УДК 517.9

В. Г. Самойленко, Ю. І. Самойленко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

АСИМПТОТИЧНІ БАГАТОФАЗОВІ СОЛІТОНОПОДІБНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

We describe the set of initial conditions under which the Cauchy problem for a singularly perturbed Korteweg – de Vries equation with variable coefficients has an asymptotic multiphase soliton-like solution. The notion of manifold of initial values for which the above-mentioned solution exists is proposed for the analyzed Cauchy problem. Statements on the estimation of the difference between the exact and constructed asymptotic solutions are proved for the Cauchy problem.

Охарактеризовано множество начальных условий, при которых задача Коши для сингулярно возмущенного уравнения Кортевега – де Фриза с переменными коэффициентами имеет асимптотическое m-фазовое солитоноподобное решение. Предложено понятие многообразия начальных значений для задачи Коши, при которых такое решение существует. Доказаны теоремы об оценке разности между точным и построенным асимптотическим решением упомянутой выше задачи.

1. Вступ. Дослідження сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза бере свій початок із класичних праць [1 – 3], де для рівняння

$$u_t - 6uu_x + \varepsilon^2 u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x, 0, \varepsilon) = f(x) \tag{2}$$

вивчалася границя розв'язку задачі Коші (1), (2) при $\varepsilon \to 0$.

Для знаходження цієї границі в [1 – 3] використано ідею Коула – Хопфа, яку вперше [4, 5] було застосовано при дослідженні границі розв'язку сингулярно збуреного рівняння Бюргерса

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx},$$

коли малий параметр ε прямує до нуля.

Якщо у випадку рівняння Бюргерса використовувалася заміна змінних, яка згодом дістала назву підстановки Коула – Хопфа, при якій рівняння Бюргерса зводиться до (лінійного) рівняння теплопровідності, то у випадку рівняння Кортевега – де Фріза це рівняння лінеаризовувалось (у певному сенсі) за допомогою схеми оберненої задачі розсіювання. При цьому в рамках цієї схеми відповідний оператор Шредінгера містив малий параметр при другій похідній і відповідні дані розсіювання записувалися за допомогою ВКБ-зображень. За певних початкових умов, коли потенціал згаданого вище оператора Шредінгера є безвідбивним і точний розв'язок задачі Коші (1), (2) можна записати у явному вигляді (див. формулу (1.20) в [1]), знаходження (слабкої) границі розв'язку задачі Коші (1), (2) зводилося до розв'язання певної задачі про мінімізацію деякого квадратичного функціонала, яка в свою чергу редукувалася до задачі Рімана – Гільберта.

За допомогою чисельних експериментів було встановлено [1 – 3] існування такого значення часу t_*, яке не залежить від малого параметра ε, що при всіх $t > t_*$ розв'язок задачі (1), (2) є осциляційним при $\varepsilon \to 0$. Оскільки довжина хвилі такого розв'язку має порядок $O(\varepsilon)$ і його амплітуда не залежить від ε, то при $\varepsilon \to 0$ існує лише слабка границя розв'язку задачі Коші (1), (2).

Слабка границя розв'язку задачі Коші (1), (2) при $\varepsilon \to 0$ досліджувалася чисельними методами. Зокрема, в [6] на основі методу скінченних елементів Релея – Рітца запропоновано чисельний метод, за допомогою якого знайдено слабку границю розв'язку задачі Коші (1), (2) (при $\varepsilon \to 0$) і розглянуто низку частинних випадків, зокрема, коли початкова функція в (2) має вигляд $u(x) = \min(x^2 - 1, 0)$. Зауважимо, що ця функція, як і у випадку розглянутої в [1 – 3] задачі Коші (1), (2), є недодатною, має лише одну точку мінімуму і при $|x| \to \infty$ прямує до нуля швидше ніж будь-який степінь $|x|$, тобто задовольняє всі припущення [1 – 3] щодо початкової функції в (2), крім умови диференційовності.

Не менш важливим є дослідження задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами, оскільки саме такі рівняння використовуються при вивченні динаміки рідини змінної глибини. З цього приводу варто згадати піонерську статтю [7], де розглянуто одне сингулярно збурене рівняння гідродинаміки зі змінними коефіцієнтами. Проте якщо при дослідженні рівняння (1) ефективно використовувався метод оберненої задачі розсіювання, то у випадку диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами чи не єдиним підходом при їх вивченні є методи асимптотичного аналізу.

Відомо, що при спеціальному виборі початкових умов задача Коші для рівняння Кортевега – де Фріза має так звані солітонні розв'язки [8, 9]. Постає природне питання: при яких початкових умовах задача Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами має асимптотичні розв'язки, які за своєю структурою є подібними до солітонних? Саме вивченню цього питання і присвячено дану статтю.

У статті розглядається задача Коші для рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\varepsilon^2 v_{xxx} = a(x,t,\varepsilon) v_t + b(x,t,\varepsilon) v v_x, \tag{3}$$

$$v(x,0,\varepsilon) = f(x,\varepsilon), \tag{4}$$

де

$$a(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x,t)\varepsilon^k, \qquad b(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x,t)\varepsilon^k, \tag{5}$$

функції $a_k(x,t)$, $b_k(x,t) \in C^\infty(\mathbf{R} \times [0;T])$, $k \geq 0$, причому $a_0(x,t) \neq 0$, $b_0(x,t) \neq 0$ при всіх $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T]$.

Зауважимо, що дослідженню задачі Коші для рівняння Кортевега – де Фріза і його узагальнень присвячено значну кількість праць [10 – 21], огляд яких наведено у [22]. Зокрема, питання про існування розв'язку задачі Коші для рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами вивчалося в [19 – 21], де отримано умови існування узагальнених розв'язків задачі Коші для рівняння Кортевега – де Фріза і умови, при яких ця задача має розв'язок у просторі швидко спадних функцій.

У даній статті, використовуючи ідеї нелінійного методу ВКБ [23], наведено опис множини початкових умов, за яких згадана вище задача Коші (3), (4) має асимптотичний багатофазовий солітоноподібний розв'язок [24], та доведено теорему про оцінку між точним і побудованим асимптотичним розв'язком згаданої вище задачі. Ці результати доповнюють і узагальнюють аналогічні результати для задач про побудову асимптотичних одно- та двофазового солітоноподібного розв'язків задачі Коші (3), (4), які отримано у [22, 25].

2. Основні припущення і позначення. У подальшому використовується простір швидко спадних функцій $S = S(\mathbf{R})$, тобто простір таких нескінченно диференційовних на множині $\mathbf{R}$ функцій, що для довільних цілих чисел m, $n \geq 0$ виконується умова [26]

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \left| x^m \frac{d^n}{dx^n} u(x) \right| < +\infty.$$

Через $C^\infty(0,T;S)$ позначимо простір нескінченно диференційовних на множині $\mathbf{R} \times [0;T]$ функцій $u(x,t)$, для яких при довільних цілих $m, k > 0$ виконується умова

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(D_x^m D_t^k u\Big)^2 dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(1+x^2\big)^m \Big(D_t^k u\Big)^2 dx < \infty.$$

Аналогічно [7, 27] позначимо через $G_1 = G_1(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau) \in \mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}$, що для довільних невід'ємних цілих чисел n, p, q, r рівномірно щодо (x,t) на кожній компактній множині $K \subset \mathbf{R} \times [0;T]$ виконуються дві умови:

1^0) справджується співвідношення

$$\lim_{\tau\to+\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \frac{\partial^r}{\partial \tau^r} f(x,t,\tau) = 0, \qquad (x,t) \in K;$$

2^0) існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x,t)$, що

$$\lim_{\tau\to-\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \frac{\partial^r}{\partial \tau^r} \big(f(x,t,\tau) - f^-(x,t)\big) = 0, \qquad (x,t) \in K.$$

Нехай $G_1^0 = G_1^0(\mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R}) \subset G_1$ — простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau) \in G_1$, $(x,t,\tau) \in \mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R}$, що рівномірно щодо змінних (x,t) на кожному компакті $K \subset \mathbf{R} \times [0;T]$ виконується умова

$$\lim_{\tau\to-\infty} f(x,t,\tau) = 0.$$

Позначимо також при кожному натуральному $n \geq 2$ через $G_n^0 = G_n^0(\mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R}^n)$ лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)$, де $(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n) \in \mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R}^n$, які задовольняють умову: при кожному $k = \overline{1,n}$ існують такі функції $f_k^\pm = f_k^\pm(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{k-1},\tau_{k+1},\ldots,\tau_n) \in G_{n-1}^0(\mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R}^{n-1})$, що для довільних невід'ємних цілих чисел α, β, σ та мультиіндексу $\gamma = (\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)$ має місце співвідношення

$$\lim_{\tau_k\to\pm\infty} \tau_k^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \frac{\partial^\sigma}{\partial t^\sigma} \frac{\partial^\gamma}{\partial \tau^\gamma} (f - f_k^\pm) = 0.$$

Цю рівність і аналогічні їй рівності далі слід розуміти як два співвідношення: окремо для функцій f_k^+ і окремо для функцій f_k^-, при цьому змінна τ_k, за якою обчислюється границя, прямує відповідно до $+\infty$ або $-\infty$.

Означення 1 [24, 27]. *Функція $v(x,t,\varepsilon)$ називається асимптотичною m-фазовою солітоноподібною, якщо для довільного цілого числа $N \geq 0$ для функції $v(x,t,\varepsilon)$ має місце зображення вигляду*

$$v(x,t,\varepsilon) = Y_N\left(x,t,\frac{S_1(x,t)}{\varepsilon},\frac{S_2(x,t)}{\varepsilon},\ldots,\frac{S_m(x,t)}{\varepsilon},\varepsilon\right) + O(\varepsilon^{N+1}), \tag{6}$$

де

$$Y_N(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \left[v_j(x,t) + V_j(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)\right], \tag{7}$$

$$\tau_1 = \frac{S_1(x,t)}{\varepsilon}, \qquad \tau_2 = \frac{S_2(x,t)}{\varepsilon}, \quad \ldots\ , \quad \tau_m = \frac{S_m(x,t)}{\varepsilon},$$

$S_k = S_k(x,t)$, $k=\overline{1,m}$, *— деякі нескінченно диференційовні функції змінних* $(x,t) \in \mathbf{R}\times[0;T]$, *причому* $\left.\dfrac{\partial S_k}{\partial x}\right|_{\Gamma_k} \neq 0$, $\Gamma_k = \{(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T], S_k(x,t)=0\}$, $k=\overline{1,m}$; $u_j(x,t)$, $(x,t) \in \mathbf{R}\times[0;T]$, $j=\overline{1,N}$, *— нескінченно диференційовні функції;* $V_j(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m) \in G_m^0$, $j=\overline{0,N}$. *При цьому змінні* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ *в* (7) *вважаються незалежними.*

Криві Γ_k, $k=\overline{1,m}$, називаються кривими розриву.

У подальшому використовується стандартне для асимптотичного аналізу позначення: запис $\Psi(x,t,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^N\right)$ при $\varepsilon\to 0$ означає, що існують такі величина $\varepsilon_0>0$ і стала $C>0$, яка залежить від числа N і від компакта $K\subset\mathbf{R}\times[0;T]$, що $|\Psi(x,t,\varepsilon)| \leq C\,\varepsilon^N$ для всіх $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0)$ і всіх $(x,t)\in K$.

3. Побудова асимптотичного розв'язку задачі Коші (3), (4). Асимптотичний багатофазовий солітоноподібний розв'язок задачі Коші (3), (4) шукається у вигляді (6). Його регулярна частина визначається за допомогою алгоритму, який описано у статтях [25, 28], а сингулярна частина — із деякої системи диференціальних рівнянь з частинними похідними третього порядку зі змінними коефіцієнтами. На відміну від попередніх досліджень [24] у даній статті при побудові сингулярної частини асимптотики не вимагається виконання умов про рівність коефіцієнтів $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$ та головного члена регулярної частини асимптотики $v_0(x,t)$ на кривих розриву Γ_k, $k=\overline{1,m}$. Цих обмежень вдається уникнути за рахунок того, що рівняння (3) заміною $v(x,t,\varepsilon)=u(x,t,\varepsilon)/b(x,t,\varepsilon)$ зводиться до диференціального рівняння, в якому коефіцієнт при нелінійному доданку uu_x є сталим.

Після виконання зазначеної вище заміни рівняння (3) набирає вигляду

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x,t,\varepsilon)u_t + uu_x - 3\,\varepsilon^2 b(x,t,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{b(x,t,\varepsilon)}\right)u_{xx} -$$

$$-3\,\varepsilon^2 b(x,t,\varepsilon)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{b(x,t,\varepsilon)}\right)u_x - \varepsilon^2 b(x,t,\varepsilon)\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{1}{b(x,t,\varepsilon)}\right)u +$$

$$+b(x,t,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{b(x,t,\varepsilon)}\right)u^2 + a(x,t,\varepsilon)b(x,t,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{b(x,t,\varepsilon)}\right)u. \tag{8}$$

Асимптотичний m-фазовий солітоноподібний розв'язок рівняння (8) шукається у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon) = Y_N(x,t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}), \tag{9}$$

де

$$Y_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \left(u_j(x,t) + V_j(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m) \right), \qquad \tau_k = \frac{x-\varphi_k(t)}{\varepsilon}, \qquad k=\overline{1,m}.$$

Щодо функцій $\varphi_k(t)$, $t \in [0;T]$, $k=\overline{1,m}$, припускається, що ці функції є нескінченно диференційовними і задовольняють умову $\varphi_k(0)=0$, $k=\overline{1,m}$.

Функція

$$U_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j u_j(x,t)$$

називається регулярною частиною асимптотики (9), а функція

$$V_N(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j V_j(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$$

— сингулярною частиною асимптотики (9). Очевидно, що при цьому виконується рівність $Y_N(x,t,\varepsilon) = U_N(x,t,\varepsilon) + V_N(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon)$.

Регулярна частина $U_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j u_j(x,t)$ асимптотики (9) визначається із системи диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку вигляду

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} +$$

$$+a_0(x,t)b_0(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{b_0(x,t)}\right)u_0 + b_0(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{b_0(x,t)}\right)u_0^2 = 0, \tag{10}$$

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_0\frac{\partial u_j}{\partial x} + u_j\frac{\partial u_0}{\partial x} +$$

$$+b_0(x,t)\left(a_0(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{b_0(x,t)}\right) + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{b_0(x,t)}\right)u_0\right)u_j = F_j(x,t), \qquad j=\overline{1,N}, \tag{11}$$

де функції $F_j(x,t)$, $j=\overline{1,N}$, знаходяться рекурентним чином за функціями $u_0(x,t), u_1(x,t),\ldots$ $\ldots, u_{j-1}(x,t)$.

Розв'язок квазілінійного рівняння (10) і лінійних рівнянь (11) можна знайти методом характеристик [28].

Сингулярна частина $V_N(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j V_j(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$ асимптотики (9) визначається з системи диференціальних рівнянь із частинними похідними вигляду

$$\sum_{p,q,r=1}^{m} \frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_p\partial\tau_q\partial\tau_r} = \sum_{p=1}^{m}\left(-a_0(x,t)\varphi_p'(t) + u_0(x,t)\right)\frac{\partial V_0}{\partial\tau_p} + V_0\sum_{p=1}^{m}\frac{\partial V_0}{\partial\tau_p}, \tag{12}$$

$$\sum_{p,q,r=1}^{m} \frac{\partial^3 V_j}{\partial\tau_p\partial\tau_q\partial\tau_r} = \sum_{p=1}^{m}\left(-a_0(x,t)\varphi_p'(t) + u_0(x,t)\right)\frac{\partial V_j}{\partial\tau_p} +$$

$$+\left(V_0\sum_{p=1}^{m}\frac{\partial V_j}{\partial\tau_p}+V_j\sum_{p=1}^{m}\frac{\partial V_0}{\partial\tau_p}\right)+\mathcal{F}_j(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m),\quad j=\overline{1,N}, \tag{13}$$

де функції $\mathcal{F}_j(x,t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$, $j=\overline{1,N}$, визначаються рекурентним чином після знаходження функцій $V_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$, $V_1(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$, $\ldots$, $V_{j-1}(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$.

Рівняння (12) є квазілінійним однорідним диференціальним рівнянням із частинними похідними третього порядку щодо змінних $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m$, а рівняння (13) — лінійними неоднорідними диференціальними рівняннями з частинними похідними щодо цих же змінних, причому згадані рівняння містять t в якості параметра.

Враховуючи, що функції $V_j(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$, $j=\overline{0,m}$, як елементи простору G_m^0 мають на нескінченності певну асимптотику по τ_k, $k=\overline{1,m}$, коефіцієнти сингулярної частини асимптотики можна будувати як розв'язки системи диференціальних рівнянь із частинними похідними вигляду

$$\sum_{p,q,r=1}^{m}\frac{\partial^3V_0}{\partial\tau_p\partial\tau_q\partial\tau_r}=-a_0(\varphi_s(t),t)\sum_{k=1}^{m}\varphi_k'(t)\frac{\partial V_0}{\partial\tau_k}+$$

$$+u_0(\varphi_s(t),t)\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial V_0}{\partial\tau_k}+\sum_{k=1}^{m}V_0\frac{\partial V_0}{\partial\tau_k},\qquad s=\overline{1,m}, \tag{14}$$

$$\sum_{p,q,r=1}^{m}\frac{\partial^3V_j}{\partial\tau_p\partial\tau_q\partial\tau_r}=\sum_{k=1}^{m}\big(u_0(\varphi_s(t),t)-a_0(\varphi_s(t),t)\varphi_k'(t)\big)\frac{\partial V_j}{\partial\tau_k}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\left(V_0\frac{\partial V_j}{\partial\tau_k}+V_j\frac{\partial V_0}{\partial\tau_k}\right)+\mathcal{F}_{js}(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m),\qquad j=\overline{1,N},\quad s=\overline{1,m}. \tag{15}$$

Іншими словами, рівняння (12), (13) для $V_j(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$, $j=\overline{0,m}$, можна розглядати в околі кожної з кривих $x=\varphi_s(t)$, $s=\overline{1,m}$.

Значення функцій $\mathcal{F}_{js}(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$, $j=\overline{1,N}$, при кожному $s=\overline{1,m}$ у (15) знаходяться рекурентним чином після відповідного визначення функцій

$$V_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m),\ V_1(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m),\ldots,\ V_{j-1}(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$$

із рівнянь (14), (15).

У подальшому розглядається питання про побудову головного члена сингулярної частини асимптотики і доводиться оцінка для різниці між точним і побудованим асимптотичним розв'язком задачі (3), (4).

З цією метою розглянемо допоміжне рівняння для визначення головного члена сингулярної частини асимптотики вигляду

$$\sum_{p,q,r=1}^{m}\frac{\partial^3\bar V_0}{\partial\tau_p\partial\tau_q\partial\tau_r}=-\sum_{k=1}^{m}a_0(\varphi_k(t),t)\varphi_k'(t)\frac{\partial\bar V_0}{\partial\tau_k}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}u_0(\varphi_k(t),t)\frac{\partial\bar V_0}{\partial\tau_k}+\sum_{k=1}^{m}\bar V_0\frac{\partial\bar V_0}{\partial\tau_k}, \tag{16}$$

де $u_0(x,t)$ — головний член регулярної частини асимптотики (9), а змінна t розглядається як параметр.

Для знаходження розв'язку рівняння (16) скористаємося формулами для солітонних розв'язків рівняння Кортевега – де Фріза зі сталими коефіцієнтами. Для цього проведемо в (16) редукцію згідно з формулами

$$\tau_k = \xi - \gamma_k(t)\eta, \qquad k = \overline{1,m}, \tag{17}$$

де

$$\gamma_k(t) = -a_0(\varphi_k(t),t)\varphi_k'(t) + u_0(\varphi_k(t),t), \tag{18}$$

ξ, η — нові незалежні змінні.

Очевидно, що у випадку, коли функція

$$\bar{V}_0(\xi,\eta) = \bar{V}_0(\xi - \gamma_1(t)\eta, \xi - \gamma_2(t)\eta, \ldots, \xi - \gamma_m(t)\eta) \tag{19}$$

є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial^3 \bar{V}_0}{\partial \xi^3} - \bar{V}_0 \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \eta} = 0, \tag{20}$$

функція $\bar{V}_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$, яку отримано з (19) з урахуванням (17), задовольняє рівняння (16).

Рівняння (20) за допомогою масштабних перетворень $\xi = \sqrt{6}\,x$, $\eta = 6\sqrt{6}\,\tau$ зводиться до класичного рівняння Кортевега – де Фріза

$$\frac{\partial^3 \bar{V}_0}{\partial x^3} - 6\bar{V}_0 \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \tau} = 0, \tag{21}$$

m-солітонний розв'язок якого записується у вигляді [8, 9]

$$\bar{V}_0(x,\tau) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln\det\left(E + G(x,\tau)\right). \tag{22}$$

Тут E — одинична $(m\times m)$-матриця, коефіцієнти $(m\times m)$-матриці $G = (g_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}$ мають вигляд

$$g_{ij} = g_{ij}(x,\tau) = c_i(\tau)\,c_j(\tau)\,\frac{e^{-(\kappa_i+\kappa_j)x}}{\kappa_i+\kappa_j}, \tag{23}$$

де $c_j(\tau) = c_j(0)\exp\left(4\kappa_j^3\tau\right)$; $\kappa_j > 0$, $j = \overline{1,m}$, — власні значення задачі Штурма – Ліувілля, що асоційована з рівнянням (21), $c_j(0)$, $j = \overline{1,m}$, — довільні дійсні сталі.

Враховуючи структуру матриці $G(x,\tau)$ в (22), можна знайти функцію $\bar{V}_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$, яка є розв'язком допоміжного рівняння (16).

Значення κ_j, $j = \overline{1,m}$, в (23) визначено співвідношеннями

$$\kappa_j^2 = \frac{3}{2}\,\gamma_j(t), \tag{24}$$

де величини $\gamma_j(t)$, $j = \overline{1,m}$, задані формулами (18) і задовольняють умову $\gamma_j(t) > 0$, $j = \overline{1,m}$, при всіх $t \in [0;T]$.

Таким чином, m-солітонний розв'язок рівняння (16) можна записати за допомогою формули

$$\bar{V}_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m) = -2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det\left(E+G(x,\tau)\right)\right)\Bigg|_{\tau_j=\alpha x-\beta\gamma_j\tau,\ j=\overline{1,m}}. \tag{25}$$

У подальшому буде показано, що в якості головного члена сингулярної частини асимптотичного розв'язку (9) рівняння (8) можна взяти функцію $\bar{V}_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)/b_0(x,t)$, де функція $\bar{V}_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$ має вигляд (25) і належить простору G_m^0 за побудовою.

Використовуючи явний вигляд функції $\bar{V}_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$ з (25), можна описати умови для початкової функції $f(x,\varepsilon)$ у (4) задачі Коші (3), (4). Дійсно, поклавши $t=0$, $\tau_k = x/\varepsilon$, $k=\overline{1,m}$, в (25), отримаємо, що функція $u(x,0,\varepsilon)=f(x,\varepsilon)$ повинна належати множині

$$\mathcal{M}^0_{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m}(\varepsilon) =$$

$$= -\frac{2}{b_0(x,0)}\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det\left(E+G(x,\tau)\right)\right)\Bigg|_{\tau_j=\alpha x-\beta\gamma_j\tau,\ j=\overline{1,m}}\right)\Bigg|_{\tau_j:=\frac{x}{\varepsilon},j=\overline{1,m}}, \tag{26}$$

де функції $x=\varphi_j(t)$, $j=\overline{1,m}$, $t\in[0;T]$, такі, що мають місце умови $\gamma_j(t)>0$, $t\in[0;T]$, $j=\overline{1,m}$.

Множина $\mathcal{M}^0_{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m}(\varepsilon)$ називається [22] многовидом початкових умов для задачі про побудову головного члена асимптотичного m-фазового солітоноподібного розв'язку задачі Коші (3), (4).

Таким чином, має місце теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови*:

1) *функції* $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$ *належать* $C^\infty(\mathbf{R}\times[0;T])$ *і такі, що* $a_0(x,t)\neq 0$, $b_0(x,t)\neq 0$ *для всіх* $(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]$;

2) *існують такі функції* $x=\varphi_j(t)\in C^\infty([0;T])$, $j=\overline{1,m}$, *що* $\varphi_j(0)=0$, $j=\overline{1,m}$, *і для них виконуються умови*

$$\gamma_j(t) = -a_0(\varphi_j(t),t)\varphi_j'(t)+u_0(\varphi_j(t),t)>0, \qquad t\in[0;T];$$

3) *задача Коші для квазілінійного рівняння* (10) *з початковою умовою* $u_0(x,0)=g_0(x)$, $x\in\mathbf{R}$, *де функція* $g_0(x)$ *належить* $C^\infty(\mathbf{R})$, *має розв'язок* $u_0(x,t)\in C^\infty(\mathbf{R}\times[0;T])$;

4) *в умові* (4) *початкова функція має вигляд* $f(x,\varepsilon)=g_0(x)+f_0(x,\varepsilon)$, *де* $f_0(x,\varepsilon)\in$ $\in\mathcal{M}^0_{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m}(\varepsilon)$.

Тоді функція

$$Y_0(x,t,\varepsilon) = \frac{u_0(x,t)}{b_0(x,t)}+\frac{1}{b_0(x,t)}\bar{V}_0\left(t,\frac{x-\varphi_1(t)}{\varepsilon},\frac{x-\varphi_2(t)}{\varepsilon},\ldots,\frac{x-\varphi_m(t)}{\varepsilon}\right) \tag{27}$$

є головним членом асимптотичного m*-фазового солітоноподібного розв'язку задачі Коші* (3), (4) *і задовольняє* (*при* $\varepsilon\to 0$) *задачу Коші* (3), (4) *з точністю* $O(1)$.

Доведення. Підставимо функцію $Y_0(x,t,\varepsilon)$ із (27) у рівняння (3) і домножимо отриманий вираз на ε. Тоді, враховуючи рівняння (10) і (16) для головних членів регулярної та сингулярної частин асимптотики (9), бачимо, що для доведення теореми 1 потрібно оцінити вираз

$$g_0(x,t,\varepsilon) = \varepsilon^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{u_0(x,t)}{b_0(x,t)}\right)+3\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{b_0(x,t)}\right)\sum_{p,k=1}^{m}\frac{\partial^2\bar{V}_0}{\partial\tau_p\partial\tau_k}+$$

$$+3\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{b_0(x,t)}\right)\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\bar{V}_0}{\partial\tau_k}+\varepsilon^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{1}{b_0(x,t)}\right)\bar{V}_0-$$

$$-\varepsilon\bar{a}(x,t,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_0(x,t)}{b_0(x,t)}\right)+\frac{\bar{a}(x,t,\varepsilon)}{b_0(x,t)}\sum_{k=1}^{m}\varphi_k'(t)\frac{\partial\bar{V}_0}{\partial\tau_k}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\varphi_k'(t)\frac{a_0(x,t)-a_0(\varphi_k(t),t)}{b_0(x,t)}\frac{\partial\bar{V}_0}{\partial\tau_k}-$$

$$-\varepsilon a(x,t,\varepsilon)\,\bar{V}_0\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{b_0(x,t)}\right)-\varepsilon\frac{\bar{b}(x,t,\varepsilon)}{b_0(x,t)}\;u_0^2\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{b_0(x,t)}\right)-$$

$$-\varepsilon\frac{\bar{b}(x,t,\varepsilon)}{b_0(x,t)}\;u_0\,\frac{\partial u_0}{\partial x}-\varepsilon\frac{b(x,t,\varepsilon)}{b_0(x,t)}\frac{1}{b_0(x,t)}\;u_0\bar{V}_0-$$

$$-\varepsilon\frac{\bar{b}(x,t,\varepsilon)}{b_0(x,t)}\frac{\partial u_0}{\partial x}\,\bar{V}_0-\frac{1}{b_0(x,t)}\sum_{k=1}^{m}\left(u_0(x,t)-u_0(\varphi_k(t),t)\right)\frac{\partial\bar{V}_0}{\partial\tau_k}-$$

$$-\frac{\bar{b}(x,t,\varepsilon)}{b_0^2(x,t)}\sum_{k=1}^{m}u_0(x,t)\,\frac{\partial\bar{V}_0}{\partial\tau_k}-\frac{\bar{b}(x,t,\varepsilon)}{b_0^2(x,t)}\,\bar{V}_0\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\bar{V}_0}{\partial\tau_k}-$$

$$-\frac{\bar{b}(x,t,\varepsilon)}{b_0^2(x,t)}\;u_0(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{b_0(x,t)}\right)\bar{V}_0-\frac{\bar{b}(x,t,\varepsilon)}{b_0^2(x,t)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{b_0(x,t)}\right)\bar{V}_0^2, \tag{28}$$

де

$$\bar{a}(x,t,\varepsilon)=a(x,t,\varepsilon)-a_0(x,t),\qquad \bar{b}(x,t,\varepsilon)=b(x,t,\varepsilon)-b_0(x,t),$$

функцію $\bar{V}_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$ та її частинні похідні за змінними t, τ_k, $k=\overline{1,m}$, обчислено при $\tau_k=(x-\varphi_k(t))/\varepsilon$, $k=\overline{1,m}$.

Покажемо, що в (28) $g_0(x,t,\varepsilon)=O(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$, де $(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]$. Оскільки функції $a(x,t,\varepsilon)$, $b(x,t,\varepsilon)$ належать $C^\infty(\mathbf{R}\times[0;T]\times(0;\varepsilon_0])$, $\bar{a}(x,t,\varepsilon)=O(\varepsilon)$, $\bar{b}(x,t,\varepsilon)=O(\varepsilon)$, $(x,t)\in\in\mathbf{R}\times[0;T]$, при $\varepsilon\to 0$, $\bar{V}_0(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)$ належить G_m^0, то для знаходження асимптотичної оцінки для функції $g_0(x,t,\varepsilon)$, $\varepsilon\to 0$, досить розглянути лише вирази

$$\begin{gathered}\frac{1}{b_0(x,t)}\sum_{k=1}^{m}\varphi_k'(t)\left(a_0(x,t)-a_0(\varphi_s(t),t)\right)\frac{\partial\bar{V}_0}{\partial\tau_k},\\ \frac{1}{b_0(x,t)}\sum_{k=1}^{m}\left(u_0(x,t)-u_0(\varphi_k(t),t)\right)\frac{\partial\bar{V}_0}{\partial\tau_k}.\end{gathered} \tag{29}$$

Оцінимо перший вираз у (29). Для цього розглянемо довільний компакт $K\subset\mathbf{R}\times[0;T]$, який містить криві $\Gamma_k=\{(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]:x=\varphi_k(t),\ t\in[0;T]\}$, $k=\overline{1,m}$, з деяким їх δ-околом. Тоді, оскільки $a_0(x,t)\in C^\infty(\mathbf{R}\times[0;T])$, для всіх $(x,t)\in K$ має місце нерівність

$$|a_0(x,t)-a_0(\varphi_k(t),t)|\le C|x-\varphi_k|,$$

де стала C залежить лише від компакта K.

Отже, для всіх $(x,t)\in K$ маємо

$$\left|\frac{1}{b_0(x,t)}\sum_{k=1}^{m}(a_0(x,t)-a_0(\varphi_k(t),t)){\varphi'}_k(t)\frac{\partial\bar{V}_0}{\partial\tau_k}\right|\leq\varepsilon C\left|\frac{1}{b_0(x,t)}\sum_{k=1}^{m}\tau_k{\varphi'}_k(t)\frac{\partial\bar{V}_0}{\partial\tau_k}\right|. \tag{30}$$

Вираз у правій частині (30) під знаком модуля є обмеженим для всіх $t\in[0;T]$, τ_1, τ_2, ..., $\tau_m\in\mathbf{R}$, оскільки виконуються умови:

1^0) $b_0(x,t)\in C^\infty(\mathbf{R}\times[0;T])$ і $b_0(x,t)\neq0$ для всіх $(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]$;

2^0) $\varphi_k(t)\in C^\infty([0;T])$, $k=\overline{1,m}$, а тому функції ${\varphi'}_k(t)$, $k=\overline{1,m}$, є обмеженими для всіх $t\in[0;T]$;

3^0) функція $\partial\bar{V}_0/\partial\tau_k$ належить простору швидко спадних щодо змінної τ_k функцій при кожному τ_1, τ_2, ..., τ_{k-1}, τ_{k+1}, ..., $\tau_m\in\mathbf{R}$.

Таким чином, перший вираз у (29) має порядок ε.

Аналогічно показується, що й інший вираз у (29) має порядок ε.

Отже, $g_0(x,t,\varepsilon)=O(\varepsilon)$, $(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]$, $\varepsilon\to0$, тобто функція $Y_0(x,t,\varepsilon)$ задовольняє рівняння (3) з точністю $O(1)$. Крім того, згідно з умовою 4 теореми 1 функція $Y_0(x,t,\varepsilon)$ задовольняє початкову умову (4) з точністю $O(1)$, $\varepsilon\to0$.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай виконуються такі умови*:

1) *справджуються умови* 1, 2, 4 *теореми* 1;

2) *функція* $a(x,t,\varepsilon)$, *має вигляд* $a(x,t,\varepsilon)=a(x,\varepsilon)$, $\varepsilon\in[0;\varepsilon_0]$, *і задовольняє умову* $c_1\leq$ $\leq a(x,\varepsilon)\leq c_2$, $x\in\mathbf{R}$, *де сталі* c_1 *та* c_2 *такі, що* $c_1c_2>0$;

3) *існує розв'язок* $u=u(x,t,\varepsilon)$ *задачі Коші* (3), (4), *що належить простору* $C^\infty(0,T;S)$, *для якого має місце нерівність*

$$|||u(x,t,\varepsilon)-Y_0(x,t,\varepsilon)|||\Big|_{t=0}\leq C\varepsilon,$$

де C *— деяка стала, що не залежить від* ε, *норму* $|||\cdot|||$ *визначено згідно з формулою* [19]

$$|||f|||=\sqrt{\|f\|^2+\varepsilon^4\|f_{xx}\|^2},$$

де

$$\|f\|=\left(\int\limits_{\mathbf{R}}f^2(x,t,\varepsilon)dx\right)^{1/2};$$

4) *розв'язок задачі Коші для рівняння* (10) *з початковою умовою* $u_0(x,0)=g_0(x)$, $x\in\mathbf{R}$, *де функція* $g_0(x)\in S(\mathbf{R})$, *належить простору* $C^\infty(0,T;S)$.

Тоді для точного та наближеного розв'язків задачі Коші (3), (4) *має місце оцінка вигляду*

$$|||u(x,t,\varepsilon)-Y_0(x,t,\varepsilon)|||^2\leq C_0\varepsilon^{3/2},\qquad t\in[0;\varepsilon^2T], \tag{31}$$

де C_0 *— деяка стала, що не залежить від* ε, T *— деяке додатне число.*

При доведенні теореми 2 необхідно оцінити певні інтеграли по проміжку $\mathbf{R}$ від виразів, що містять функцію із простору швидко спадних функцій та її похідні. Тому встановимо спочатку допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай функція $f(x)$ належить $S(\mathbf{R})$. Тоді мають місце нерівності*

$$\int\limits_{\mathbf{R}} \left| f^2(x) f'(x) \right| dx \leq \ \|f\|^2 \ \sup_{x\in\mathbf{R}} (1 + |f^{'}(x)|^2), \tag{32}$$

$$\int\limits_{\mathbf{R}} \left| \, f(x)(f''(x))^2 \right| dx \leq \ \|f''\|^2 \ \sup_{x\in\mathbf{R}} (1 + |f(x)|^2), \tag{33}$$

$$\int\limits_{\mathbf{R}} \left| \, f'(x)(f''(x))^2 \right| dx \leq \ \|f''\|^2 \ \sup_{x\in\mathbf{R}} (1 + |f^{'}(x)|^2), \tag{34}$$

$$\int\limits_{\mathbf{R}} \left| \, f(x) f'(x) f^{''}(x) \right| dx \leq \ \|f\| \ \|f''\| \ \sup_{x\in\mathbf{R}} (1 + |f^{'}(x)|^2), \tag{35}$$

$$\int\limits_{\mathbf{R}} \left| \, (f'(x))^2 f^{''}(x) \right| dx \leq \ \|f'\| \ \|f''\| \ \sup_{x\in\mathbf{R}} (1 + |f^{'}(x)|^2). \tag{36}$$

При доведенні співвідношень (32) – (36) використовуються нерівність Буняковського [29, с. 566, 914] і загальні властивості функцій із простору $S(\mathbf{R})$.

Лема 2. *Нехай функція $b(x)$ належить $C^2(\mathbf{R})$ і задовольняє для всіх $x \in \mathbf{R}$ та деякої сталої $C > 0$ умову $\max(|b(x)|, |b'(x)|, |b''(x)|) < C$. Тоді для довільної функції $f(x) \in S(\mathbf{R})$ справджуються оцінки*

$$\left| \int\limits_{\mathbf{R}} b(x) f^2(x) f'(x) dx \right| \leq C \|f\|^2 \left(1 + 2 \, \|f''\| \sqrt{\|f\| \ \|f''\|} \, \right), \tag{37}$$

$$\left| \int\limits_{\mathbf{R}} b(x) f(x) f'(x) f^{(IV)}(x) dx \right| \leq$$

$$\leq C \|f\| \ \left[\, \|f\| + 4\|f''\| + 4\|f\| \, \|f''\|^2 + \left(2 + 5\|f\| \, \|f''\| + 5\|f''\|^2 \, \right) \sqrt{\|f\| \ \|f''\|} \, \right]. \tag{38}$$

Доведення. Оскільки для будь-якої функції $f(x)$ із простору швидко спадних функцій $S(\mathbf{R})$ виконуються рівності

$$|f(x)|^2 = 2 \int\limits_{-\infty}^{x} f(x) f'(x) dx, \quad \int\limits_{\mathbf{R}} |f'(x)|^2 dx = \left| \ \int\limits_{\mathbf{R}} f(x) f''(x) dx \ \right|, \tag{39}$$

то на підставі нерівності Буняковського звідси знаходимо

$$|f(x)|^2 \leq 2 \|f\| \ \|f'\|, \quad \|f'\|^2 \leq \|f\| \|f''\|, \tag{40}$$

тобто

$$|f(x)|^2 \leq \ 2 \, \|f\| \sqrt{\|f\| \ \|f''\|}. \tag{41}$$

З огляду на те, що для всіх $f(x) \in S(\mathbf{R})$ виконується тотожність

$$|f'(x)|^2 = 2 \int\limits_{-\infty}^{x} f'(x)\, f''(x) dx,$$

на підставі нерівності Буняковського, враховуючи (40), аналогічно (41) отримуємо

$$|f'(x)|^2 \leq \ 2\, \|f''\| \sqrt{\|f'\|\ \|f''\|}. \tag{42}$$

Тоді з (32) і (42) випливає нерівність (37).

Тепер покажемо, що має місце нерівність (38). Розглянемо вираз у лівій частині цієї нерівності. Враховуючи, що $f(x) \in S(\mathbf{R})$, інтегруванням за частинами знаходимо

$$\int\limits_{\mathbf{R}} b(x) f(x) f'(x) f^{(IV)}(x) dx = \frac{5}{2} \int\limits_{\mathbf{R}} b(x) f'(x) (f''(x))^2 dx +$$

$$+ \frac{3}{2} \int\limits_{\mathbf{R}} b'(x) f(x) (f''(x))^2 dx + 2 \int\limits_{\mathbf{R}} b'(x) (f'(x))^2 f''(x) dx + \int\limits_{\mathbf{R}} b''(x) f(x) f'(x) f''(x) dx. \tag{43}$$

Оцінимо кожен із доданків правої частини рівності (43). Враховуючи умови леми 2, нерівність (42) та співвідношення (34), (33), (36), (35) відповідно, маємо

$$\left| \int\limits_{\mathbf{R}} b(x) f'(x) (f''(x))^2 dx \right| \leq C \|f''\|^2 \left(1\ + 2\|f''\| \sqrt{\|f\|\ \|f''\|} \right),$$

$$\left| \int\limits_{\mathbf{R}} b'(x) f(x) (f''(x))^2 dx \right| \leq C\, \|f''\|^2 \left(1 + 2\|f\| \sqrt{\|f\|\ \|f''\|} \right),$$

$$\left| \int\limits_{\mathbf{R}} b'(x) (f'(x))^2 f''(x) dx \right| \leq C\, \|f''\| \sqrt{\|f\|\ \|f''\|} \left(1 + 2\, \|f''\| \sqrt{\|f\|\ \|f''\|} \right),$$

$$\left| \int\limits_{\mathbf{R}} b''(x) f(x) f'(x) f''(x) dx \right| \leq C \|f\|\ \|f''\| \left(1 + 2\|f''\|\ \sqrt{\|f\|\ \|f''\|} \right),$$

звідки випливає нерівність (38).

Лему 2 доведено.

Лема 3. *Нехай функція $b(x)$ задовольняє умови леми 2. Тоді для всіх функцій $f(x)$, $g(x) \in \in S(\mathbf{R})$ виконуються нерівності*

$$\left| \int\limits_{\mathbf{R}} b(x)\, f(x)\ (\, f(x)\, g(x)\,)'\ dx \right| \leq \|f\| \sqrt{\|f\|\, \|f''\|}\ \sup_{x \in \mathbf{R}} |b(x) g(x)|, \tag{44}$$

$$\left| \int_{\mathbf{R}} b(x)\,(f(x)g(x))'\,f^{(IV)}(x)\,dx \right| \leq \|f\|\,\|f''\| \sup_{x\in\mathbf{R}} |h_1'(x)| +$$

$$+\|f''\|\,\sqrt{\|f\|\,\|f''\|}\,\sup_{x\in\mathbf{R}} |h_2'(x)| + \|f''\|^2 \sup_{x\in\mathbf{R}} |h_3'(x)|, \tag{45}$$

де

$$h_1(x) = b'(x)g'(x) + b(x)g''(x),$$

$$h_2(x) = b'(x)g(x) + 3b(x)g'(x), \qquad h_3(x) = \frac{3}{2}\,b(x)g(x). \tag{46}$$

Доведення. Встановимо спочатку нерівність (44). Оскільки $f(x)$, $g(x)$ належать $S(\mathbf{R})$, то має місце рівність

$$\int_{\mathbf{R}} b(x)f(x)(f(x)g(x))'\,dx =$$

$$= -\int_{\mathbf{R}} b'(x)f^2(x)g(x)\,dx - \int_{\mathbf{R}} b(x)f(x)f'(x)g(x)\,dx. \tag{47}$$

Оцінюючи кожен із доданків правої частини рівності (47), знаходимо

$$\left| \int_{\mathbf{R}} b'(x)f^2(x)g(x)\,dx \right| \leq \|f\|^2 \sup_{x\in\mathbf{R}} |b'(x)g(x)|,$$

$$\left| \int_{\mathbf{R}} b(x)f(x)f'(x)g(x)\,dx \right| \leq \|f\|\sqrt{\|f\|\,\|f''\|}\,\sup_{x\in\mathbf{R}} |b(x)g(x)|,$$

звідки випливає нерівність (44).

Доведемо нерівність (45). Інтегруючи двічі частинами і враховуючи, що $f(x)$, $g(x) \in S(\mathbf{R})$, ліву частину (45) можна записати таким чином:

$$\int_{\mathbf{R}} b(x)\,(f(x)g(x))'\,f^{(IV)}(x)dx = \int_{\mathbf{R}} h_1'(x)f(x)f''(x)dx +$$

$$+\int_{\mathbf{R}} h_2'(x)f'(x)f''(x)dx + \int_{\mathbf{R}} h_3'(x)(f''(x))^2dx. \tag{48}$$

Тоді, враховуючи умови леми 3 і використовуючи нерівність Буняковського, для кожного з інтегралів у правій частині (48) отримуємо

$$\left| \int_{\mathbf{R}} h_1'(x)f(x)f''(x)dx \right| \leq \|f\|\,\|f''\| \sup_{x\in\mathbf{R}} |h_1'(x)|,$$

$$\left| \int\limits_{\mathbf{R}} h_2'(x) f'(x) f''(x) dx \right| \leq \|f''\| \sqrt{\|f\| \|f''\|} \sup_{x \in \mathbf{R}} |h_2'(x)|,$$

$$\left| \int\limits_{\mathbf{R}} h_3'(x) (f''(x))^2 dx \right| \leq \|f''\|^2 \sup_{x \in \mathbf{R}} |h_3'(x)|,$$

звідки випливає твердження леми 3.

Доведення теореми 2. Для отримання оцінки (31) зведемо рівняння (3) за допомогою заміни $\tau = t/a(x,\varepsilon)$ до рівняння вигляду

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = u_\tau + b(x, a(x,\varepsilon)\tau, \varepsilon) u u_x.$$

Далі будемо використовувати позначення $b_1(x,\tau,\varepsilon) = b(x, a(x,\varepsilon)\tau, \varepsilon)$, тобто розглядати рівняння вигляду

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = u_\tau + b_1(x,\tau,\varepsilon) u u_x, \tag{49}$$

яке еквівалентне рівнянню (3) згідно з умовою 2 теореми 2.

Розглянемо різницю $\omega(x,\tau,\varepsilon) = u(x,\tau,\varepsilon) - \widetilde{Y}_0(x,\tau,\varepsilon)$, де $u(x,t,\varepsilon)$ — розв'язок рівняння (49), $\widetilde{Y}_0(x,\tau,\varepsilon) = Y_0(x, a(x,\varepsilon)\tau, \varepsilon)$. Нагадаємо, що функцію $Y_0(x, a(x,t,\varepsilon), \varepsilon)$ визначено формулою (27).

Враховуючи рівність $u(x,\tau,\varepsilon) = \omega(x,\tau,\varepsilon) + \widetilde{Y}_0(x,\tau,\varepsilon)$, для функції $\omega = \omega(x,\tau,\varepsilon)$ знаходимо рівняння

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} = \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + b_1(x,\tau,\varepsilon)\, \omega\, \frac{\partial \omega}{\partial x} + b_1(x,\tau,\varepsilon)\, \frac{\partial}{\partial x} \left(\omega\, \widetilde{Y}_0(x,\tau,\varepsilon)\right) + h_0(x,\tau,\varepsilon), \tag{50}$$

де

$$h_0(x,\tau,\varepsilon) = \frac{\partial \widetilde{Y}_0(x,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} + b_1(x,\tau,\varepsilon)\, \widetilde{Y}_0(x,\tau,\varepsilon)\, \frac{\partial \widetilde{Y}_0(x,\tau,\varepsilon)}{\partial x} - \varepsilon^2\, \frac{\partial^3 \widetilde{Y}_0(x,\tau,\varepsilon)}{\partial x^3}.$$

Зауважимо, що з побудови асимптотичного розв'язку $Y_0(x,t,\varepsilon)$ випливає асимптотичне співвідношення $h_0(x,\tau,\varepsilon) = O(1)$, $\varepsilon \to 0$.

Домножимо рівняння (50) на вираз $\omega + \varepsilon^4 \omega_{xxxx}$ та зінтегруємо отримане співвідношення за змінною x в межах від $-\infty$ до $+\infty$. Враховуючи, що $\omega(x,\tau,\varepsilon) \in C^\infty(0,T;S)$, отриману рівність можна записати таким чином:

$$0 = \int\limits_{\mathbf{R}} \left(\omega + \varepsilon^4 \omega_{xxxx}\right) \omega_\tau\, dx + \int\limits_{\mathbf{R}} b_1(x,\tau,\varepsilon) \left(\omega + \varepsilon^4 \omega_{xxxx}\right) \omega \omega_x\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\mathbf{R}} b_1(x,\tau,\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x} \left(\omega \widetilde{Y}_0(x,\tau,\varepsilon)\right) \left(\omega + \varepsilon^4 \omega_{xxxx}\right) dx + \int\limits_{\mathbf{R}} h_0(x,\tau,\varepsilon) \left(\omega + \varepsilon^4 \omega_{xxxx}\right) dx. \tag{51}$$

Оцінимо кожен із доданків у (51). Оскільки $\omega(x,\tau,\varepsilon) \in C^\infty(0,T;S)$, то маємо рівності

$$\int\limits_{\mathbf{R}} \omega\, \omega_\tau\, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} ||\omega||^2, \qquad \int\limits_{\mathbf{R}} \omega_\tau\, \omega_{xxxx}\, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau}\, ||\omega_{xx}||^2\,,$$

а отже,

$$\int_{\mathbf{R}} \left(\omega + \varepsilon^4 \omega_{xxxx}\right) \omega_\tau dx = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} |||\omega|||^2.$$

З леми 2 випливає нерівність

$$\left| \int_{\mathbf{R}} b_1(x,\tau,\varepsilon) \left(\omega + \varepsilon^4 \omega_{xxxx}\right) \omega\, \omega_x \, dx \right| \le$$

$$\le 2C\|\omega\|^2 \left(1 + \|\omega''\| \sqrt{\|\omega\| \, \|\omega''\|}\right) +$$

$$+\varepsilon^4 C\|\omega\| \left[4\|\omega''\| + 4\|\omega\| \, \|\omega''\|^2 + (2 + 5\|\omega\| \, \|\omega''\| + 5\|\omega''\|^2) \sqrt{\|\omega\| \, \|\omega''\|}\right]. \tag{52}$$

З леми 3 (див. (44), (45)) випливає нерівність

$$\left| \int_{\mathbf{R}} b_1(x,\tau,\varepsilon) \frac{d}{dx} \left(\omega \widetilde{Y}_0(x,\tau,\varepsilon)\right) \left(\omega + \varepsilon^4 \omega_{xxxx}\right) \omega\, \omega_x \, dx \right| \le$$

$$\le \varepsilon^4 \|\omega\| \, \|\omega''\| \sup_{x\in\mathbf{R}} |A_1(x,\tau,\varepsilon)| + \varepsilon^4 \|\omega''\|^2 \sup_{x\in\mathbf{R}} |A_2(x,\tau,\varepsilon)| +$$

$$+\sqrt{\|\omega\| \, \|\omega''\|} \left(\|\omega\| \sup_{x\in\mathbf{R}} |A_3(x,\tau,\varepsilon)| + \varepsilon^4 \|\omega''\| \sup_{x\in\mathbf{R}} |A_4(x,\tau,\varepsilon)|\right), \tag{53}$$

де

$$A_1(x,\tau,\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial b_1(x,\tau,\varepsilon)}{\partial x} \frac{\partial \widetilde{Y}_0(x,\tau,\varepsilon)}{\partial x} + b_1(x,\tau,\varepsilon) \frac{\partial^2 \widetilde{Y}_0(x,\tau,\varepsilon)}{\partial x^2} \right),$$

$$A_2(x,\tau,\varepsilon) = \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(b_1(x,\tau,\varepsilon) \widetilde{Y}_0(x,\tau,\varepsilon)\right), \qquad A_3(x,\tau,\varepsilon) = b_1(x,\tau,\varepsilon) \widetilde{Y}_0(x,\tau,\varepsilon), \tag{54}$$

$$A_4(x,\tau,\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial b_1(x,\tau,\varepsilon)}{\partial x} \widetilde{Y}_0(x,\tau,\varepsilon) + 3\, b_1(x,\tau,\varepsilon) \frac{\partial \widetilde{Y}_0(x,\tau,\varepsilon)}{\partial x} \right).$$

Враховуючи, що функції $h_0(x,\tau,\varepsilon)$, $\omega(x,\tau,\varepsilon)$ належать простору швидко спадних щодо змінної x функцій, маємо

$$\left| \int_{\mathbf{R}} h_0\, \omega \, dx \right| \le \|h_0\| \, \|\omega\|, \qquad \left| \int_{\mathbf{R}} h_0\, \omega_{xxxx} \, dx \right| \le \|h_{0xx}\| \, \|\omega_{xx}\|, \tag{55}$$

звідки отримуємо

$$\left| \int_{\mathbf{R}} h_0 \,\left(\omega + \varepsilon^4 \omega_{xxxx}\right) \, \omega \, dx \right| \le \|h_0\| \, \|\omega\| + \varepsilon^4 \|h_{0xx}\| \, \|\omega_{xx}\|.$$

Тоді, враховуючи (52) – (55), з (51) знаходимо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}|||\omega|||^2 \leq 2C\|\omega\|^2\left(1+\ \|\omega''\|\sqrt{\|\omega\|\ \|\omega''\|}\right)+$$

$$+\varepsilon^4 C\|\omega\|\ \left[4\|\omega''\|+4\|\omega\|\ \|\omega''\|^2+\left(2+5\|\omega\|\ \|\omega''\|+5\|\omega''\|^2\right)\sqrt{\|\omega\|\ \|\omega''\|}\right]+$$

$$+\varepsilon^4\|\omega\|\ \|\omega''\|\sup_{x\in\mathbf{R}}|A_1(x,\tau,\varepsilon)|+\varepsilon^4\|\omega''\|^2\ \sup_{x\in\mathbf{R}}|A_2(x,\tau,\varepsilon)|+$$

$$+\sqrt{\|\omega\|\ \|\omega''\|}\ \left(\|\omega\|\ \sup_{x\in\mathbf{R}}|A_3(x,\tau,\varepsilon)|+\varepsilon^4\|\omega''\|\ \sup_{x\in\mathbf{R}}|A_4(x,\tau,\varepsilon)|\right)+$$

$$+\|h_0\|\ \|\omega\|+\|\varepsilon^2 h_{0xx}\|\ \|\varepsilon^2\omega_{xx}\|, \tag{56}$$

де функції $A_k(x,\tau,\varepsilon)$, $k=\overline{1,4}$, визначено згідно з формулами (54).

Зауважимо, що функції $A_k(x,\tau,\varepsilon)$, $k=\overline{1,4}$, при $\varepsilon\to 0$ задовольняють асимптотичні співвідношення

$$A_1(x,\tau,\varepsilon)=O(\varepsilon^{-3}),\qquad A_2(x,\tau,\varepsilon)=O(\varepsilon^{-1}),$$

$$A_3(x,\tau,\varepsilon)=O(\varepsilon^{-1}),\qquad A_4(x,\tau,\varepsilon)=O(\varepsilon^{-2}).$$

Перетворимо праву частину нерівності (56) таким чином, щоб отримати функцію від $|||\omega|||^2=\|\omega\|^2+\varepsilon^4\|\omega_{xxxx}\|^2$. З цією метою розглянемо такі випадки:

a) $||\omega||\geq 1,\ \ ||\varepsilon^2\omega_{xx}||\geq 1;$

b) $||\omega||\leq 1,\ \ ||\varepsilon^2\omega_{xx}||\leq 1;$

c) $||\omega||\leq 1,\ \ ||\varepsilon^2\omega_{xx}||\geq 1;$

d) $||\omega||\geq 1,\ \ ||\varepsilon^2\omega_{xx}||\leq 1.$

Позначимо $y=y(\tau)=|||\omega|||^2$. Тоді у випадку a) з нерівності (56) отримуємо співвідношення

$$\frac{1}{2}\frac{dy}{d\tau}\leq C_1\varepsilon^{-3}y^4+C_2, \tag{57}$$

де C_1, C_2 — деякі сталі, що не залежать від малого параметра ε. Звідси, виділивши повний квадрат та інтегруючи, врахувавши умову 3 теореми 2, знаходимо

$$y(\tau)\leq C_3\varepsilon^{3/2},\quad \tau\in[0;\varepsilon^{3/2}T],$$

де C_3 — деяка стала.

У випадку b) з нерівності (56) одержуємо співвідношення

$$\frac{1}{2}\frac{dy}{d\tau}\leq C_4\varepsilon^{-3}y^{3/2}+C_5, \tag{58}$$

де C_4, C_5 — деякі сталі, що не залежать від малого параметра ε. Звідси, інтегруючи та враховуючи умову 3 теореми 2, знаходимо

$$y(\tau)\leq C_6\varepsilon^2,\quad \tau\in[0;\varepsilon^2 T],$$

де $C_6 > 0$ — деяка стала.

У випадках c), d) з нерівності (56) отримуємо співвідношення

$$\frac{1}{2}\frac{dy}{d\tau} \leq C_7\varepsilon^{-3}y^4 + C_8, \tag{59}$$

де C_7, C_8 — деякі сталі, що не залежать від малого параметра ε. Звідси, як і у випадку a), знаходимо нерівність

$$y(\tau) \leq C_9\varepsilon^{3/2}, \qquad \tau \in [0; \varepsilon^{3/2}T],$$

де $C_9 > 0$ — деяка стала.

Враховуючи умову 2 теореми 2, з (57) – (59) отримуємо нерівність (31).

Теорему 2 доведено.

Висновки. У цій статті описано множину початкових умов, для яких задача Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами має асимптотичний m-фазовий солітоноподібний розв'язок. Запропоновано поняття многовиду початкових значень для задачі Коші, при яких такий розв'язок існує. Доведено теорему про оцінку між точним і побудованим асимптотичним розв'язком згаданої вище задачі.

1. *Lax P. D., Levermore C. D.* The small dispersion limit of the Korteweg – de Vries equation. I // Communs Pure and Appl. Math. – 1983. – **36**, № 3. – P. 253 – 290.
2. *Lax P. D., Levermore C. D.* The small dispersion limit of the Korteweg – de Vries equation. II // Communs Pure and Appl. Math. – 1983. – **36**, № 5. – P. 571 – 593.
3. *Lax P. D., Levermore C. D.* The small dispersion limit of the Korteweg – de Vries equation. III // Communs Pure and Appl. Math. – 1983. – **36**, № 6. – P. 809 – 829.
4. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Communs Pure and Appl. Math. – 1950. – **3**. – P. 201 – 230.
5. *Cole J. D.* On a quasi-linear parabolic equation occuring in aerodynamics // Quart. Appl. Math. – 1951. – **9**. – P. 225 – 236.
6. *McLaughlin D. W., Strain J. A.* Computing the weak limit of KdV // Communs Pure and Appl. Math. – 1994. – **47**, № 10. – P. 1319 – 1364.
7. *Маслов В. П., Омельянов Г. А.* Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, вып. 3 (219). – С. 63 – 124.
8. *Gardner C. S., Greene J. M., Kruscal M. D., Miura R. M.* Korteweg – de Vries equation and generalizations. VI. Methods for exact solutions // Communs Pure and Appl. Math. – 1974. – **27**. – P. 97 – 133.
9. *Hirota R.* Exact solutions of the Korteweg – de Vries equation for multiple collisions of solutions // Phys. Rev. Lett. – 1971. – **27**. – P. 1192 – 1194.
10. *Sjoberg A.* On the Korteweg – de Vries equation: existence and uniqueness // J. Math. Anal. and Appl. – 1970. – **29**, № 3. – P. 569 – 579.
11. *Хруслов Е. Я.* Асимптотика решения задачи Коши для уравнения Кортевега – де Фриза с начальными данными типа ступеньки // Мат. сб. – 1976. – **99 (141)**, № 2. – С. 261 – 281.
12. *Egorova I., Grunert K., Teschl G.* On Cauchy problem for the Korteweg – de Vries equation with step-like finite gap initial data I. Schwartz-type perturbations // Nonlinearity. – 2009. – **22**. – P. 1431 – 1457.
13. *Баранецкий В. Б., Котляров В. П.* Асимптотическое поведение в области заднего фронта решения уравнения КдФ с начальным условием "типа ступеньки" // Теор. и мат. физика. – 2001. – **126**, № 2. – С. 214 – 227.
14. *Kato T.* On the Korteweg – de Vries equation // Manuscr. math. – 1979. – **28**. – P. 89 – 99.
15. *Якупов В. М.* О задаче Коши для уравнения Кортевега – де Фриса // Дифференц. уравнения. – 1976. – **11**, № 3. – С. 556 – 561.
16. *Аркадьев В. А., Погребков А. К., Поливанов М. К.* Сингулярные решения уравнения КдВ и метод обратной задачи // Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. IV: Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1984. – **133**. – С. 17 – 37.

17. *Похожаев С. И.* О сингулярных решениях уравнения Кортевега – де Фриза // Мат. заметки. – 2010. – **88**, вып. 5. – С. 770 – 777.
18. *Похожаев С. И.* Об отсутствии глобальных решений уравнения Кортевега – де Фриза // Совр. математика. Фундам. направления. – 2011. – **39**. – С. 141 – 150.
19. *Фаминский А. В.* Задача Коши для уравнения Кортевега – де Фриза и его обобщений // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. – 1988. – Вып. 13. – С. 56 – 105.
20. *Кружков С. Н., Фаминский А. В.* Обобщенные решения задачи Коши для уравнения Кортевега – де Фриза // Мат. сб. – 1983. – **120**, № 3. – С. 396 – 425.
21. *Faminskii A. V., Bashlykova I. Yu.* Weak solutions to one initial-boundary value problem with three boundary conditions for quasilinear evolution equations of the third order // Ukr. Math. Bull. – 2008. – **5**, № 1. – P. 83 – 98.
22. *Самойленко В. Г., Самойленко Ю. І.* Двофазові солітоноподібні розв'язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 11. – С. 1515 – 1530.
23. *Маслов В. П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
24. *Самойленко В. Г., Самойленко Ю. І.* Асимптотичні m-фазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 7. – С. 970 – 987.
25. *Самойленко Ю. І.* Однофазові солітоноподібні розв'язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами (випадок спеціальних початкових умов) // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **9**, № 2. – С. 327 – 340.
26. *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
27. *Maslov V. P., Omel'yanov G. A.* Geometric asymptotics for PDE. I. – Providence: Amer. Math. Soc., 2001. – 243 p.
28. *Самойленко Ю. І.* Існування в просторі швидко спадних функцій та властивості розв'язку рівняння з частинними похідними першого порядку з квадратичною нелінійністю // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 1. – С. 316 – 325.
29. *Математическая* энциклопедия: В 5 т. – М.: Сов. энцикл., 1977. – Т. 1. – 1151 с.

Одержано 26.02.14