УДК 512.662.5

Н. А. Хмельницкий (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

ТЕОРЕМА КОКРОФТА – СВОНА ДЛЯ ПРОЕКТИВНЫХ СКРЕЩЕННЫХ ЦЕПНЫХ КОМПЛЕКСОВ

The Cockcroft – Swan theorem is proved for n-dimensional projective crossed chain complexes (P_i, G, ∂_i) in which $G = A * F$ is a free product of a fixed group A by a free finitely generated group F.

Доведено теорему Кокрофта – Свона для n-вимірних проективних схрещених ланцюгових комплексів (P_i, G, ∂_i), в яких $G = A * F$ — вільний добуток деякої фіксованої групи A на вільну скінченнопороджену групу F.

1. Введение. Кокрофт и Свон [1] доказали, что гомотопически эквивалентные проективные (свободные) комплексы можно стабилизировать проективными (свободными) модулями до цепной эквивалентности, и применили этот результат к изучению гомотопических типов неодносвязных двумерных CW-комплексов. Автор в статье [2] получил необходимые и достаточные условия в случае, когда n-мерные цепные комплексы, составленные из конечнопорожденных проективных модулей, можно стабилизировать свободными модулями до цепной эквивалентности. В. В. Шарко [3] доказал аналог теоремы Кокрофта – Свона для свободных скрещенных цепных комплексов. Браун, Хиггинс и Сивер в монографии [4] с энциклопедической полнотой описали современные достижения в неабелевой алгебраической топологии, в частности рассмотрели основные понятия, используемые в данной статье. Цель данной статьи — доказать аналог теоремы Кокрофта – Свона для проективных скрещенных цепных комплексов.

2. Предварительные сведения. Пусть $\mathscr{C}$ — произвольная категория, а $f\colon A_0 \to B_0$ и $\widetilde{f}\colon A_1 \to B_1$ — морфизмы в ней. Будем говорить, что морфизм $\widetilde{f}$ сохраняет морфизм f, если существуют мономорфизм $\iota : A_0 \to A_1$ и эпиморфизм $\pi\colon B_1 \to B_0$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & A_1 \arrow[d, "\widetilde{f}"] \\ B_0 & B_1 \arrow[l, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $f = \pi \widetilde{f} \iota$. Легко видеть, что отношение «сохранять морфизм» является транзитивным, т. е. если морфизм h сохраняет морфизм g, а морфизм g — морфизм f, то h сохраняет f.

Далее, пусть $\mathscr{C}$ — категория с конечным копроизведением $\oplus$ и нулевым объектом 0. Утолщением морфизма $f\colon A \to B$ с помощью объекта C называется морфизм $\widehat{f}_C : A \oplus C \to B$ такой, что $\widehat{f}_C = f \oplus 0$. Стабилизацией морфизма $f\colon A \to B$ с помощью объекта C называется морфизм $f^{st}_C : A \oplus C \to B \oplus C$ такой, что $f^{st}_C = f \oplus \mathrm{id}_C$. Очевидно, что утолщение $\widehat{f}_C$ и стабилизация f^{st}_C сохраняют морфизм f. Отметим, что в категории групп копроизведение обозначается через $*$.

Пусть A — некоторая фиксированная группа. Рассмотрим категорию $\mathscr{F}_A$, объектами которой являются свободные произведения $A * F$ группы A на свободные конечнопорожденные группы F, а морфизмами — все гомоморфизмы $\varphi\colon A * F_1 \to A * F_2$, действующие тождественно на A. Объекты категории $\mathscr{F}_A$ будем называть конечносвободными A-группами, а морфизмы — стабильными A-гомоморфизмами.

Лемма 1. *Пусть задана коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} 1 & H \arrow[l] \arrow[d, "\varphi_*"'] & G \arrow[l, "\pi"'] \arrow[d, "\varphi"'] \\ 1 & H' \arrow[l] & G' \arrow[l, "\pi'"'] \end{tikzcd}$$

с конечносвободными A-группами $G = A * F$ и $G' = A * F'$, стабильным A-гомоморфизмом φ и изоморфизмом φ_*. Тогда существует сохраняющий отображение φ изоморфизм $\widetilde{\varphi}\colon G * F' \simeq \simeq G' * F$ такой, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} 1 & H \arrow[l] \arrow[d, "\varphi_*"'] & G * F' \arrow[l, "\widetilde{\pi}"'] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"'] \\ 1 & H' \arrow[l] & G' * F, \arrow[l, "\widetilde{\pi}'"'] \end{tikzcd} \qquad (1)$$

где $\widetilde{\pi} = \pi * 0$ и $\widetilde{\pi}' = \pi' * 0$ — утолщения гомоморфизмов π и π' с помощью свободных групп F' и F соответственно.

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_s$ — базис группы F, а $x'_1, \ldots, x'_t$ — базис группы F'. Тогда

$$G * F' = \langle A,\ x_1, \ldots, x_s,\ x'_1, \ldots, x'_t \rangle, \quad \text{а} \quad G' * F = \langle A,\ x'_1, \ldots, x'_t,\ x_1, \ldots, x_s \rangle.$$

Пусть $\varphi(x_i) = y'_i$ $(\in G')$ для $i = \overline{1, s}$, а y_j $(\in G)$ — произвольный элемент из $\pi^{-1}\varphi_*^{-1}\pi'(x'_j)$ для $j = \overline{1, t}$. Тогда в силу преобразований Тице

$$G * F' = \langle A,\ x_1, \ldots, x_s,\ y_1x'_1, \ldots, y_tx'_t \rangle \quad \text{и} \quad G' * F = \langle A,\ x'_1, \ldots, x'_t,\ y'_1x_1, \ldots, y'_sx_s \rangle.$$

Построим отображение $\widetilde{\varphi}\colon G * F' \to G' * F$. Для этого положим $\widetilde{\varphi}(a) = a = \varphi(a)$, $\widetilde{\varphi}(x_i) = y'_ix_i$ и $\widetilde{\varphi}(y_jx'_j) = x'_j$ для произвольных $a \in A$, $i = \overline{1, s}$, $j = \overline{1, t}$ и продолжим $\widetilde{\varphi}$ на всю группу. Из построения отображения видно, что $\widetilde{\varphi}$ — изоморфизм. Поскольку

$$\widetilde{\pi}'\widetilde{\varphi}(a) = \widetilde{\pi}'(a) = \pi'(a) = \pi'\varphi(a) = \varphi_*\pi(a) = \varphi_*\widetilde{\pi}(a),$$
$$\widetilde{\pi}'\widetilde{\varphi}(x_i) = \widetilde{\pi}'(y'_ix_i) = \widetilde{\pi}'(y'_i)\widetilde{\pi}'(x_i) = \widetilde{\pi}'(y'_i) = \pi'(y'_i) = \pi'\varphi(x_i) = \varphi_*\pi(x_i) = \varphi_*\widetilde{\pi}(x_i),$$
$$\widetilde{\pi}'\widetilde{\varphi}(y_jx'_j) = \widetilde{\pi}'(x'_j) = \pi'(x'_j) = \varphi_*\pi\pi^{-1}\varphi_*^{-1}\pi'(x'_j) = \varphi_*\pi(y_j) = \varphi_*\widetilde{\pi}(y_j) =$$
$$= \varphi_*(\widetilde{\pi}(y_j)\widetilde{\pi}(x'_j)) = \varphi_*\widetilde{\pi}(y_jx'_j)$$

для произвольных $a \in A$, $i = \overline{1, s}$ и $j = \overline{1, t}$, то диаграмма (1) коммутативна.

Покажем теперь, что отображение $\widetilde{\varphi}$ сохраняет отображение φ, т. е. покажем коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"'] & G * F' \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"] \\ G' & G' * F, \arrow[l, "\rho'"'] \end{tikzcd}$$

где ι — вложение, а ρ' — проекция. Действительно,

$$\rho'\widetilde{\varphi}\,\iota(a) = \rho'\widetilde{\varphi}(a) = \rho'(a) = a = \varphi(a)$$

и

$$\rho'\widetilde{\varphi}\,\iota(x_i) = \rho'\widetilde{\varphi}(x_i) = \rho'(y_i'x_i) = \rho'(y_i')\rho'(x_i) = \rho'(y_i') = y_i' = \varphi(x_i)$$

для произвольных $a \in A$ и $i = \overline{1, s}$.

Лемма 1 доказана.

Скрещенным модулем (или G-скрещенным модулем C) называется тройка (C, G, d), где C — аддитивная (не обязательно абелевая), а G — мультипликативная группы, $d\colon C \to G$ — гомоморфизм, G действует на C слева, при этом гомоморфизм d удовлетворяет следующим условиям:

1) $c' + c - c' = d(c')\ c$,

2) $d(gc) = g\ d(c)\ g^{-1}$, где $c, c' \in C$, $g \in G$.

Все скрещенные модули образуют категорию $\times\mathscr{M}$ (см., например, [4]). Морфизмом скрещенных модулей (C, G, d) и (C', G', d') в категории $\times\mathscr{M}$ является пара (φ, ψ) гомоморфизмов $\varphi\colon C \to C'$ и $\psi\colon G \to G'$ такая, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{d} & G \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ C' & \xrightarrow{d'} & G' \end{array}$$

коммутативна и $\varphi(gc) = \psi(g)\ \varphi(c)$. При этом G-морфизмом G-скрещенных модулей называется гомоморфизм $\varphi\colon C \to C'$ такой, что (φ, id_G) — морфизм скрещенных модулей. Все G-скрещенные модули и G-морфизмы образуют подкатегорию $\times\mathscr{M}_G$ категории $\times\mathscr{M}$.

Пусть (C, G, d) — скрещенный модуль, $\{c_i \mid i \in I\}$ — некоторое множество фиксированных элементов из C. Тогда (C, G, d) называется свободным скрещенным модулем с базисом $\{c_i| \ i \in I\}$, если для каждого скрещенного модуля (C', G', d') и произвольного множества элементов $\{c_i'| \ i \in I\}$ из C' и гомоморфизма $\psi\colon G \to G'$ такого, что $\psi d(c_i) = d'(c_i')$, существует единственный гомоморфизм $\varphi\colon C \to C'$, для которого $\varphi(c_i) = c_i'$ и (φ, ψ) — гомоморфизм скрещенных модулей. Уайтхед [5] доказал существование свободных скрещенных модулей (C, G, d) для произвольной группы G, в частности если G — конечносвободная A-группа.

Пусть (C, G, d) — скрещенный модуль и A — $\mathbb{Z}[G/dC]$-модуль. Модуль A можно рассматривать как $\mathbb{Z}[G]$-модуль с тривиальным действием dC. Группа $C \oplus A$ является, очевидно, G-скрещенным модулем с диагональным действием группы G и граничным гомоморфизмом $\partial\colon C \oplus A \to G$, заданным соотношением $\partial(c, a) = dc$. Заметим, что если $\{c_i \mid i \in I\}$ — система образующих G-скрещенного модуля C, а $\{a_j \mid j \in J\}$ — система образующих модуля A, то $\{(c_i, 0) \mid i \in I\} \cup \{(0, a_j) \mid j \in J\}$ — система образующих скрещенного модуля $(C \oplus A, G, \partial)$. В частности, G-скрещенный модуль $C \oplus A$ конечно порожден тогда и только тогда, когда конечнопорожденными являются скрещенный модуль (C, G, d) и $\mathbb{Z}[G/dC]$-модуль A.

Зафиксируем группу G. Рассмотрим еще один важный класс скрещенных модулей — G-проективные скрещенные модули, введенные Рэтклайфом [6]. Скрещенный модуль (C, G, d) называется G-проективным, если он проективный в категории $\times\mathscr{M}_G$. Рэтклайф [6] показал, что скрещенный модуль (C, G, d) будет G-проективным тогда и только тогда, когда существуют проективный $\mathbb{Z}[G/dC]$-модуль P и свободный G-скрещенный модуль B такие, что $C \oplus P$ и B являются изоморфными в категории $\times\mathscr{M}_G$. Легко видеть, что если G-проективный скрещенный модуль (C, G, d) конечнопорожден, то существует конечнопорожденный проективный $\mathbb{Z}[G/dC]$-модуль P такой, что G-скрещенный модуль $C \oplus P$ свободен и конечно порожден.

Пусть (C,G,d) — скрещенный модуль и $\rho\colon E\to G$ — гомоморфизм групп. Рассмотрим диаграмму коамальгамы гомоморфизмов d и ρ

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\widetilde{\rho}"'] & E \arrow[d, "\rho"] \\ C \arrow[r, "d"] & G, \end{tikzcd}$$

где $D=\{(c,e)\in C\times E \mid d(c)=\rho(e)\}$. Тогда, определив действие E на D соотношением $e_1(c,e)=(\rho(e_1)\,c, e_1 e\, e_1^{-1})$ и граничный гомоморфизм $\partial\colon D\to E$ соотношением $\partial(c,e)=e$, получим, что (D,E,∂) — скрещенный модуль, а $(\widetilde{\rho},\rho)$, где $\widetilde{\rho}\colon D\to C$ задается соотношением $\widetilde{\rho}(c,e)=c$, — морфизм скрещенных модулей.

Пусть F — свободная группа и $\rho\colon G*F\to G$ — утолщение тождественного гомоморфизма id_G с помощью группы F. Тогда стабилизацией скрещенного модуля (C,G,d) с помощью свободной группы F (или F-стабилизацией) называется $G{*}F$-скрещенный модуль D, являющийся коамальгамой гомоморфизмов d и ρ. Будем считать, что коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\widetilde{\rho}"'] & G{*}F \arrow[d, "\rho"] \\ C \arrow[r, "d"] & G \end{tikzcd} \tag{2}$$

задает F-стабилизацию $(D,G*F,\partial)$ скрещенного модуля (C,G,d).

Лемма 2. *Пусть задана коммутативная диаграмма* (2). *Тогда*:

1) *существует морфизм* $(\widetilde{\iota},\iota)$ *скрещенных модулей* (C,G,d) *и* $(D,G*F,\partial)$ *такой, что* $(\widetilde{\rho},\rho)(\widetilde{\iota},\iota)=(\mathrm{id}_C,\mathrm{id}_G)$;

2) $\rho(\partial D)=dC$ *и отображение* ρ *индуцирует изоморфизм* $\rho_*\colon G*F/\partial D\simeq G/dC$;

3) *отображения* $\widetilde{\rho}$ *и* $\widetilde{\iota}$ *индуцируют взаимно обратные изоморфизмы* $\widetilde{\rho}^*\colon \ker\partial\simeq\ker d$ *и* $\widetilde{\iota}^*\colon \ker d\simeq\ker\partial$.

Доказательство. 1. Естественное вложение $\iota\colon G\to G*F$, очевидно, удовлетворяет соотношению $\rho\iota=\mathrm{id}_G$. Гомоморфизм $\widetilde{\iota}\colon C\to D$ зададим соотношением $\widetilde{\iota}\,c=(c,\iota d\,c)$. Очевидно также, что $\widetilde{\rho}\,\widetilde{\iota}=\mathrm{id}_C$. Покажем, что $(\widetilde{\iota},\iota)$ — морфизм скрещенных модулей. Действительно, так как

$$\iota d\,c=\partial(c,\iota d\,c)=\partial\,\widetilde{\iota}\,c,$$

то диаграмма

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\widetilde{\iota}"'] & G \arrow[d, "\iota"] \\ D \arrow[r, "\partial"] & G{*}F \end{tikzcd} \tag{3}$$

коммутативна и

$$\widetilde{\iota}(gc)=(gc,\iota d\,(gc))=(gc,\iota(g\,(dc)\,g^{-1}))=(\rho(\iota g)\,c,(\iota g)(\iota d\,c)(\iota g)^{-1})=\iota g\,(c,\iota d\,c)=\iota(g)\,\widetilde{\iota}(c).$$

2. Из коммутативности диаграммы (2) и пункта 1 следует, что для любого $(c,e)\in D$

$$\rho\partial\,(c,e)=d\widetilde{\rho}\,(c,e)=dc\in dC$$

и для любого $c \in C$

$$dc = \rho\iota\, dc = \rho\partial\,(c, \iota d\, c) \in \rho\partial D.$$

Следовательно, $\rho(\partial D) = dC$ и ρ индуцирует отображение $\rho_*\colon G * F/\partial D \to G/dC$.

Из эпиморфности ρ следует эпиморфность ρ_*. Покажем, что ρ_* — мономорфизм. Действительно, если $e\,\partial D \in \ker\rho_*$, то $\rho_*(e\,\partial D) = \rho e\, dC = dC$ и $\rho e = dc$ для некоторого $c \in C$. Из последнего равенства следует, что $(c, e) \in D$ и $e = \partial(c, e) \in \partial D$, откуда $e\,\partial D = \partial D$ и $\ker\rho_* = \{\partial D\}$.

3. Из коммутативности диаграмм (2) и (3) следует, что отображения $\widetilde{\rho}$ и $\widetilde{\iota}$ индуцируют гомоморфизмы $\widetilde{\rho}^*\colon \ker\partial \to \ker d$ и $\widetilde{\iota}^*\colon \ker d \to \ker\partial$. Из мономорфности $\widetilde{\iota}$ вытекает мономорфность $\widetilde{\iota}^*$. Если $(c, e) \in \ker\partial$, то $e = 1$, $dc = \rho e = 1$ и $\widetilde{\iota} c = (c, \iota d\, c) = (c, 1) = (c, e)$. Таким образом, $\widetilde{\iota}^*$ является эпиморфизмом, а значит, и изоморфизмом. Из соотношения $\widetilde{\rho}\,\widetilde{\iota} = \mathrm{id}_C$ следует, что $\widetilde{\rho}^*$ — изоморфизм, обратный к $\widetilde{\iota}^*$.

Лемма 2 доказана.

Морфизм $(\widetilde{\iota}, \iota)$ из пункта 1 леммы 2 будем называть F-вложением, соответствующим F-стабилизации скрещенного модуля (C, G, d).

Известно [7], что F-стабилизация свободного (G-проективного) скрещенного модуля сама является свободным ($G * F$-проективным) скрещенным модулем. Более того, если $\{c_i \mid i \in I\}$ — базис свободного скрещенного модуля (C, G, d), а $\{x_j \mid j \in J\}$ — базис группы F, то $\{(c_i, \iota d\, c_i) \mid i \in I\} \cup \{(0, x_j) \mid j \in J\}$ — базис F-стабилизации скрещенного модуля (C, G, d).

Лемма 3. *Пусть $G = A * F$ и $G' = A * F'$ — конечносвободные A-группы, $\varphi\colon G \to G'$ — их стабильный A-гомоморфизм и задана коммутативная диаграмма групп*

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longleftarrow & H & \xleftarrow{\pi} & G & \xleftarrow{d} & C & \longleftarrow & \ker d & \longleftarrow & 0 \\
& & \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f^*} & & \\
1 & \longleftarrow & H' & \xleftarrow{\pi'} & G' & \xleftarrow{d'} & C' & \longleftarrow & \ker d' & \longleftarrow & 0,
\end{array} \qquad (4)$$

в которой (f, φ) — морфизм конечнопорожденных свободных скрещенных модулей (C, G, d) и (C', G', d'), а φ_* — изоморфизм. Тогда если $(D, G * F', \partial)$ и $(D', G' * F, \partial')$ — F'- и F-стабилизации свободных скрещенных модулей (C, G, d) и (C', G', d') соответственно, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longleftarrow & H & \xleftarrow{\pi * 0} & G * F' & \xleftarrow{\partial} & D & \longleftarrow & \ker\partial & \longleftarrow & 0 \\
& & \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\widetilde{\varphi}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\widetilde{f}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\widetilde{f}^*} & & \\
1 & \longleftarrow & H' & \xleftarrow{\pi' * 0} & G' * F & \xleftarrow{\partial'} & D' & \longleftarrow & \ker\partial' & \longleftarrow & 0,
\end{array} \qquad (5)$$

в которой $(\widetilde{f}, \widetilde{\varphi})$ — морфизм скрещенных модулей $(D, G * F', \partial)$ и $(D', G' * F, \partial')$, отображения $\widetilde{\varphi}$ и $\widetilde{f}$ сохраняют отображения φ и f соответственно, причем $\widetilde{\varphi}$ — изоморфизм.

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_s$ — базис группы F, а $x'_1, \ldots, x'_t$ — базис группы F'. Пусть также $c_1, \ldots, c_m$ и $c'_1, \ldots, c'_n$ — базисы свободных скрещенных модулей (C, G, d) и (C', G', d') соответственно. Если

$$\begin{array}{ccc}
D & \xrightarrow{\partial} & G * F' \\
\Big\downarrow{\scriptstyle\widetilde{\rho}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\rho} \\
C & \xrightarrow{d} & G
\end{array}$$

и

$$\begin{tikzcd}
D' \arrow[r, "\partial'"] \arrow[d, "\widetilde{\rho}'"'] & G' * F \arrow[d, "\rho'"] \\
C' \arrow[r, "d'"] & G'
\end{tikzcd}$$

— коммутативные диаграммы F'- и F-стабилизаций скрещенных модулей (C, G, d) и (C', G', d') соответственно, а $(\widetilde{\iota}, \iota)$ и $(\widetilde{\iota'}, \iota')$ — их соответствующие F'- и F-вложения, то

$$(c_1, \iota d\, c_1), \ldots, (c_m, \iota d\, c_m), (0, x'_1), \ldots, (0, x'_t) \quad \text{и} \quad (c'_1, \iota' d'\, c'_1), \ldots, (c'_n, \iota' d'\, c'_n), (0, x_1), \ldots, (0, x_s)$$

— базисы свободных скрещенных модулей $(D, G * F', \partial)$ и $(D', G' * F, \partial')$ соответственно.

По лемме 1 существует изоморфизм $\widetilde{\varphi}$, сохраняющий отображение φ и делающий коммутативным левый квадрат диаграммы (5).

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & 1 & H \arrow[l] \arrow[dl, equal] \arrow[dd, "\varphi_*"] & & G \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[dl, "\iota"'] \arrow[dd, "\varphi"] & & C \arrow[ll, "d"'] \arrow[dl, "\widetilde{\iota}"'] \arrow[dd, "f"] & & \ker d \arrow[ll] \arrow[dl, "\widetilde{\iota}^*"'] \arrow[dd, "f^*"] & & 0 \arrow[ll] \\
1 & H \arrow[l] \arrow[dd, "\varphi_*"] & & G * F' \arrow[ll, "\pi * 0"'] \arrow[dd, "\widetilde{\varphi}"] & & D \arrow[ll, "\partial"'] \arrow[dd, dashed, "\widetilde{f}"] & & \ker \partial \arrow[ll] \arrow[dd, dashed, "\widetilde{f}^*"] & & 0 \arrow[ll] & \\
 & 1 & H' \arrow[l] \arrow[dl, equal] & & G' \arrow[ll, "\pi'"'] & & C' \arrow[ll, "d'"'] & & \ker d' \arrow[ll] & & 0 \arrow[ll] \\
1 & H' \arrow[l] & & G' * F \arrow[ll, "\pi' * 0"'] \arrow[ur, "\rho'"] & & D' \arrow[ll, "\partial'"'] \arrow[ur, "\widetilde{\rho}'"] & & \ker \partial' \arrow[ll] \arrow[ur, "\widetilde{\rho}'^*"] & & 0 \arrow[ll] &
\end{tikzcd}$$

и построим отображение $\widetilde{f}\colon D \to D'$, задав его на базисных элементах $(c_1, \iota d\, c_1), \ldots, (c_m, \iota d\, c_m)$, $(0, x'_1), \ldots, (0, x'_t)$. Для любого $i = \overline{1, m}$ положим $\widetilde{f}(c_i, \iota d\, c_i) = (f c_i, \widetilde{\varphi}\, \iota d\, c_i)$, что является корректным, так как $d'(f c_i) = \varphi d\, c_i = \rho'(\widetilde{\varphi}\, \iota d\, c_i)$. При этом выполняются также соотношения

$$\partial' \widetilde{f}\, (c_i, \iota d\, c_i) = \partial'(f c_i, \widetilde{\varphi}\, \iota d\, c_i) = \widetilde{\varphi}\, \iota d\, c_i = \widetilde{\varphi} \partial\, (c_i, \iota d\, c_i), \tag{6}$$

$$\widetilde{\rho}' \widetilde{f}\, \widetilde{\iota}\, c_i = \widetilde{\rho}' \widetilde{f}\, (c_i, \iota d\, c_i) = \widetilde{\rho}'(f c_i, \widetilde{\varphi}\, \iota d\, c_i) = f c_i, \tag{7}$$

из которых следует однозначность образа рассматриваемых элементов базиса. В отличие от них образы элементов $(0, x'_1), \ldots, (0, x'_t)$ могут быть выбраны неоднозначно. Действительно, поскольку $\partial(0, x'_j) = x'_j \in F' \subset \ker(\pi * 0)$, то $\widetilde{\varphi}\, \partial(0, x'_j) \in \ker(\pi' * 0)$, а потому существует (с точностью до $\ker \partial'$) элемент $(c'_j, \widetilde{\varphi}\, x'_j) \in D'$ такой, что $\partial'(c'_j, \widetilde{\varphi}\, x'_j) = \widetilde{\varphi}\, \partial(0, x'_j)$. Таким образом, можно положить $\widetilde{f}(0, x'_j) = (c'_j, \widetilde{\varphi}\, x'_j)$, $j = \overline{1, t}$. Вследствие того, что D — свободный скрещенный модуль, отображение $\widetilde{f}$ продолжается на все множество D. Из построения элементов $\widetilde{f}(0, x'_j)$ и соотношения (6) следует коммутативность среднего квадрата диаграммы (5), а из соотношения (7) — то, что $\widetilde{f}$ сохраняет f. Таким образом, $(\widetilde{f}, \widetilde{\varphi})$ — морфизм скрещенных модулей $(D, G * F', \partial)$ и $(D', G' * F, \partial')$, сохраняющий отображения f и φ, причем $\widetilde{\varphi}$ — изоморфизм. Заметим, что по лемме 2 (пункт 3) можно отождествить множества $\ker d = \ker \partial$ и множества $\ker \partial' = \ker d'$, а значит, считать равными отображения $\widetilde{f}^* = f^*$.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} 1 & H \arrow[l] & G \arrow[l] & D \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "f"] \\ 1 & H \arrow[l] \arrow[u, equal] & G \arrow[l] \arrow[u, equal] & D', \arrow[l, "\partial'"'] \end{tikzcd}$$

в которой (D, G, ∂) и (D', G, ∂') — свободные конечнопорожденные скрещенные модули. Если $A = D/[D, D]$ и $A' = D'/[D', D']$, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} 1 & H \arrow[l] & G \arrow[l] & D \oplus A' \arrow[l, "\partial\oplus 0"'] \arrow[d, "\widetilde{f}"] \\ 1 & H \arrow[l] \arrow[u, equal] & G \arrow[l] \arrow[u, equal] & D' \oplus A, \arrow[l, "\partial'\oplus 0"'] \end{tikzcd} \tag{8}$$

в которой $\widetilde{f}$ — G-изоморфизм, сохраняющий отображение f.

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_s$ и $x'_1, \ldots, x'_t$ — базисы свободных G-скрещенных модулей D и D'. Тогда $a_i = x_i + [D, D]$, $i = \overline{1, s}$, и $a'_j = x'_j + [D', D']$, $j = \overline{1, t}$, — базисы свободных $\mathbb{Z}[H]$-модулей A и A'. Рассмотрим свободные G-скрещенные модули $D \oplus A'$ и $D' \oplus A$. Их базисы, очевидно, состоят из элементов

$$(x_1, 0), \ldots, (x_s, 0), (0, a'_1), \ldots, (0, a'_t) \quad \text{и} \quad (x'_1, 0), \ldots, (x'_t, 0), (0, a_1), \ldots, (0, a_s)$$

соответственно.

Пусть $f(x_i) = y'_i$ $(\in D')$ для $i = \overline{1, s}$, а y_j $(\in D)$ — произвольный элемент из $\partial^{-1}\partial'(x'_j)$ для $j = \overline{1, t}$. Тогда базисами G-скрещенных модулей $D \oplus A'$ и $D' \oplus A$ будут также элементы

$$(x_1, 0), \ldots, (x_s, 0), (y_1, a'_1), \ldots, (y_t, a'_t) \quad \text{и} \quad (x'_1, 0), \ldots, (x'_t, 0), (y'_1, a_1), \ldots, (y'_s, a_s)$$

соответственно. Построим отображение $\widetilde{f}\colon D \oplus A' \to D' \oplus A$. Для этого положим $\widetilde{f}(x_i, 0) = (y'_i, a_i)$ и $\widetilde{f}(y_j, a'_j) = (x'_j, 0)$ для произвольных $i = \overline{1, s}$ и $j = \overline{1, t}$. Вследствие того, что $D \oplus A'$ — свободный скрещенный модуль, отображение $\widetilde{f}$ продолжается на все множество $D \oplus A'$. Из построения отображения видно, что $\widetilde{f}$ — изоморфизм. Поскольку

$$(\partial' \oplus 0)\widetilde{f}(x_i, 0) = (\partial' \oplus 0)(y'_i, a_i) = (\partial' y'_i, 0) = (\partial' f(x_i), 0) = (\partial x_i, 0) = (\partial \oplus 0)(x_i, 0),$$

$$(\partial' \oplus 0)\widetilde{f}(y_j, a'_j) = (\partial' \oplus 0)(x'_j, 0) = (\partial' x'_j, 0) = (\partial(\partial^{-1}\partial' x'_j), 0) = (\partial y_j, 0) = (\partial \oplus 0)(y_j, a'_j)$$

для произвольных $i = \overline{1, s}$ и $j = \overline{1, t}$, то правый квадрат диаграммы (8) коммутативен.

Покажем теперь, что отображение $\widetilde{f}$ сохраняет отображение f, т. е. покажем коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & D \oplus A' \arrow[d, "\widetilde{f}"] \\ D' & D' \oplus A, \arrow[l, "\rho'"'] \end{tikzcd}$$

где ι — вложение, а ρ' — проекция. Действительно,

$$\rho' \widetilde{f}\, \iota(x_i) = \rho' \widetilde{f}(x_i, 0) = \rho'(y'_i, a_i) = y'_i = f(x_i)$$

для произвольного $i = \overline{1, s}$.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть (D, G, ∂) и (D', G, ∂') — свободные конечнопорожденные скрещенные модули, $H = G/\partial D = G/\partial' D'$, $A = D/[D, D]$, $A' = D'/[D', D']$ и имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
1 & H \arrow[l] \arrow[d, equal] & G \arrow[l] \arrow[d, equal] & D \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "\varphi"'] & \ker d \arrow[l] \arrow[d, "\varphi^*"'] & 0 \arrow[l] \\
1 & H \arrow[l] & G \arrow[l] & D' \arrow[l, "\partial'"'] & C' \arrow[l, "d'"'] & \ker d' \arrow[l] & 0, \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

в которой C и C' — свободные конечнопорожденные $\mathbb{Z}[H]$-модули. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
1 & H \arrow[l] \arrow[d, equal] & G \arrow[l] \arrow[d, equal] & D \oplus A' \arrow[l, "\partial\oplus 0"'] \arrow[d, "\widetilde{f}"'] & C \oplus A' \arrow[l, "d\oplus\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"'] & \ker(d \oplus \mathrm{id}) \arrow[l] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}^*"'] & 0 \arrow[l] \\
1 & H \arrow[l] & G \arrow[l] & D' \oplus A \arrow[l, "\partial'\oplus 0"'] & C' \oplus A \arrow[l, "d'\oplus\mathrm{id}"'] & \ker(d' \oplus \mathrm{id}) \arrow[l] & 0, \arrow[l]
\end{tikzcd} \tag{9}$$

в которой $\widetilde{f}$ — G-изоморфизм, сохраняющий отображение f, $\widetilde{\varphi}$ сохраняет φ, $\ker(d \oplus \mathrm{id}) = \ker d$ и $\ker(d' \oplus \mathrm{id}) = \ker d'$.

Доказательство. По лемме 4 существует изоморфизм $\widetilde{f}$, сохраняющий отображение f и делающий коммутативным второй слева квадрат диаграммы (9).

Пусть $c_1, \ldots, c_s$ и $a'_1, \ldots, a'_t$ — базисы свободных $\mathbb{Z}[H]$-модулей C и A'. Тогда базис свободного $\mathbb{Z}[H]$-модуля $C \oplus A'$, очевидно, состоит из элементов $(c_1, 0), \ldots, (c_s, 0), (0, a'_1), \ldots, (0, a'_t)$. Построим отображение $\widetilde{\varphi}\colon C \oplus A' \to C' \oplus A$, задав его на базисе модуля $C \oplus A'$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dd, equal] \arrow[dl, equal] & & D \arrow[ll, "\partial"'] \arrow[dd, "f"] \arrow[dl, "\iota"'] & & C \arrow[ll, "d"'] \arrow[dd, "\varphi"] \arrow[dl, "\widetilde{\iota}"'] & & \ker d \arrow[ll] \arrow[dd, "\varphi^*"] \arrow[dl, "\widetilde{\iota}^*"'] & 0 \arrow[l] \\
G \arrow[dd, equal] & & D \oplus A' \arrow[ll, "\partial\oplus 0"'] \arrow[dd, "\widetilde{f}"] & & C \oplus A' \arrow[ll, "d\oplus\mathrm{id}"'] \arrow[dd, dashed, "\widetilde{\varphi}"] & & \ker(d \oplus \mathrm{id}) \arrow[ll] \arrow[dd, dashed, "\widetilde{\varphi}^*"] & 0 \arrow[l] & \\
 & G \arrow[dl, equal] & & D' \arrow[ll, "\partial'"'] & & C' \arrow[ll, "d'"'] & & \ker d' \arrow[ll] & 0, \arrow[l] \\
G & & D' \oplus A \arrow[ll, "\partial'\oplus 0"'] \arrow[ur, "\pi'"'] & & C' \oplus A \arrow[ll, "d'\oplus\mathrm{id}"'] \arrow[ur, "\widetilde{\pi}'"'] & & \ker(d' \oplus \mathrm{id}) \arrow[ll] \arrow[ur, "\widetilde{\pi}'^*"'] & 0 \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

в которой ι и $\widetilde{\iota}$ — естественные вложения, π' и $\widetilde{\pi}'$ — естественные проекции, а отображения со звездочкой индуцируются соответствующими отображениями без звездочки. Для произвольного $i = \overline{1, s}$ положим $\widetilde{\varphi}(c_i, 0) = (\varphi\, c_i, \pi \widetilde{f}\, \iota d\, c_i)$, где $\pi\colon D' \oplus A \to A$ — естественная проекция. Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned}
(d' \oplus \mathrm{id})\, \widetilde{\varphi}(c_i, 0) &= (d' \oplus \mathrm{id})\, (\varphi\, c_i, \pi \widetilde{f}\, \iota d\, c_i) = (d' \varphi\, c_i, \pi \widetilde{f}\, \iota d\, c_i) = (f d\, c_i, \pi \widetilde{f}\, \iota d\, c_i) = \\
&= (\pi' \widetilde{f}\, \iota d\, c_i, \pi \widetilde{f}\, \iota d\, c_i) = \widetilde{f}\, \iota d\, c_i = \widetilde{f}(d\, c_i, 0) = \widetilde{f}(d \oplus \mathrm{id})\, (c_i, 0),
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\widetilde{\pi}' \widetilde{\varphi}\, \widetilde{\iota}\, c_i = \widetilde{\pi}' \widetilde{\varphi}(c_i, 0) = \widetilde{\pi}'(\varphi\, c_i, \pi \widetilde{f}\, \iota d\, c_i) = \varphi\, c_i. \tag{11}$$

Для $j=\overline{1,t}$ образы элементов $(0,a'_j)$ выберем следующим образом. Поскольку $(d\oplus\mathrm{id})\,(0,a'_j)=$ $=(0,a'_j)\in 0\oplus A'\subset\ker(\partial\oplus 0)$, то $\widetilde{f}(d\oplus\mathrm{id})\,(0,a'_j)\in\ker(\partial'\oplus 0)$ и существует элемент $(c'_j,a_j)\in C'\oplus A$ такой, что $(d'\oplus\mathrm{id})\,(c'_j,a_j)=\widetilde{f}(d\oplus\mathrm{id})\,(0,a'_j)$. Положим $\widetilde{\varphi}(0,a'_j)=(c'_j,a_j)$ для $j=\overline{1,t}$. Вследствие того, что $C\oplus A'$ — свободный модуль, отображение $\widetilde{\varphi}$ продолжается на все множество $C\oplus A'$. Из построения элементов $\widetilde{\varphi}(0,a'_j)$ и соотношения (10) следует коммутативность второго справа квадрата диаграммы (9), а из соотношения (11) — то, что $\widetilde{\varphi}$ сохраняет φ. В силу очевидной изоморфности отображений $\widetilde{\iota}^*$ и $\widetilde{\pi'}^*$ можно отождествить множества $\ker(d\oplus\mathrm{id})=\ker d$ и $\ker(d'\oplus\mathrm{id})=\ker d'$, а также считать равными отображения $\widetilde{\varphi}^*=\varphi^*$.

Лемма 5 доказана.

3. Основные результаты. Традиционно (см., например, [4, 5]) скрещенным цепным комплексом (C_i,G,d_i) называется последовательность групп и гомоморфизмов

$$1\longleftarrow H\xleftarrow{d_1}G\xleftarrow{d_2}C_2\xleftarrow{d_3}C_3\xleftarrow{d_4}\ldots\xleftarrow{d_n}C_n\xleftarrow{d_{n+1}}\ldots$$

со следующими свойствами:

1) (C_2,G,d_2) — свободный скрещенный модуль и $H=\operatorname{coker}d_2$;

2) для $i\geqslant 3$ C_i — свободный $\mathbb{Z}[H]$-модуль, d_i — гомоморфизм $\mathbb{Z}[H]$-модулей, $d_3(C_3)$ — $\mathbb{Z}[H]$-модуль;

3) $d_i\circ d_{i+1}=0$.

Морфизмом $f\colon(C_i,G,d_i)\to(C'_i,G',d'_i)$ скрещенных цепных комплексов (C_i,G,d_i) и (C'_i,G',d'_i) называется такая совокупность гомоморфизмов $f_1\colon G\to G'$, $f_i\colon C_i\to C'_i$, $i\geqslant 2$, которая сохраняет структуры на G и C_i, $i\geqslant 2$, и возникающие диаграммы гомоморфизмов будут коммутативными. Если при этом каждый из гомоморфизмов f_i является изоморфизмом, то гомотопические системы (C_i,G,d_i) и (C'_i,G',d'_i) называются изоморфными, а морфизм $f=\{f_i\}$ — изоморфизмом.

Скрещенный цепной комплекс (C_i,G,d_i) назовем проективным, если:

1) (C_2,G,d_2) — G-проективный скрещенный модуль;

2) для $i\geqslant 3$ C_i — проективный $\mathbb{Z}[H]$-модуль, где $H=\operatorname{coker}d_2$.

Скрещенный цепной комплекс (C_i,G,d_i) назовем конечнопорожденным, если (C_2,G,d_2) — конечнопорожденный скрещенный модуль и $\mathbb{Z}[H]$-модули C_i конечно порождены для всех $i\geqslant 3$.

Теорема. *Пусть $G,G'\in\mathscr{F}_A$, $f\colon(C_i,G,d_i)\to(C'_i,G',d'_i)$ — морфизм n-мерных конечнопорожденных проективных скрещенных цепных комплексов (C_i,G,d_i) и (C'_i,G',d'_i), индуцирующий изоморфизм групп и модулей гомологий, причем $f_1\colon G\to G'$ — стабильный A-гомоморфизм. Тогда существует стабилизация граничных гомоморфизмов d_i и d'_i с помощью свободных групп и проективных модулей такая, что полученные скрещенные цепные комплексы будут изоморфными.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{tikzcd} 1 & H \arrow[l] \arrow[d, "f_{1*}"'] & G \arrow[l, "d_1"'] \arrow[d, "f_1"'] & C_2 \arrow[l, "d_2"'] \arrow[d, "f_2"'] & C_3 \arrow[l, "d_3"'] \arrow[d, "f_3"'] & \ldots \arrow[l, "d_4"'] & C_n \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d, "f_n"'] \\ 1 & H' \arrow[l] & G' \arrow[l, "d'_1"] & C'_2 \arrow[l, "d'_2"] & C'_3 \arrow[l, "d'_3"] & \ldots \arrow[l, "d'_4"] & C'_n \arrow[l, "d'_n"] \end{tikzcd} \tag{12}$$

— диаграмма морфизма $f\colon(C_i,G,d_i)\to(C'_i,G',d'_i)$ n-мерных конечнопорожденных проективных скрещенных цепных комплексов (C_i,G,d_i) и (C'_i,G',d'_i), индуцирующего изоморфизм групп и модулей гомологий. Не нарушая общности в силу изоморфности отображения f_{1*} можно считать, что $H = H'$. По теореме 4.1 [6] существуют конечнопорожденные $\mathbb{Z}[H]$-модули P и P' такие, что $(C_2 \oplus P, G, d_2 \oplus 0)$ и $(C_2' \oplus P', G', d_2' \oplus 0)$ — свободные скрещенные модули. Утолщая морфизмы f_2 и f_3 с помощью модуля P и стабилизируя морфизмы d_3 и d_3' с помощью модулей P и P' соответственно, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
1 & H \arrow[l] \arrow[d, equal] & G \arrow[l, "d_1"'] \arrow[d, "f_1"'] & C_2 \oplus P \arrow[l, "d_2\oplus 0"'] \arrow[d, "f_2'"'] & C_3 \oplus P \arrow[l, "d_3\oplus\mathrm{id}"'] \arrow[d, "f_3'"'] & \ldots \arrow[l, "d_4"'] & C_n \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d, "f_n"'] \\
1 & H \arrow[l] & G' \arrow[l, "d_1'"'] & C_2' \oplus P' \arrow[l, "d_2'\oplus 0"'] & C_3' \oplus P' \arrow[l, "d_3'\oplus\mathrm{id}"'] & \ldots \arrow[l, "d_4'"'] & C_n', \arrow[l, "d_n'"']
\end{tikzcd}$$

начальный отрезок которой

$$\begin{tikzcd}
1 & H \arrow[l] \arrow[d, equal] & G \arrow[l, "d_1"'] \arrow[d, "f_1"'] & C_2 \oplus P \arrow[l, "d_2\oplus 0"'] \arrow[d, "f_2'"'] & \ker(d_2 \oplus 0) \arrow[l] \arrow[d, "(f_2')^*"'] & 0 \arrow[l] \\
1 & H \arrow[l] & G' \arrow[l, "d_1'"'] & C_2' \oplus P' \arrow[l, "d_2'\oplus 0"'] & \ker(d_2' \oplus 0) \arrow[l] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

удовлетворяет условиям леммы 3. Поскольку $G, G' \in \mathscr{F}_A$, то $G = A * F$ и $G' = A * F'$, где F и F' — свободные конечнопорожденные группы. Пусть $(D, G * F', \partial)$ и $(D', G' * F, \partial')$ — F'- и F-стабилизации свободных скрещенных модулей $(C_2 \oplus P, G, d_2 \oplus 0)$ и $(C_2' \oplus P', G', d_2' \oplus 0)$ соответственно. Тогда по лемме 3 имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
1 & H \arrow[l] \arrow[d, equal] & G * F' \arrow[l, "d_1 * 0"'] \arrow[d, "\widetilde{f}_1"'] & D \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "\widehat{f}_2"'] & \ker\partial \arrow[l] \arrow[d, "\widehat{f}_2^{\,*}"'] & 0 \arrow[l] \\
1 & H \arrow[l] & G' * F \arrow[l, "d_1' * 0"'] & D' \arrow[l, "\partial'"'] & \ker\partial' \arrow[l] & 0, \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

в которой $(\widehat{f}_2, \widetilde{f}_1)$ — морфизм скрещенных модулей $(D, G * F', \partial)$ и $(D', G' * F, \partial')$, сохраняющий отображения f_2 и f_1, причем $\widetilde{f}_1$ — изоморфизм, и $\ker\partial = \ker(d_2 \oplus 0)$ и $\ker\partial' = \ker(d_2' \oplus 0)$. Таким образом, диаграмму (12) можно представить в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
1 & H \arrow[l] \arrow[d, equal] & G * F' \arrow[l, "d_1 * 0"'] \arrow[d, "\widetilde{f}_1"'] & D \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "\widehat{f}_2"'] & C_3 \oplus P \arrow[l, "d_3\oplus\mathrm{id}"'] \arrow[d, "f_3'"'] & C_4 \arrow[l, "d_4"'] \arrow[d, "f_4"'] & \ldots \arrow[l, "d_5"'] & C_n \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d, "f_n"'] \\
1 & H \arrow[l] & G' * F \arrow[l, "d_1' * 0"'] & D' \arrow[l, "\partial'"'] & C_3' \oplus P' \arrow[l, "d_3'\oplus\mathrm{id}"'] & C_4' \arrow[l, "d_4'"'] & \ldots \arrow[l, "d_5'"'] & C_n'. \arrow[l, "d_n'"']
\end{tikzcd}$$

В силу изоморфности $\widetilde{f}_1$ отождествим группы $G * F' = G' * F = \overline{G}$. Пусть Q и Q' — проективные модули, дополняющие проективные модули $C_3 \oplus P$ и $C_3' \oplus P'$ до свободных модулей C и C' соответственно. Тогда, утолщая морфизмы f_3' и f_4 с помощью модуля Q и стабилизируя морфизмы d_4 и d_4' с помощью модулей Q и Q' соответственно, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
1 & H \arrow[l] \arrow[d, equal] & \overline{G} \arrow[l] \arrow[d, equal] & D \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "\widehat{f}_2"'] & C \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "\widehat{f}_3"'] & C_4 \oplus Q \arrow[l, "\widehat{d}_4"'] \arrow[d, "f_4'"'] & \ldots \arrow[l, "d_5"'] & C_n \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d, "f_n"'] \\
1 & H \arrow[l] & \overline{G} \arrow[l] & D' \arrow[l, "\partial'"'] & C' \arrow[l, "d'"'] & C_4' \oplus Q' \arrow[l, "\widehat{d'}_4"'] & \ldots \arrow[l, "d_5'"'] & C_n', \arrow[l, "d_n'"']
\end{tikzcd}$$

в которой $C = C_3 \oplus P \oplus Q$, $C' = C'_3 \oplus P' \oplus Q'$, $d = d_3 \oplus \mathrm{id} \oplus 0$, $d' = d'_3 \oplus \mathrm{id} \oplus 0$, $\widehat{d}_4 = d_4 \oplus \mathrm{id}$, $\widehat{d'}_4 = d'_4 \oplus \mathrm{id}$. Начальный отрезок этой диаграммы

$$\begin{tikzcd}
1 & H \arrow[l] \arrow[d, equal] & \overline{G} \arrow[l] \arrow[d, equal] & D \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "\widehat{f}_2"'] & C \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "\widehat{f}_3"'] & \ker d \arrow[l] \arrow[d, "\widehat{f}_3{}^*"'] & 0 \arrow[l] \\
1 & H \arrow[l] & \overline{G} \arrow[l] & D' \arrow[l, "\partial'"'] & C' \arrow[l, "d'"'] & \ker d' \arrow[l] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

удовлетворяет условиям леммы 5, а поэтому диаграмму (12) можно представить в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
1 & H \arrow[l] \arrow[d, equal] & \overline{G} \arrow[l] \arrow[d, equal] & D \oplus A' \arrow[l, "\partial\oplus 0"'] \arrow[d, "\widetilde{f}_2"'] & C \oplus A' \arrow[l, "d\oplus\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\widetilde{f}_3"'] & C_4 \oplus Q \arrow[l, "\widehat{d}_4"'] \arrow[d, "f'_4"'] & \ldots \arrow[l, "d_5"'] & C_n \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d, "f_n"'] \\
1 & H \arrow[l] & \overline{G} \arrow[l] & D' \oplus A \arrow[l, "\partial'\oplus 0"'] & C' \oplus A \arrow[l, "d'\oplus\mathrm{id}"'] & C'_4 \oplus Q' \arrow[l, "\widehat{d'}_4"'] & \ldots \arrow[l, "d'_5"'] & C'_n, \arrow[l, "d'_n"']
\end{tikzcd}$$

в которой $\widetilde{f}_2$ и $\widetilde{f}_3$ сохраняют отображения f_2 и f_3 соответственно, причем $\widetilde{f}_2$ — изоморфизм.

Поскольку ядра граничных гомоморфизмов скрещенных модулей являются модулями (см., например, [4]) и отображение $\widetilde{f}_3$ индуцирует изоморфизм $\widetilde{f}_{3*} \colon H_3 \to H'_3$ модулей гомологий, можно построить диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 & H_3 \arrow[l] \arrow[d, "\widetilde{f}_{3*}"'] & C \oplus A' \arrow[l, "d\oplus\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\widetilde{f}_3"'] & C_4 \oplus Q \arrow[l, "\widehat{d}_4"'] \arrow[d, "f'_4"'] & \ldots \arrow[l, "d_5"'] & C_n \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d, "f_n"'] \\
0 & H'_3 \arrow[l] & C' \oplus A \arrow[l, "d'\oplus\mathrm{id}"'] & C'_4 \oplus Q' \arrow[l, "\widehat{d'}_4"'] & \ldots \arrow[l, "d'_5"'] & C'_n \arrow[l, "d'_n"']
\end{tikzcd}$$

гомоморфизма $(n-3)$-мерных цепных комплексов конечнопорожденных проективных модулей, индуцирующего изоморфизм модулей гомологий. В результате получаем случай, описанный в теореме Кокрофта – Свона [1], из которой и следует справедливость данной теоремы.

Теорема доказана.

Автор благодарен профессору Шарко В. В. за полезные рекомендации и интерес, проявленный к данной работе.

1. *Cockcroft W., Swan R.* On the homotopy type of certein two-dimensional complexes // Proc. London Math. Soc. – 1961. – **11**. – P. 193 – 202.
2. *Хмельницкий Н. А.* О цепной эквивалентности проективных цепных комплексов // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 6. – С. 826 – 835.
3. *Шарко В. В.* Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты). – Киев: Наук. думка, 1990. – 196 с.
4. *Brown R., Higgins P. J., Sivera R.* Nonabelian algebraic topology. – Zürich: Eur. Math. Soc., 2011. – 668 p.
5. *Whitehead J. H. C.* Combinatorial homotopy // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – **55**, № 4. – P. 453 – 496.
6. *Ratcliffe J.* Free and projective modules // J. London Math. Soc. – 1980. – **22**, № 1. – P. 66 – 74.
7. *Ratcliffe J.* On complexes dominated by a two-complex // Combinatorial Group Theory and Topology. Ann. Math. Stud. – 1986. – **111**. – P. 221 – 254.

Получено 12.02.14