почти всюду на I.

Множество всех α-решений включения (1) в момент времени t обозначим через $X_\alpha(t)$. В случае, когда семейство $\{X_\alpha(t),\ \alpha \in [0,1]\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1, оно определяет нечеткое множество $X(t)$, которое называется множеством решений включения (1) в момент времени t.

Вопросы существования множества $X(t)$ и его свойства рассматривались в работах [9–12]. В работах [5, 15–17] доказана возможность применения метода усреднения на конечном промежутке для дифференциальных включений с нечеткой правой частью, содержащих малый параметр.

Многие процессы в биологии, теории управления, электронике описываются с помощью импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью [13]. В данной статье рассмотрим обоснование возможности применения метода усреднения на конечном промежутке к импульсным дифференциальным включениям с нечеткой правой частью, содержащим малый параметр.

2. Основные результаты. Рассмотрим импульсное дифференциальное включение с нечеткой правой частью

$$x' \in \varepsilon F(t, x), \qquad t \neq \tau_i, \quad x(0) = x_0, \tag{2}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} \in \varepsilon I_i(x).$$

Если для любых $t \geq 0, x \in G$ существует предел

$$\bar{F}(x) = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} \int\limits_t^{t+T} F(t, x)dt + \frac{1}{T} \sum_{t \leq \tau_i < t+T} I_i(x) \right), \tag{3}$$

то включению (2) поставим в соответствие следующее усредненное дифференциальное включение с нечеткой правой частью:

$$y' \in \varepsilon \bar{F}(y), \quad y(0) = x_0. \tag{4}$$

Теорема 3. *Пусть в области* $Q = \{t \geq 0,\ x \in G \subset \mathbb{R}^n\}$, *где* G *выпукло, выполняются следующие условия*:

1) *нечеткие отображения* $F\colon Q \to \mathbb{E}^n$, $I_i\colon G \to \mathbb{E}^n$ *непрерывны, равномерно ограничены постоянной* M, *удовлетворяют условию Липшица по* x *с постоянной* λ *и вогнутозначны по* x;

2) *равномерно относительно* $t \geq 0$ *и* $x \in G$ *существует предел* (3) *и*

$$\frac{1}{T}\, i(t, t+T) \leq \nu, \quad \nu < \infty,$$

где $i(t, t+T)$ — *количество точек последовательности* τ_i *на промежутке* $(t, t+T]$;

3) *для любых* $x_0 \in G' \subset G$ *и* $t \geq 0$ α-*решения включения* (4) *вместе с* ρ-*окрестностью принадлежат области* G *для всех* $\alpha \in [0,1]$.

Тогда для любых $\eta \in (0,\rho]$ *и* $L > 0$ *существует* $\varepsilon^0(\eta, L) > 0$ *такое, что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ *и* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *выполняется неравенство*

$$D(X(t), Y(t)) < \eta, \tag{5}$$

где $X(t)$ — *множество решений включения* (2), $Y(t)$ — *множество решений включения* (4).

Доказательство. Из условий 1, 2 следует, что нечеткое отображение $\bar{F}\colon G \to \mathbb{E}^n$ равномерно ограничено постоянной $M_1 = M(1+\nu)$ и удовлетворяет условию Липшица с постоянной $\lambda_1 = \lambda(1+\nu)$.

Действительно,

$$D\big(\bar{F}(x), \{\hat{0}\}\big) \leq D\left(\bar{F}(x), \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} F(t,x)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leq\tau_i<t+T} I_i(x)\right) +$$

$$+D\left(\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} F(t,x)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leq\tau_i<t+T} I_i(x), \{\hat{0}\}\right) < \delta + \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} D(F(s,x),\{\hat{0}\})ds +$$

$$+\frac{1}{T}\sum_{t\leq\tau_i<t+T} D\big(I_i(x),\{\hat{0}\}\big) < \delta + M + \nu M = \delta + M(1+\nu),$$

$$D\big(\bar{F}(x_1), \bar{F}(x_2)\big) \leq D\left(\bar{F}(x_1), \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} F(t,x_1)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leq\tau_i<t+T} I_i(x_1)\right) +$$

$$+D\left(\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} F(t,x_1)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leq\tau_i<t+T} I_i(x_1), \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} F(t,x_2)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leq\tau_i<t+T} I_i(x_2)\right) +$$

$$+D\left(\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} F(t,x_2)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leq\tau_i<t+T} I_i(x_2), \bar{F}(x_2)\right) <$$

$$< 2\delta + \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} D\big(F(s,x_1),F(s,x_2)\big)ds + \frac{1}{T}\sum_{t\leq\tau_i<t+T} D\big(I_i(x_1), I_i(x_2)\big) \leq$$

$$\leq 2\delta + \lambda\|x_1 - x_2\| + \lambda\nu\|x_1 - x_2\| = 2\delta + \lambda(1+\nu)\|x_1 - x_2\|,$$

где δ может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора T. Таким образом,

$$D\big(\bar{F}(x), \{\hat{0}\}\big) \leq M(1+\nu), \qquad D\big(\bar{F}(x_1), \bar{F}(x_2)\big) \leq \lambda(1+\nu)\|x_1 - x_2\|.$$

Кроме того, нечеткое отображение $\bar{F}(x)$ является вогнутозначным. Выберем произвольные $\alpha \in [0,1]$ и $\beta \in [0,1]$, $x, y \in G$. Тогда

$$\beta[\bar{F}(x)]^\alpha + (1-\beta)[\bar{F}(y)]^\alpha =$$

$$= \beta\left[\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} F(t,x)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\le\tau_i<t+T} I_i(x)\right)\right]^\alpha +$$

$$+(1-\beta)\left[\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} F(t,y)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\le\tau_i<t+T} I_i(y)\right)\right]^\alpha =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T}\Big(\beta\big[F(t,x)\big]^\alpha + (1-\beta)\big[F(t,y)\big]^\alpha\Big)dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{T}\sum_{t\le\tau_i<t+T}\Big(\beta\big[I_i(x)\big]^\alpha + (1-\beta)\big[I_i(y)\big]^\alpha\Big)\right) \subset$$

$$\subset \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T}\big[F(t,\beta x + (1-\beta)y)\big]^\alpha dt + \frac{1}{T}\sum_{t\le\tau_i<t+T}\big[I_i(\beta x + (1-\beta)y)\big]^\alpha\right) =$$

$$= \big[\bar{F}(\beta x + (1-\beta)y)\big]^\alpha.$$

В силу условий теоремы множества решений включений (2) и (4) существуют [13]. Выберем произвольное $\alpha \in [0,1]$. Сначала докажем справедливость включения

$$\big[Y(t)\big]^\alpha \subset \big[X(t)\big]^\alpha + S_\eta(0), \tag{6}$$

где $S_\eta(0) = \big\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le \eta\big\}$ — шар радиуса η с центром в $0 \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $y(t)$ — некоторое решение включения

$$\dot{y}(t) \in \varepsilon[\bar{F}(y(t))]^\alpha, \qquad y(0) = x_0. \tag{7}$$

Разобьем промежуток $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на частичные с шагом $\gamma(\varepsilon)$ таким, что $\gamma(\varepsilon) \to \infty$ и $\varepsilon\gamma(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ $\Big($в качестве $\gamma(\varepsilon)$ можно выбрать, например, $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\Big)$. Тогда найдется измеримый селектор $v(t) \in \big[\bar{F}(y(t))\big]^\alpha$ такой, что

$$y(t) = y(t_j) + \varepsilon\int\limits_{t_j}^t v(s)ds, \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \qquad y(0) = x_0, \tag{8}$$

где $t_j = j\gamma(\varepsilon)$, $j = \overline{0,m}$, $m\gamma(\varepsilon) \le L\varepsilon^{-1} < (m+1)\gamma(\varepsilon)$.

Рассмотрим функцию

$$y^1(t) = y^1(t_j) + \varepsilon v_j(t - t_j), \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \qquad y^1(0) = x_0, \tag{9}$$

где $v_j \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию

$$\left\|\gamma(\varepsilon)v_j - \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} v(s)ds\right\| = \min_{v\in[\bar F(y^1(t_j))]^\alpha} \left\|\gamma(\varepsilon)v - \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} v(s)ds\right\|. \tag{10}$$

Очевидно, что v_j существует в силу компактности множества $\bar F\big(y^1(t_j)\big)$ и непрерывности минимизируемой функции.

Обозначим $\delta_j = \big\|y(t_j) - y^1(t_j)\big\|$. При $t \in [t_j, t_{j+1}]$, используя (8) и (9), имеем

$$\big\|y(t) - y(t_j)\big\| \leq M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon), \qquad \big\|y^1(t) - y^1(t_j)\big\| \leq M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon). \tag{11}$$

Следовательно, при $t \in [t_j, t_{j+1}]$ выполняются неравенства

$$\begin{gathered}\big\|y(t) - y^1(t_j)\big\| \leq \big\|y(t_j) - y^1(t_j)\big\| + \|y(t) - y(t_j)\| \leq \delta_j + \varepsilon M_1(t - t_j),\\ h\Big(\big[\bar F(y(t))\big]^\alpha, \big[\bar F(y^1(t_j))\big]^\alpha\Big) \leq \lambda_1\big\|y(t) - y^1(t_j)\big\| \leq \lambda_1\big(\delta_j + \varepsilon M_1(t - t_j)\big).\end{gathered} \tag{12}$$

Из (10) и (12) следует, что

$$\left\|\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} v(s)ds - \gamma(\varepsilon)v_j\right\| \leq \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} h\Big(\big[\bar F(y(s))\big]^\alpha, \big[\bar F(y^1(t_j))\big]^\alpha\Big)ds \leq$$

$$\leq \lambda_1\left(\delta_j\gamma(\varepsilon) + \varepsilon M_1\frac{\gamma^2(\varepsilon)}{2}\right). \tag{13}$$

Из (8) и (9) получаем

$$\delta_{j+1} \leq \delta_j + \varepsilon\lambda_1\left(\delta_j\gamma(\varepsilon) + \varepsilon M_1\frac{\gamma^2(\varepsilon)}{2}\right) = (1 + \lambda_1\varepsilon\gamma(\varepsilon))\delta_j + \lambda_1 M_1\frac{\varepsilon^2\gamma^2(\varepsilon)}{2}. \tag{14}$$

Поскольку $\delta_0 = 0$, из неравенства (14) имеем

$$\delta_1 \leq \lambda_1 M_1\frac{\varepsilon^2\gamma^2(\varepsilon)}{2},$$

$$\delta_2 \leq (1 + \lambda_1\varepsilon\gamma(\varepsilon))\delta_1 + \lambda_1 M_1\frac{\varepsilon^2\gamma^2(\varepsilon)}{2} \leq \lambda_1 M_1\frac{\varepsilon^2\gamma^2(\varepsilon)}{2}\big((1 + \lambda_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)\big) + 1).$$

По индукции

$$\delta_{j+1} \leq \lambda_1 M_1\frac{\varepsilon^2\gamma^2(\varepsilon)}{2}\big((1 + \lambda_1\varepsilon\gamma(\varepsilon))^i + (1 + \lambda_1\varepsilon\gamma(\varepsilon))^{i-1} + \ldots + 1\big) =$$

$$= \frac{M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)}{2}\big((1 + \lambda_1\varepsilon\gamma(\varepsilon))^{i+1} - 1\big) \leq \frac{M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)}{2}\left((1 + \lambda_1\varepsilon\gamma(\varepsilon))^{\frac{L}{\varepsilon\gamma(\varepsilon)}} - 1\right) \leq$$

$$\leq \frac{M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)}{2}(e^{\lambda_1 L} - 1). \tag{15}$$

Таким образом, в силу неравенств (11) получаем оценку

$$\big\|y(t) - y^1(t)\big\| \le \big\|y(t) - y(t_j)\big\| + \big\|y(t_j) - y^1(t_j)\big\| + \big\|y^1(t_j) - y^1(t)\big\| \le$$

$$\le 2M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon) + \frac{M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)}{2}(e^{\lambda_1 L} - 1) \le \frac{M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)}{2}(e^{\lambda_1 L} + 3). \qquad (16)$$

Из условия 2 теоремы следует, что для любого $\eta_1 > 0$ существует $\varepsilon_1(\eta_1) > 0$, не зависящее от α, такое, что для всех $\varepsilon \le \varepsilon_1(\eta_1)$ выполняется неравенство

$$h\left(\Big[\bar{F}\big(y^1(t_j)\big)\Big]^\alpha, \frac{1}{\gamma(\varepsilon)}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\Big[F\big(s, y^1(t_j)\big)\Big]^\alpha ds + \frac{1}{\gamma(\varepsilon)}\sum_{t_j \le \tau_i < t_{j+1}}\Big[I_i\big(y^1(t_j)\big)\Big]^\alpha\right) < \eta_1. \qquad (17)$$

Следовательно, существуют $p_{ij} \in \Big[I_i\big(y^1(t_j)\big)\Big]^\alpha$ и измеримый селектор $u_j(t) \in \Big[F\big(t, y^1(t_j)\big)\Big]^\alpha$ такие, что

$$\left\| v_j - \frac{1}{\gamma(\varepsilon)}\left(\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} u_j(s)ds + \sum_{t_j \le \tau_i < t_{j+1}} p_{ij}\right)\right\| < \eta_1. \qquad (18)$$

Рассмотрим функцию

$$x^1(t) = x^1(t_j) + \varepsilon\int\limits_{t_j}^{t} u_j(s)ds + \varepsilon\sum_{t_j \le \tau_i < t} p_{ij}, \quad t \in (t_j, t_{j+1}], \qquad x^1(0) = x_0. \qquad (19)$$

Поскольку $x^1(0) = y^1(0)$, из (9), (18) и (19) следует, что для $j = \overline{1, m}$

$$\|x^1(t_j) - y^1(t_j)\| \le \|x^1(t_{j-1}) - y^1(t_{j-1})\| + \eta_1\varepsilon\gamma(\varepsilon) \le \ldots \le j\eta_1\varepsilon\gamma(\varepsilon) \le L\eta_1. \qquad (20)$$

При $t \in (t_j, t_{j+1}]$ имеем

$$\big\|x^1(t) - x^1(t_j)\big\| \le M(1+\nu)\varepsilon\gamma(\varepsilon) = M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon).$$

Тогда, принимая во внимание неравенство (11), получаем

$$\begin{gathered}\big\|x^1(t) - y^1(t)\big\| \le L\eta_1 + 2M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon),\\ \big\|x^1(t) - y^1(t_j)\big\| \le L\eta_1 + M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon).\end{gathered} \qquad (21)$$

Покажем, что существует решение $x(t)$ включения

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) \in \varepsilon\Big[F\big(t, x(t)\big)\Big]^\alpha, \quad t \ne \tau_i, \qquad x(0) = x_0,\\ \Delta x|_{t=\tau_i} \in \varepsilon[I_i(x)]^\alpha,\end{gathered} \qquad (22)$$

достаточно близкое к $x^1(t)$.

Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_p$ — моменты импульсов τ_i, попадающие в промежуток $(t_j, t_{j+1}]$. Для удобства обозначим $\theta_0 = t_j$, $\theta_{p+1} = t_{j+1}$. Пусть $\mu_k^+ = \big\|x^1(\theta_k+0) - x(\theta_k+0)\big\|$, $\mu_k^- = \big\|x^1(\theta_k) - x(\theta_k)\big\|$, $k = \overline{0, p+1}$.

Пусть $\rho(x, A) = \min_{a\in A} \|x - a\|$ — расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Используя условие Липшица, имеем

$$\rho\left(x^{1\prime}(t), \varepsilon\Big[F\big(t, x^1(t)\big)\Big]^\alpha\right) \leq h\left(\varepsilon\Big[F\big(t, y^1(t_j)\big)\Big]^\alpha, \varepsilon\Big[F\big(t, x^1(t)\big)\Big]^\alpha\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon\lambda\big\|x^1(t) - y^1(t_j)\big\| \leq \varepsilon\lambda\big(M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon) + L\eta_1\big) = \eta^*,$$

$$\rho\left(\Delta x^1|_{t=\theta_k}, \varepsilon\Big[I_i(x^1(\theta_k))\Big]^\alpha\right) \leq h\left(\varepsilon\Big[I_i\big(y^1(t_j)\big)\Big]^\alpha, \varepsilon\Big[I_i\big(x^1(\theta_k)\big)\Big]^\alpha\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon\lambda\big\|y^1(t_j) - x^1(\theta_k)\big\| \leq \varepsilon\lambda\Big(M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon) + L\eta_1\Big) = \eta^*.$$

В силу теоремы А. Ф. Филиппова существует решение $x(t)$ включения (22) такое, что при $t \in (\theta_k, \theta_{k+1}]$ выполняется неравенство

$$\big\|x(t) - x^1(t)\big\| \leq \mu_k^+ e^{\varepsilon\lambda(t-\theta_k)} + \varepsilon\int_{\theta_k}^{t} e^{\varepsilon\lambda(t-s)}\eta^* ds.$$

Обозначим $\gamma_k = \theta_{k+1} - \theta_k \leq \gamma(\varepsilon)$, $\gamma_0 + \ldots + \gamma_p = \gamma(\varepsilon)$. Тогда

$$\mu_{k+1}^- \leq \mu_k^+ e^{\varepsilon\lambda\gamma_k} + \frac{\eta^*}{\lambda}\left(e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)} - 1\right). \tag{23}$$

При переходе через точку импульса

$$\mu_{k+1}^+ \leq \mu_{k+1}^- + \varepsilon h\left(\Big[I_i\big(y^1(t_j)\big)\Big]^\alpha, \Big[I_i\big(x(\theta_{k+1})\big)\Big]^\alpha\right) \leq$$

$$\leq \mu_{k+1}^- + \varepsilon h\left(\Big[I_i(x^1\big(\theta_{k+1})\big)\Big]^\alpha, \Big[I_i\big(x(\theta_{k+1})\big)\Big]^\alpha\right) +$$

$$+\varepsilon h\left(\Big[I_i\big(y^1(t_j)\big)\Big]^\alpha, \Big[I_i\big(x^1(\theta_{k+1})\big)\Big]^\alpha\right) \leq$$

$$\leq \mu_{k+1}^- + \varepsilon\lambda\mu_{k+1}^- + \varepsilon h\left(\Big[I_i\big(y^1(t_j)\big)\Big]^\alpha, \Big[I_i\big(x^1(\theta_{k+1})\big)\Big]^\alpha\right) \leq$$

$$\leq (1 + \varepsilon\lambda)\mu_{k+1}^- + \eta^*. \tag{24}$$

Из (23) и (24) следует, что

$$\mu_{k+1}^+ \leq (1 + \varepsilon\lambda)e^{\varepsilon\lambda\gamma_k}\mu_k^+ + \beta, \qquad \beta = \frac{\eta^*}{\lambda}(1 + \varepsilon\lambda)\left(e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)} - 1\right) + \eta^*.$$

Таким образом,

$$\mu_1^+ \leq (1 + \varepsilon\lambda)e^{\lambda\varepsilon\gamma_0}\mu_0^+ + \beta \leq (1 + \varepsilon\lambda)e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}\mu_0^+ + \beta,$$

$$\mu_2^+ \leq (1+\varepsilon\lambda)e^{\varepsilon\lambda\gamma_1}\mu_1^+ + \beta \leq (1+\varepsilon\lambda)^2 e^{\varepsilon\lambda(\gamma_0+\gamma_1)}\mu_0^+ +$$

$$+\beta(1+\varepsilon\lambda)e^{\varepsilon\lambda\gamma_1} + \beta \leq (1+\varepsilon\lambda)^2 e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}\mu_0^+ + \beta\left((1+\varepsilon\lambda)e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}+1\right),$$

. . . .

$$\mu_{k+1}^+ \leq (1+\varepsilon\lambda)^{k+1} e^{\varepsilon\lambda\gamma(\varepsilon)}\mu_0^+ + \beta\left(e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}((1+\varepsilon\lambda)^k + \ldots + (1+\varepsilon\lambda)) + 1\right) =$$

$$= (1+\varepsilon\lambda)^{k+1} e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}\mu_0^+ + \beta\left(e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}\frac{(1+\varepsilon\lambda)^k - 1}{\varepsilon\lambda}(1+\varepsilon\lambda)+1\right) \leq$$

$$\leq e^{\lambda(1+\nu)\varepsilon\gamma(\varepsilon)}\mu_0^+ + \eta^*\left(\frac{1+\varepsilon\lambda}{\lambda}(e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1)+1\right)\left(e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}\frac{e^{\lambda\nu\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1}{\varepsilon\lambda}(1+\varepsilon\lambda)+1\right) =$$

$$= \kappa\mu_0^+ + \beta_1,$$

где

$$\kappa = e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)(1+\nu)},$$

$$\beta_1 = (M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon) + L\eta_1)\left(\frac{1+\varepsilon\lambda}{\lambda}(e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1)+1\right)\left(e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}\left(e^{\lambda\nu\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1\right)(1+\varepsilon\lambda)+\varepsilon\lambda\right).$$

Следовательно,

$$\delta_{j+1}^+ = \left\|x(t_{j+1}) - x^1(t_{j+1})\right\| \leq \kappa\delta_j^+ + \beta_1.$$

Тогда получаем следующую последовательность оценок:

$$\delta_0^+ = 0, \qquad \delta_1^+ \leq \beta_1, \qquad \delta_2^+ \leq \kappa\beta_1 + \beta_1 = (\kappa+1)\beta_1,$$

. . . .

$$\delta_{j+1}^+ \leq (\alpha^j + \ldots + 1)\beta_1 = \frac{\kappa^{j+1}-1}{\kappa-1}\beta_1 \leq$$

$$\leq \frac{e^{\lambda L(1+\nu)}-1}{e^{\lambda(1+\nu)\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1}(M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)+L\eta_1)\left(\frac{1+\varepsilon\lambda}{\lambda}\left(e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1\right)+1\right)\times$$

$$\times\left(e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}\left(e^{\lambda\nu\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1\right)(1+\varepsilon\lambda)+\varepsilon\lambda\right).$$

Поскольку

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\frac{1+\varepsilon\lambda}{\lambda}(e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1)+1\right) = 1$$

и

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}\left(e^{\lambda\nu\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1\right)(1+\varepsilon\lambda)+\varepsilon\lambda}{e^{\lambda(1+\nu)\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}\dfrac{e^{\lambda\nu\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1}{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}+\dfrac{1}{\gamma(\varepsilon)}}{\dfrac{e^{\lambda(1+\nu)\varepsilon\gamma(\varepsilon)}-1}{\lambda\varepsilon\gamma(\varepsilon)}}=\frac{\nu}{1+\nu},$$

имеем

$$\delta_{j+1}^{+}\leq C(M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)+L\eta_1)$$

при $\varepsilon\leq\varepsilon_2$.

Поэтому для $t\in(t_j,t_{j+1}]$ выполняется неравенство

$$\left\|x(t)-x^1(t)\right\|\leq\left\|x(t)-x(t_j)\right\|+\left\|x(t_j)-x^1(t_j)\right\|+\left\|x^1(t)-x^1(t_j)\right\|\leq$$

$$\leq M(1+\nu)\varepsilon\gamma(\varepsilon)+M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)+C\big(M_1\varepsilon\gamma(\varepsilon)+L\eta_1\big)=$$

$$=M_1(2+C)\varepsilon\gamma(\varepsilon)+CL\eta_1. \tag{25}$$

В силу неравенств (16), (21) и (25) получаем, что $\left\|x(t)-y(t)\right\|$ можно сделать меньше η за счет выбора $\varepsilon\leq\varepsilon_0$ и η_1.

Справедливость включения

$$[X(t)]^{\alpha}\subset[Y(t)]^{\alpha}+S_{\eta}(0)$$

доказывается аналогично.

Теорема 3 доказана.

Если нечеткие отображения $F(t,x)$ и $I_i(x)$ периодичны по t, можно получить более точную оценку.

Теорема 4. *Пусть в области $Q=\{t\geq 0,\ x\in G\subset\mathbb{R}^n\}$, где G выпукло, выполняются следующие условия*:

1) *нечеткие отображения $F:Q\to\mathbb{E}^n$, $I_i:G\to\mathbb{E}^n$ непрерывны, равномерно ограничены постоянной M, удовлетворяют условию Липшица по x с постоянной λ и вогнутозначны по x*;

2) *нечеткое отображение $F(t,x)$ 2π-периодично по t и существует такое $\nu\in\mathbb{N}$, что для всех $i\in\mathbb{N}$ выполняются равенства $\tau_{i+\nu}=\tau_i+2\pi$, $I_{i+\nu}(x)\equiv I_i(x)$*;

3) *для любых $x_0\in G'\subset G$ и $t\geq 0$ α-решения включения* (4) *вместе с ρ-окрестностью принадлежат области G для всех $\alpha\in[0,1]$.*

Тогда для любого $L>0$ существуют $\varepsilon^0(L)>0$ и $C(L)>0$ такие, что для всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon^0]$ и $t\in[0,L\varepsilon^{-1}]$ выполняется неравенство

$$D\big(X(t),Y(t)\big)\leq C\varepsilon, \tag{26}$$

где $X(t)$ — множество решений включения (2), *$Y(t)$ — множество решений включения* (4).

Доказательство. Используя условие 2 теоремы, получаем

$$\bar{F}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}F(s,x)ds+\frac{1}{2\pi}\sum_{0\leq\tau_i<2\pi}I_i(x). \tag{27}$$

Из условия 1 следует, что нечеткое отображение $\bar{F}:G\to\mathbb{E}^n$ равномерно ограничено постоянной $M_1=M(1+\nu)$, удовлетворяет условию Липшица с постоянной $\lambda_1=\lambda(1+\nu)$ и вогнутозначно по x (доказательство аналогично доказательству теоремы 3).

Выберем произвольное $\alpha \in [0,1]$. Для начала покажем справедливость включения

$$[Y(t)]^\alpha \subset [X(t)]^\alpha + S_{C\varepsilon}(0). \tag{28}$$

Пусть $y(t)$ — некоторое решение включения (7). Разобьем промежуток $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на частичные с шагом 2π точками $t_j = 2\pi j$, $j = \overline{0,m}$, где $m\colon t_m \le L\varepsilon^{-1} < t_{m+1}$. Тогда существует измеримый селектор $v(t)$ многозначного отображения $\left[\bar F\big(y(t)\big)\right]^\alpha$ такой, что

$$y(t) = y(t_j) + \varepsilon \int\limits_{t_j}^{t} v(s)ds, \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \qquad y(0) = x_0. \tag{29}$$

Рассмотрим функцию

$$y^1(t) = y^1(t_j) + \varepsilon v_j (t - t_j), \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \qquad y^1(0) = x_0, \tag{30}$$

где $v_j \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию

$$\left\| 2\pi v_j - \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} v(s)ds \right\| = \min_{v \in \left[\bar F\left(y^1(t_j)\right)\right]^\alpha} \left\| 2\pi v - \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} v(s)ds \right\|. \tag{31}$$

Очевидно, что v_j существует в силу компактности множества $\left[\bar F\big(y^1(t_j)\big)\right]^\alpha$ и непрерывности минимизируемой функции.

Обозначим $\delta_j = \big\| y(t_j) - y^1(t_j) \big\|$. При $t \in [t_j, t_{j+1}]$, используя (29) и (30), имеем

$$\|y(t) - y(t_j)\| \le 2\pi M_1 \varepsilon, \quad \|y^1(t) - y^1(t_j)\| \le 2\pi M_1 \varepsilon. \tag{32}$$

Следовательно, при $t \in (t_j, t_{j+1}]$ выполняются следующие неравенства:

$$\begin{gathered} \big\| y(t) - y^1(t_j) \big\| \le \big\| y(t_j) - y^1(t_j) \big\| + \big\| y(t) - y(t_j) \big\| \le \delta_j + \varepsilon M_1 (t - t_j), \\ h\left(\left[\bar F\big(y(t)\big)\right]^\alpha, \left[\bar F\big(y^1(t_j)\big)\right]^\alpha \right) \le \lambda_1 \|y(t) - y^1(t_j)\| \le \lambda_1 \big(\delta_j + \varepsilon M_1 (t - t_j)\big). \end{gathered} \tag{33}$$

Из (31) и (33) следует, что

$$\left\| \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} v(s)ds - 2\pi v_j \right\| \le$$

$$= \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} h\left(\left[\bar F\big(y(s)\big)\right]^\alpha, \left[\bar F\big(y^1(t_j)\big)\right]^\alpha \right) ds \le \lambda_1 \left(2\pi \delta_j + 2\pi^2 M_1 \varepsilon \right). \tag{34}$$

Принимая во внимание (29) и (30), получаем

$$\delta_{j+1} \le \delta_j + \varepsilon\lambda_1 \left(2\pi\delta_j + 2\pi^2 M_1\varepsilon\right) = (1 + 2\pi\lambda_1\varepsilon)\delta_j + 2\pi^2\lambda_1 M_1\varepsilon^2. \tag{35}$$

Из неравенства (35), учитывая, что $\delta_0 = 0$, имеем

$$\begin{gathered}
\delta_1 \le 2\pi^2\lambda_1 M_1\varepsilon^2,\\
\delta_2 \le (1 + 2\pi\lambda_1\varepsilon)\delta_1 + 2\pi^2\lambda_1 M_1\varepsilon^2 \le 2\pi^2\lambda_1 M_1\varepsilon^2((1 + 2\pi\lambda_1\varepsilon) + 1),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (36)\\
\delta_{j+1} \le 2\pi^2\lambda_1 M_1\varepsilon^2((1 + 2\pi\lambda_1\varepsilon)^i + (1 + 2\pi\lambda_1\varepsilon)^{i-1} + \ldots + 1) =\\
= \pi M_1\varepsilon\left((1 + 2\pi\lambda_1\varepsilon)^{i+1} - 1\right) \le \pi M_1\varepsilon\left((1 + 2\pi\lambda_1\varepsilon)^{\frac{L}{2\pi\varepsilon}} - 1\right) \le \pi M_1\varepsilon(e^{\lambda_1 L} - 1).
\end{gathered}$$

В силу условия 1 теоремы и (36) имеем

$$\begin{gathered}
\left\|y(t) - y^1(t)\right\| \le \left\|y(t) - y(t_j)\right\| + \left\|y(t_j) - y^1(t_j)\right\| + \left\|y^1(t_j) - y^1(t)\right\| \le\\
\le 4\pi M_1\varepsilon + \pi M_1\varepsilon(e^{\lambda_1 L} - 1) \le \pi M_1\varepsilon(e^{\lambda_1 L} + 3).
\end{gathered} \tag{37}$$

Далее

$$\left[\bar F\big(y^1(t_j)\big)\right]^\alpha = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \left[F\big(s, y^1(t_j)\big)\right]^\alpha ds + \frac{1}{2\pi}\sum_{t_j \le \tau_i < t_{j+1}} \left[I_i\big(y^1(t_j)\big)\right]^\alpha. \tag{38}$$

Следовательно, существуют $p_{ij} \in \left[I_i(y^1\big(t_j)\big)\right]^\alpha$ и измеримый селектор $u_j(t) \in \left[F(t, y^1\big(t_j)\big)\right]^\alpha$ такие, что

$$v_j = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} u_j(s)ds + \sum_{t_j \le \tau_i < t_{j+1}} p_{ij}\right). \tag{39}$$

Рассмотрим функцию

$$x^1(t) = x^1(t_j) + \varepsilon\int\limits_{t_j}^{t} u_j(s)ds + \varepsilon\sum_{t_j \le \tau_i < t} p_{ij}, \quad t \in (t_j, t_{j+1}], \qquad x^1(0) = x_0. \tag{40}$$

Из (30), (40) и (39), используя $x^1(0) = y^1(0)$, получаем

$$x^1(t_j) = y^1(t_j), \quad \left\|x^1(t) - x^1(t_j)\right\| \le 2\pi M_1\varepsilon, \quad \left\|x^1(t) - y^1(t)\right\| \le 4\pi M_1\varepsilon \quad \text{при} \quad j = \overline{1, m}. \tag{41}$$

Покажем, что существует решение $x(t)$ включения (22), достаточно близкое к $x^1(t)$.

Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_\nu$ — моменты импульсов τ_i, попадающие в промежуток $(t_j, t_{j+1}]$. Для удобства обозначим $\theta_0 = t_j$, $\theta_{\nu+1} = t_{j+1}$. Пусть $\mu_k^+ = \left\|x^1(\theta_k + 0) - x(\theta_k + 0)\right\|$, $\mu_k^- = \left\|x^1(\theta_k) - x(\theta_k)\right\|$, $k = \overline{0, \nu + 1}$.

Используя условие Липшица, имеем

$$\rho\left(x^{1\prime}(t), \varepsilon\left[F\big(t, x^1(t)\big)\right]^\alpha\right) \le h\left(\varepsilon\left[F\big(t, y^1(t_j)\big)\right]^\alpha, \varepsilon[F(t, x^1(t))]^\alpha\right) \le$$

$$\leq \varepsilon\lambda\left\|x^1(t) - x^1(t_j)\right\| \leq 2\pi\lambda M_1\varepsilon^2 = \eta^*,$$

$$\rho\left(\Delta x^1|_{t=\theta_k}, \varepsilon[I_i(x^1(\theta_k))]^\alpha\right) \leq h\left(\varepsilon[I_i(y^1(t_j))]^\alpha, \varepsilon\Big[I_i\big(x^1(\theta_k)\big)\Big]^\alpha\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon\lambda\left\|x^1(t_j) - x^1(\theta_k)\right\| \leq 2\pi\lambda M_1\varepsilon^2 = \eta^*.$$

В силу теоремы А. Ф. Филиппова существует решение $x(t)$ включения (22) такое, что при $t \in (\theta_k, \theta_{k+1}]$ выполняется неравенство

$$\left\|x(t) - x^1(t)\right\| \leq \mu_k^+ e^{\varepsilon\lambda(t-\theta_k)} + \varepsilon\int\limits_{\theta_k}^{t} e^{\varepsilon\lambda(t-s)}\eta^* ds.$$

Обозначим $\gamma_k = \theta_{k+1} - \theta_k \leq 2\pi$, $\gamma_0 + \ldots + \gamma_p = 2\pi$. Тогда

$$\mu_{k+1}^- \leq \mu_k^+ e^{\varepsilon\lambda\gamma_k} + \frac{\eta^*}{\lambda}\left(e^{2\pi\lambda\varepsilon} - 1\right). \tag{42}$$

При переходе через точку импульса

$$\mu_{k+1}^+ \leq \mu_{k+1}^- + \varepsilon h\left(\Big[I_i\big(y^1(t_j)\big)\Big]^\alpha, \Big[I_i\big(x(\theta_{k+1})\big)\Big]^\alpha\right) \leq$$

$$\leq \mu_{k+1}^- + \varepsilon h\left(\Big[I_i\big(x^1\big(\theta_{k+1}\big)\big)\Big]^\alpha, \Big[I_i\big(x\big(\theta_{k+1}\big)\big)\Big]^\alpha\right) + \varepsilon h\left(\Big[I_i\big(x^1(t_j)\big)\Big]^\alpha, \Big[I_i\big(x^1(\theta_{k+1})\big)\Big]^\alpha\right) \leq$$

$$\leq \mu_{k+1}^- + \varepsilon\lambda\mu_{k+1}^- + \varepsilon h\left(\Big[I_i\big(x^1(t_j)\big)\Big]^\alpha, \Big[I_i\big(x^1(\theta_{k+1})\big)\Big]^\alpha\right) \leq$$

$$\leq (1 + \varepsilon\lambda)\mu_{k+1}^- + \eta^*. \tag{43}$$

Из (23) и (24) следует, что

$$\mu_{k+1}^+ \leq (1 + \varepsilon\lambda)e^{\varepsilon\lambda\gamma_k}\mu_k^+ + \beta, \qquad \beta = \frac{\eta^*}{\lambda}(1 + \varepsilon\lambda)\left(e^{2\pi\lambda\varepsilon} - 1\right) + \eta^*.$$

Таким образом,

$$\mu_1^+ \leq (1 + \varepsilon\lambda)e^{\lambda\varepsilon\gamma_0}\mu_0^+ + \beta \leq (1 + \varepsilon\lambda)e^{2\pi\lambda\varepsilon}\mu_0^+ + \beta,$$

$$\mu_2^+ \leq (1 + \varepsilon\lambda)e^{\varepsilon\lambda\gamma_1}\mu_1^+ + \beta \leq (1 + \varepsilon\lambda)^2 e^{\varepsilon\lambda(\gamma_0+\gamma_1)}\mu_0^+ +$$

$$+\beta(1 + \varepsilon\lambda)e^{\varepsilon\lambda\gamma_1} + \beta \leq (1 + \varepsilon\lambda)^2 e^{2\pi\lambda\varepsilon}\mu_0^+ + \beta\left((1 + \varepsilon\lambda)e^{2\pi\lambda\varepsilon} + 1\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mu_{k+1}^+ \leq (1 + \varepsilon\lambda)^{k+1} e^{2\pi\lambda\varepsilon}\mu_0^+ + \beta\left(e^{2\pi\lambda\varepsilon}((1 + \varepsilon\lambda)^k + \ldots + (1 + \varepsilon\lambda)) + 1\right) =$$

$$= (1 + \varepsilon\lambda)^{k+1} e^{2\pi\lambda\varepsilon}\mu_0^+ + \beta\left(e^{2\pi\lambda\varepsilon}\frac{(1 + \varepsilon\lambda)^k - 1}{\varepsilon\lambda}(1 + \varepsilon\lambda) + 1\right) \leq$$

$$\leq e^{2\pi\lambda(1+\nu)\varepsilon}\mu_0^+ + \eta^*\left(\frac{1+\varepsilon\lambda}{\lambda}(e^{2\pi\lambda\varepsilon}-1)+1\right)\left(e^{2\pi\lambda\varepsilon}\frac{e^{\lambda\nu\varepsilon 2\pi}-1}{\varepsilon\lambda}(1+\varepsilon\lambda)+1\right)=$$

$$=\kappa\mu_0^+ + \beta_1,$$

где

$$\kappa = e^{2\pi\lambda(1+\nu)\varepsilon},$$

$$\beta_1 = 2\pi M_1\varepsilon\left(\frac{1+\varepsilon\lambda}{\lambda}(e^{2\pi\lambda\varepsilon}-1)+1\right)\left(e^{2\pi\lambda\varepsilon}\left(e^{2\pi\lambda\nu\varepsilon}-1\right)(1+\varepsilon\lambda)+\varepsilon\lambda\right).$$

Следовательно,

$$\delta_{j+1}^+ = \left\|x(t_{j+1}) - x^1(t_{j+1})\right\| \leq \kappa\delta_j^+ + \beta_1.$$

Тогда получаем следующую последовательность оценок:

$$\delta_0^+ = 0,\ \delta_1^+ \leq \beta_1, \qquad \delta_2^+ \leq \kappa\beta_1 + \beta_1 = (\kappa+1)\beta_1,$$

. . . .

$$\delta_{j+1}^+ \leq (\alpha^j + \ldots + 1)\beta_1 = \frac{\kappa^{j+1}-1}{\kappa-1}\beta_1 \leq$$

$$\leq 2\pi M_1\frac{e^{\lambda L(1+\nu)}-1}{e^{2\pi\lambda(1+\nu)\varepsilon}-1}\left(\frac{1+\varepsilon\lambda}{\lambda}(e^{2\pi\lambda\varepsilon}-1)+1\right)\left(e^{2\pi\lambda\varepsilon}\left(e^{2\pi\lambda\nu\varepsilon}-1\right)(1+\varepsilon\lambda)+\varepsilon\lambda\right)\varepsilon.$$

Поскольку

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1+\varepsilon\lambda}{\lambda}(e^{2\pi\lambda\varepsilon}-1)+1\right)=1$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{2\pi\lambda\varepsilon}\left(e^{2\pi\lambda\nu\varepsilon}-1\right)(1+\varepsilon\lambda)+\varepsilon\lambda}{e^{2\pi\lambda(1+\nu)\varepsilon}-1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{2\pi\lambda\varepsilon}\dfrac{e^{2\pi\lambda\nu\varepsilon}-1}{\lambda\varepsilon}+1}{\dfrac{e^{2\pi\lambda(1+\nu)\varepsilon}-1}{\lambda\varepsilon}} = \frac{2\nu\pi+1}{2(1+\nu)\pi},$$

то

$$\delta_{j+1}^+ \leq C_0\varepsilon$$

при $\varepsilon \leq \varepsilon_2$. Поэтому при $t \in (t_j, t_{j+1}]$ выполняется неравенство

$$\left\|x(t)-x^1(t)\right\| \leq \left\|x(t)-x(t_j)\right\| + \left\|x(t_j)-x^1(t_j)\right\| + \left\|x^1(t)-x^1(t_j)\right\| \leq$$

$$\leq 2\pi M(1+\nu)\varepsilon + 2\pi M_1\varepsilon + C_0\varepsilon = (4\pi M_1 + C_0)\varepsilon. \tag{44}$$

Учитывая неравенства (37), (41) и (44), получаем

$$\left\|x(t)-y(t)\right\| \leq C_1\varepsilon, \tag{45}$$

где $C_1 = \pi M_1(e^{\lambda_1 L}+3) + 4\pi M_1 + C_0$.

Первая часть теоремы доказана.

Выбирая произвольное решение $x(t)$ включения (22) и проводя оценки, аналогичные приведенным выше, находим решение $y(t)$ включения (7) такое, что выполняется неравенство, аналогичное (45), с некоторой постоянной C_2. Выбирая $C = \max(C_1, C_2)$, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы.

3. Заключение. Требование вогнутозначности правых частей исходного включения является достаточно сильным и необходимо для обеспечения выпуклости множеств α-решений исходного и усредненного включений для любого $\alpha \in [0, 1]$. Если решение рассматривать в пространстве Σ^n отображений $x : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, удовлетворяющих условиям 1, 3 и 4 из определения пространства $\mathbb{E}^n$, то требование вогнутозначности можно опустить, при этом утверждения теорем останутся в силе.

1. *Байдосов В. А.* Дифференциальные включения с нечеткой правой частью // Докл. АН СССР. – 1989. – **309**, № 4. – С. 781 – 783.
2. *Байдосов В. А.* Нечеткие дифференциальные включения // Прикл. математика и механика. – 1990. – **54**, вып. 1. – С. 12 – 17.
3. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
4. *Нечеткие* множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под. ред. Д. А. Поспелова. – М.: Наука, 1986. – 312 с.
5. *Плотников А. В.* Усреднение нечетких управляемых дифференциальных включений с терминальным критерием качества // Нелінійні коливання. – 2013. – **16**, № 1. – С. 105 – 110.
6. *Aubin J.-P.* Fuzzy differential inclusions // Problems Control and Inform. Theory. – 1990. – **19**, № 1. – P. 55 – 67.
7. *Aumann R. J.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. and Appl. – 1965. – № 12. – P. 1 – 12.
8. *Dubois D., Prade H.* Fuzzy sets and systems. Theory and applications // Math. Sci. and Eng. – New York; London: Acad. Press, 1980. – 393 p.
9. *Hullermeier E.* Towards modelling of fuzzy functions // EUFIT’95. – 1995. – P. 150 – 154.
10. *Hullermeier E.* An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical system // Int. J. Uncertainty, Fuzziness Knowledge-Based Systems. – 1997. – № 7. – P. 117 – 137.
11. *Lakshmikantham V., Mohapatra R. N.* Theory of fuzzy differential equations and inclusions. – London: Taylor and Francis Publ., 2003. – 178 p.
12. *Lakshmikantham V., Tolstonogov A. A.* Existence and interrelation between set and fuzzy differential equations // Nonlinear Anal. – 2003. – **55**. – P. 255 – 268.
13. *Mengshu Guo., Xiaoping Xue, Ronglu Li.* Impulsive functional differential inclusions and fuzzy population models // Fuzzy Sets and System. – 2003. – **138**. – P. 601 – 615.
14. *Park J. Y., Han H. K.* Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations // Int. J. Math. and Math. Sci. – 1999. – **22**, № 2. – P. 271 – 279.
15. *Plotnikov A. V., Komleva T. A., Plotnikova L. I.* On the averaging of differential inclusions with fuzzy right-hand side when the average of the right-hand side is absent // Iran. J. Optimiz. – 2010. – **2**, № 3. – P. 506 – 517.
16. *Plotnikov A. V.* Averaging of fuzzy integrodifferential inclusions // Int. J. Control Sci. and Eng. – 2011. – **1**, № 1. – P. 8 – 14.
17. *Plotnikov A. V., Komleva T. A.* Full averaging of control fuzzy integrodifferential inclusions with terminal criterion of quality // Int. J. Control Sci. and Eng. – 2013. – **3**, № 2. – P. 68 – 72.
18. *Zadeh L.* Fuzzy sets // Inform. and Control. – 1965. – № 8. – P. 338 – 353.

Получено 24.10.13,
после доработки — 19.01.14