DOI: 10.37863/umzh.v72i10.2264

УДК 512.542

В. М. Князіна, В. С. Монахов (Гомел. держ. ун-т ім. Ф. Скорини, Білорусь)

СКІНЧЕННІ ГРУПИ З $\mathbb{P}$-СУБНОРМАЛЬНОЮ СИЛОВСЬКОЮ ПІДГРУПОЮ

Let $\mathbb{P}$ be the set of all primes. A subgroup H of a finite group G is called $\mathbb{P}$-*subnormal*, if either $H = G$ or there exists a chain of subgroups $H = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_n = G$ such that $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}$, $1 \leq i \leq n$. We prove that any finite group with a $\mathbb{P}$-subnormal Sylow p-subgroup of odd order is p-solvability and any group with $\mathbb{P}$-subnormal generalized Schmidt subgroups is metanilpotent.

Нехай $\mathbb{P}$ — множина всіх простих чисел. Підгрупа H скінченної групи G називається $\mathbb{P}$-*субнормальною*, якщо або $H = G$, або існує такий ряд підгруп $H = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_n = G$, що $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}$, $1 \leq i \leq n$. Встановлено p-розв'язність скінченних груп із $\mathbb{P}$-субнормальною силовською p-підгрупою непарного порядку і доведено метанільпотентність груп із $\mathbb{P}$-субнормальними узагальненими підгрупами Шмідта.

Вступ. Всі розглядувані групи вважаються скінченними. Використовувані позначення та термінологія відповідають [1, 2]. Множину всіх простих чисел позначено через $\mathbb{P}$.

А. Ф. Васильєв, Т. І. Васильєва та В. М. Тютянов [3] ввели таке поняття. Підгрупа H групи G називається $\mathbb{P}$-*субнормальною*, якщо або $H = G$, або існує ланцюжок підгруп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_n = G$$

такий, що $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}$ для будь-якого $i = 1, 2, \ldots, n$.

Групи з системами $\mathbb{P}$-субнормальних підгруп вивчались у багатьох роботах (див. бібліографію в [4 – 7]). Зокрема, групи, в яких усі силовські підгрупи $\mathbb{P}$-субнормальні, досить детально описано в [3 – 6]. В. М. Тютянов [7], використовуючи класифікацію скінченних простих груп, отримав розв'язність групи, в якій всі підгрупи Шмідта $\mathbb{P}$-субнормальні.

У цій статті встановлено p-розв'язність груп із $\mathbb{P}$-субнормальною силовською p-підгрупою непарного порядку й доведено метанільпотентність груп із $\mathbb{P}$-субнормальними узагальненими підгрупами Шмідта.

1. Попередні результати. Нагадаємо деякі позначення. Напівпрямий добуток двох підгруп A і B з нормальною підгрупою A записується як $[A]B$. Центр, комутант, підгрупи Фраттіні та Фіттінга групи G позначаються відповідно через $Z(G)$, G', $\Phi(G)$ і $F(G)$. Якщо $\pi \subseteq \mathbb{P}$, то $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$, а $\pi(G)$ — множина простих дільників порядку групи G. При $|\pi(G)| = 1$ група G називається *примарною*.

Введемо такі позначення: Z_m — циклічна група порядку m; E_{p^m} — елементарна абелева група порядку p^m; S_n і A_n — симетрична і знакозмінна групи степеня n.

Група G з нормальною силовською p-підгрупою G_p називається p-*замкненою*. Якщо в групі G є нормальна підгрупа $G_{p'}$ така, що $G = [G_{p'}]G_p$, то група G називається p-*нільпотентною*.

Наведемо твердження, які будемо використовувати у цій статті.

Лема 1.1 ([4], леми 3, 4). *Нехай N — нормальна підгрупа групи G, H — довільна підгрупа. Тоді справедливі такі твердження*:

1) *якщо H $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то H $\mathbb{P}$-субнормальна в HN, $(H \cap N)$ $\mathbb{P}$-субнормальна в N і HN/N $\mathbb{P}$-субнормальна в G/N*;

2) *якщо $N \leq H$ і H/N $\mathbb{P}$-субнормальна в G/N, то H $\mathbb{P}$-субнормальна в G*;

3) *якщо H $\mathbb{P}$-субнормальна в підгрупі K і K $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то H $\mathbb{P}$-субнормальна в G*;

4) *якщо H — підгрупа розв'язної групи G і A — $\mathbb{P}$-субнормальна в G підгрупа, то $(A \cap H)$ $\mathbb{P}$-субнормальна в H.*

Лема 1.2 ([4], лема 8)**.** *Нехай p — найбільший простий дільник порядку групи G і A — деяка p-підгрупа з G. Якщо A $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то A субнормальна в G.*

Введемо таку множину простих неабелевих груп: $\mathfrak{T} = \{PSL(2,7),\ PSL(2,11),\ SL(3,3),\ SL(3,5),\ L(2,2^n),\ 2^n+1=p$ — просте число$\}$.

Лема 1.3 ([7], лема 1.1, [8, с. 342])**.** *Якщо G — проста неабелева група, а її одинична підгрупа $\mathbb{P}$-субнормальна, то G ізоморфна групі з $\mathfrak{T}$.*

Ненільпотентна група, всі власні підгрупи якої нільпотентні, називається групою Шмідта. Огляд результатів щодо груп Шмідта та їхні застосування в теорії класів скінченних груп наведено в [9, 10]. Я. Г. Беркович і З. Янко запропонували [11, с. 461] називати *B-групою* групу, фактор-група якої за підгрупою Фраттіні є групою Шмідта. B-групи називають також *узагальненими групами Шмідта.* Наслідуючи [10], групу Шмідта з нормальною силовською p-підгрупою та ненормальною силовською q-підгрупою будемо називати *$S_{\langle p,q\rangle}$-групою.* B-групу G, в якій $G/\Phi(G)$ є $S_{\langle p,q\rangle}$-групою, будемо називати *$B_{\langle p,q\rangle}$-групою*. Зрозуміло, що будь-яка $S_{\langle p,q\rangle}$-група буде $B_{\langle p,q\rangle}$-групою. Діедральна група порядку 18 є $B_{\langle 3,2\rangle}$-групою і не є групою Шмідта.

Окремим випадком груп Шмідта є групи типу A. *Групою типу A* називають ненільпотентну групу, всі власні підгрупи якої примарні. З властивостей груп Шмідта [9, 10] випливає, що фактор-група будь-якої групи Шмідта за своєю підгрупою Фраттіні є групою типу A. Тому B-групу можна визначити як групу, в якій фактор-група за підгрупою Фраттіні є групою типу A.

Лема 1.4 [10, с. 83]**.** *Якщо S — група типу A, то справедливі такі твердження*:

1) *$S = [P]Q$, де P — нормальна силовська p-підгрупа, Q — ненормальна силовська q-підгрупа, p і q — різні прості числа*;

2) *Q — циклічна підгрупа простого порядку q і Q діє незвідно на P*;

3) *P — елементарна абелева підгрупа порядку p^m, де m — показник числа p за модулем q, підгрупа P є мінімальною нормальною підгрупою групи S*;

4) $Z(S) = \Phi(S) = 1$; $S' = P$.

Лема 1.5. *Нехай B — $B_{\langle p,q\rangle}$-група, P і Q — її силовські p- і q-підгрупи. Тоді справедливі такі твердження*:

1) $B = [P]Q$;

2) *$P \cap \Phi(B) = \Phi(P)$, $P = B'$ і $P/\Phi(P)$ — головний фактор групи B порядку p^m, де m — показник числа p за модулем q*;

3) *$Q = \langle y\rangle$ — циклічна підгрупа і $y^q \in Z(B)$. Крім того, $\Phi(B) = \Phi(P) \times \langle y^q\rangle$ і $Z(B) \leq \leq \Phi(B)$*;

4) *якщо H — нормальна в B підгрупа і $H \neq B$, то H нільпотентна*;

5) *якщо M — максимальна в B підгрупа, то або M нормальна в B і $M = P \times \langle y^q\rangle$, або $M = [\Phi(P)]Q^x$ для деякого $x \in B$.*

Доведення. 1. Згідно з [1] (4.33) $\pi(B) = \pi(B/\Phi(B))$, тому $\pi(B) = \{p,q\}$. Оскільки $P\Phi(B)/\Phi(B)$ нормальна в $B/\Phi(B)$, то P нормальна в B і $B = [P]Q$.

2. За лемою 1.4 (2) у фактор-групі $B/\Phi(B)$ силовська q-підгрупа має простий порядок. З [5] (2.11) випливає, що Q циклічна, тому $B' \leq P$. За властивостями комутанта [1] (4.6)

$$(B/\Phi(B))' = B'\Phi(B)/\Phi(B),$$

а оскільки комутант групи типу A за лемою 1.4 (4) збігається з нормальною силовською підгрупою, то $B'\Phi(B) = P\Phi(B)$. Оскільки $P \cap \Phi(B) = \Phi(P)$ [5] (2.10), то $B'\Phi(P) = P\Phi(P)$ і $B' = P$.

Підгрупа $P\Phi(B)/\Phi(B)$ за лемою 1.4 (3) є мінімальною нормальною підгрупою групи $B/\Phi(B)$. Ізоморфізм

$$P\Phi(B)/\Phi(B) \simeq P/\Phi(P)$$

є B-ізоморфізмом, тому $P/\Phi(P)$ — головний фактор групи B. Згідно з лемою 1.4 (3) він має порядок p^m, де m — показник числа p за модулем q.

3. У п. 2 доведено, що $Q = \langle y \rangle$ — циклічна підгрупа. Оскільки $|Q\Phi(B)/\Phi(B)| = q$, то

$$|Q : Q \cap \Phi(B)| = q, \qquad Q \cap \Phi(B) = \langle y^q \rangle.$$

Підгрупа Q не міститься в $\Phi(B)$, а максимальна підгрупа $\langle y^q \rangle$ з Q міститься в $\Phi(B)$, тому

$$\Phi(B) = \Phi(P) \times \langle y^q \rangle, \quad \langle y^q \rangle \lhd B.$$

Оскільки $P\langle y^q \rangle = P \times \langle y^q \rangle$, то $\langle y^q \rangle$ — силовська q-підгрупа в $Z(B)$. За лемою 1.4 (4) $Z(B/\Phi(B)) = 1$, отже, $Z(B) \leq \Phi(B)$.

4. Нехай H — нормальна в B підгрупа і $H \neq B$. Тоді $H\Phi(B) \neq B$ і $H\Phi(B)/\Phi(B)$ нільпотентна. Згідно з [1] (3.24) підгрупа H нільпотентна.

5. Нехай M — максимальна в B підгрупа. Оскільки B розв'язна і $\pi(B) = \{p, q\}$, то або $|B : M| = q^b$, або $|B : M| = p^a$, $a, b \in \mathbb{N}$. Якщо $|B : M| = q^b$, то $P \leq M$, а оскільки $P = B'$, то M нормальна в B, $b = 1$ і $M = P \times \langle y^q \rangle$. Тепер розглянемо випадок, коли $|B : M| = p^a$. Оскільки $M/\Phi(B)$ нільпотентна і $|B/\Phi(B) : M/\Phi(B)| = p^a$, то з леми 1.4 (3) випливає, що $M/\Phi(B)$ — q-підгрупа й a — показник p за модулем q. Тому $M = [\Phi(P)]Q^x$ для деякого $x \in B$.

Лема 1.6. *Нехай U — нормальна підгрупа в групі V і V/U є $B_{\langle p,q \rangle}$-групою. Якщо H — найменша в V підгрупа така, що $HU = V$, то H буде $B_{\langle p,q \rangle}$-групою.*

Доведення. Згідно з [1] (3.21) $H \cap U \leq \Phi(H)$, тому

$$\Phi(H/H \cap U) = \Phi(H)/(H \cap U).$$

Нехай $B \simeq V/U \simeq H/(H \cap U)$ — $B_{\langle p,q \rangle}$-група. Тоді

$$B/\Phi(B) \simeq (H/H \cap U)/\Phi(H/H \cap U) = (H/(H \cap U))/(\Phi(H)/H \cap U) \simeq H/\Phi(H)$$

буде $S_{\langle p,q \rangle}$-групою. А це означає, що H — $B_{\langle p,q \rangle}$-група.

Лема 1.7. *Нехай у групі G всі B-підгрупи $\mathbb{P}$-субнормальні і N — нормальна підгрупа групи G. Тоді справедливі такі твердження*:

1) *у підгрупі N всі B-підгрупи $\mathbb{P}$-субнормальні*;

2) *у фактор-групі G/N всі B-підгрупи $\mathbb{P}$-субнормальні*;

3) *якщо група G розв'язна і H — підгрупа з G, то в H всі B-підгрупи $\mathbb{P}$-субнормальні.*

Доведення. 1. Твердження випливає з леми 1.1 (1).

2. Нехай K/N — $B_{\langle p,q \rangle}$-підгрупа з G/N. За лемою 1.6 в K існує така $B_{\langle p,q \rangle}$-підгрупа L, що $K = LN$. За умовою підгрупа L $\mathbb{P}$-субнормальна в G. З леми 1.1 (1) випливає, що K/N $\mathbb{P}$-субнормальна в G/N.

3. Нехай G розв'язна, H — підгрупа з G і A — $B_{\langle p,q \rangle}$-підгрупа з H. За умовою підгрупа A $\mathbb{P}$-субнормальна в G. За лемою 1.1 (4) підгрупа $A = H \cap A$ $\mathbb{P}$-субнормальна в H.

Лема 1.8. 1. *Якщо в групі G немає $B_{\langle p,q\rangle}$-підгруп для всіх $q \in \pi(G)$, то група G p-нільпотентна.*

2. *Якщо в групі G немає 2-нільпотентних B-підгруп парного порядку, то група G 2-замкнена.*

Доведення. 1. Скористаємось індукцією за порядком групи. Якщо H — власна в G підгрупа, то H задовольняє умову леми й за індукцією H p-нільпотентна. Тепер згідно з [2] (IV.5.4) група G або p-нільпотентна, або є p-замкненою групою Шмідта, а отже, й B-групою. Останнє виключається умовою.

2. За умовою в групі G немає 2-нільпотентних B-підгруп парного порядку. Тому в ній немає й 2-нільпотентних підгруп Шмідта парного порядку. Згідно з лемою 2.3 з [12] група G 2-замкнена.

2. Групи з $\mathbb{P}$-субнормальною силовською підгрупою.

Теорема 2.1. *Якщо в групі G силовська p-підгрупа $\mathbb{P}$-субнормальна і $p > 2$, то G p-розв'язна.*

Доведення. Скористаємось індукцією за порядком групи. Нехай P — силовська p-підгрупа, $p > 2$, за умовою P $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Тоді P міститься в підгрупі M простого індексу r, $r \in \pi(G) \setminus \{p\}$, і P $\mathbb{P}$-субнормальна в M. За індукцією підгрупа M p-розв'язна.

Припустимо, що G — проста група. Зображення групи G на множині лівих суміжних класів за підгрупою M буде [2] (I.6.2) точним степеня r і група G ізоморфна підгрупі симетричної групи S_r степеня r. Тому r — найбільше в $\pi(G)$ і силовська r-підгрупа R в групі G має простий порядок r. Підгрупа R не $\mathbb{P}$-субнормальна в G за лемою 1.2. Оскільки одинична підгрупа $\mathbb{P}$-субнормальна в P, то одинична підгрупа також $\mathbb{P}$-субнормальна в G і група G ізоморфна за лемою 1.3 одній із груп множини $\mathfrak{T}$.

Якщо $G \cong PSL(2,7)$, то $|PSL(2,7)| = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$, $r = 7$, $p = 3$, P — силовська 3-підгрупа, $\mathbb{P}$-субнормальна в $M \cong S_4$ [14]. За лемою 1.2 підгрупа P нормальна в M, суперечність. Тому ізоморфізм $G \cong PSL(2,7)$ виключається.

Якщо $G \cong PSL(2,11)$, то $|PSL(2,11)| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$, $r = 11$, $p = 3$ або $p = 5$, і $M \cong A_5$ [14]. Проте A_5 не 3-розв'язна й не 5-розв'язна. Тому ізоморфізм $G \cong PSL(2,11)$ виключається.

Якщо $G \cong SL(3,3)$, то $|SL(3,3)| = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 13$, $r = 13$, $p = 3$ і $M \cong [E_9]GL(2,3)$ [14]. За лемою 1.2 силовська 3-підгрупа P нормальна в M, суперечність. Тому ізоморфізм $G \cong SL(3,3)$ виключається.

Якщо $G \cong SL(3,5)$, то $|SL(3,5)| = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 31$, $r = 31$, $p = 3$ або $p = 5$ і $M \cong$ $\cong [E_{5^2}]GL(2,5)$ [14]. Оскільки підгрупа M p-розв'язна для $p = 3$ або для $p = 5$, то M має бути розв'язною. Проте $GL(2,5)$ не розв'язна, тому ізоморфізм $G \cong SL(3,5)$ виключається.

Лишився випадок, коли $G \cong SL(2,2^n)$, де $2^n + 1$ — просте число Ферма. Оскільки $|SL(2,2^n)| = 2^n \cdot (2^n - 1)(2^n + 1)$, то $r = 2^n + 1$ і $|M| = 2^n \cdot (2^n - 1)$, тобто p ділить $2^n - 1$. Підгрупа M є [2] (II.8.27) нормалізатором силовської 2-підгрупи і $M = [E_{2^n}]Z_{2^n-1}$. Згідно з лемою 1.1 (4) підгрупа P $\mathbb{P}$-субнормальна в $[E_{2^n}]P$ і $E_{2^n} \times P$ нільпотентна за лемою 1.2. Але в $M = [E_{2^n}]Z_{2^n-1}$ це неможливо [2] (II.8.27). Тому ізоморфізм $G \cong SL(2,2^n)$ виключається.

Отже, група G не є простою. Нехай N — неодинична нормальна в G підгрупа. Тоді $P \cap N$ — силовська p-підгрупа групи N і $P \cap N$ $\mathbb{P}$-субнормальна в N за лемою 1.1 (1). За індукцією N p-розв'язна. Фактор-група PN/N є силовською p-підгрупою групи G/N і PN/N $\mathbb{P}$-субнормальна в G/N за лемою 1.1 (1). За індукцією G/N p-розв'язна. Тому G p-розв'язна.

Наслідок 2.1. *Якщо в групі G силовська 3-підгрупа і силовська 5-підгрупа $\mathbb{P}$-субнормальні, то G розв'язна.*

Доведення. За теоремою 2.1 група G 3- і 5-розв'язна. Тому існує нормальний ряд, фактори якого є 3-, 5- або $\{3,5\}'$-групами. Оскільки $\{3,5\}'$-групи [13] розв'язні, то група G розв'язна.

Наслідок 2.2. *Нехай G — проста неабелева група і $r \in \pi(G)$. У групі G існує $\mathbb{P}$-субнормальна підгрупа порядку r тоді і тільки тоді, коли виконується одне з таких тверджень:*

1) *$r = 2$ і G — будь-яка група з $\mathfrak{T}$;*
2) *$r = 3$ і $G \cong SL(3,3)$;*
3) *$r = 5$ і $G \cong SL(3,5)$.*

Доведення. Оскільки одинична підгрупа $\mathbb{P}$-субнормальна, то G належить множині $\mathfrak{T}$. У кожній групі з $\mathfrak{T}$ є $\mathbb{P}$-субнормальна підгрупа порядку 2. Тому вважаємо, що $r > 2$, і нехай R — $\mathbb{P}$-субнормальна підгрупа порядку r. Якщо силовська підгрупа непарного порядку має простий порядок, то за теоремою 2.1 вона не $\mathbb{P}$-субнормальна в групі. Тому в групах $PSL(2,7)$ і $PSL(2,11)$ немає $\mathbb{P}$-субнормальних підгруп простого непарного порядку. У групі $SL(3,3)$ є $\mathbb{P}$-субнормальна підгрупа порядку 3, а в групі $SL(3,5)$ є $\mathbb{P}$-субнормальна підгрупа порядку 5.

Нехай $G \cong SL(2,2^n)$, $2^n+1 = p$ — просте число. Оскільки $|SL(2,2^n)| = 2^n \cdot (2^n-1)(2^n+1)$, то p найбільше і p — порядок силовської p-підгрупи. За теоремою 2.1 в $SL(2,2^n)$ немає $\mathbb{P}$-субнормальних підгруп порядку p. Тому r ділить 2^n-1. Нехай M — підгрупа простого індексу в $SL(2,2^n)$, в якій підгрупа R $\mathbb{P}$-субнормальна. Тоді $|SL(2,2^n): M| = p$, підгрупа M є [2] (II.8.27) нормалізатором силовської 2-підгрупи і $M = [E_{2^n}]Z_{2^n-1}$. Згідно з лемою 1.1 (4) підгрупа R $\mathbb{P}$-субнормальна в $[E_{2^n}]R$ та $E_{2^n} \times R$ нільпотентна за лемою 1.2. Проте в $M = [E_{2^n}]Z_{2^n-1}$ це неможливо [2] (II.8.27). Тому в $SL(2,2^n)$ немає $\mathbb{P}$-субнормальних підгруп простого непарного порядку.

3. Групи з $\mathbb{P}$-субнормальними B-підгрупами.

Теорема 3.1. 1. *Нехай p — найбільший простий дільник порядку групи G. Якщо в групі G кожна $B_{\langle p,q\rangle}$-підгрупа $\mathbb{P}$-субнормальна для всіх $q \in \pi(G)$, то $G/O_p(G)$ p-нільпотентна; зокрема, група G p-розв'язна.*

2. *Нехай G — група і $p \in \pi(G) \setminus \{2,3,5\}$. Якщо в групі G кожна $B_{\langle p,q\rangle}$-підгрупа $\mathbb{P}$-субнормальна для всіх $q \in \pi(G)$, то група G p-розв'язна.*

3. *Якщо в групі G всі надрозв'язні B-підгрупи $\mathbb{P}$-субнормальні, то G надрозв'язна.*

4. *Якщо в групі G кожна B-підгрупа $\mathbb{P}$-субнормальна, то G метанільпотентна.*

Доведення. 1. Якщо в групі G немає $B_{\langle p,q\rangle}$-підгруп для всіх $q \in \pi(G)$, то за лемою 1.8 (1) група G p-нільпотентна і твердження справедливе. Нехай у групі G міститься $B_{\langle p,q\rangle}$-підгрупа B, де p — найбільший простий дільник порядку групи G і $q \in \pi(G)$. Згідно з твердженнями 1 – 3 леми 1.5 група $B = [P]Q$, де P — нормальна силовська p-підгрупа, Q — циклічна силовська q-підгрупа. За умовою підгрупа $[P]Q$ $\mathbb{P}$-субнормальна в G, а за лемою 1.5 (1) підгрупа P $\mathbb{P}$-субнормальна в $[P]Q$. Тепер за лемою 1.1 (3) підгрупа P $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Оскільки p найбільше в $\pi(G)$, то за лемою 1.2 підгрупа P субнормальна в G і $P \le O_p(G)$. Отже, група G не проста і $N = O_p(G) \ne 1$.

Розглянемо фактор-групу G/N. Очевидно, що $O_p(G/N) = 1$. Припустимо, що G/N містить $B_{\langle p,q\rangle}$-підгрупу K/N для деякого $q \in \pi(G)$. За лемою 1.6 мінімальний додаток L до підгрупи N в групі K буде $B_{\langle p,q\rangle}$-підгрупою. За умовою підгрупа L $\mathbb{P}$-субнормальна в G, а за лемою 1.1 (1) фактор-група $K/N = LN/N$ $\mathbb{P}$-субнормальна в G/N. Тепер силовська

p-підгрупа A/N з K/N буде $\mathbb{P}$-субнормальною в G/N за лемою 1.5 (1), а підгрупа A/N — субнормальною в G/N за лемою 1.2. Тому $A/N \leq O_p(G/N) = 1$, суперечність. Отже, G/N не містить $B_{\langle p,q\rangle}$-підгруп. За лемою 1.8 (1) фактор-група G/N p-нільпотентна, тому G p-розв'язна. Твердження 1 доведено.

2. Якщо в G немає $B_{\langle p,q\rangle}$-підгруп для всіх $q \in \pi(G)$, то група G p-нільпотентна за лемою 1.8 (1), а отже, й p-розв'язна. Тому слід вважати, що в групі G є $B_{\langle p,q\rangle}$-підгрупа $[P]Q$ для деякого $q \in \pi(G)$. Підгрупа Z простого порядку з P буде $\mathbb{P}$-субнормальною в G за лемою 1.1 (3). Оскільки $p > 5$, то за наслідком 2.2 група G не є простою. Нехай N — нормальна в G підгрупа, $1 \neq N \neq G$, і B — $B_{\langle p,q\rangle}$-підгрупа, $B \leq N$. За умовою B $\mathbb{P}$-субнормальна в G. За лемою 1.1 (1) підгрупа B $\mathbb{P}$-субнормальна в N. За індукцією підгрупа N p-розв'язна. Нехай D/N — довільна $B_{\langle p,q\rangle}$-підгрупа в G/N і H — найменша в D підгрупа така, що $HN = D$. За лемою 1.6 підгрупа H буде $B_{\langle p,q\rangle}$-підгрупою. За умовою H $\mathbb{P}$-субнормальна в G. За лемою 1.1 (1) підгрупа $HN/N = D/N$ $\mathbb{P}$-субнормальна в G/N. За індукцією фактор-група G/N p-розв'язна. Тому група p-розв'язна. Твердження 2 доведено.

3. Якщо в групі G немає надрозв'язних B-підгруп, то в G немає надрозв'язних підгруп Шмідта і група G розв'язна [15] (лема 4). Тому в групі G є надрозв'язні B-підгрупи.

Припустимо, що група є простою. Тоді G ізоморфна групі з $\mathfrak{T}$. За лемою 1.2 для найбільшого простого $p \in \pi(G)$ силовська p-підгрупа не $\mathbb{P}$-субнормальна в G. В $PSL(2,7)$ є група Шмідта S порядку 21, вона надрозв'язна, максимальна, а її індекс дорівнює 8. Тому S не $\mathbb{P}$-субнормальна в $PSL(2,7)$. В $PSL(2,11)$ є група Шмідта S порядку 55 і силовська 11-підгрупа буде $\mathbb{P}$-субнормальною в $PSL(2,11)$. Проте 11 — найбільше в $\pi(PSL(2,11))$, суперечність. В $SL(3,3)$ є група Шмідта S порядку 39, і її силовська 13-підгрупа має бути $\mathbb{P}$-субнормальною в $PSL(3,3)$, суперечність з лемою 1.2. В $SL(3,5)$ є група Шмідта S порядку 93, і за лемою 1.2 її силовська 31-підгрупа не може бути $\mathbb{P}$-субнормальною в $PSL(3,3)$. В групі $SL(2,2^n)$, де $2^n + 1 = p$ — просте число Ферма, є [2] (II.8.27) діедральна підгрупа порядку $2p$. Вона є надрозв'язною підгрупою Шмідта, й за лемою 1.2 її силовська p-підгрупа не може бути $\mathbb{P}$-субнормальною в $SL(2,2^n)$.

Таким чином, група G не є простою. Нехай N — нормальна в G підгрупа, $1 \neq N \neq G$, і X — її довільна надрозв'язна B-підгрупа. За умовою X $\mathbb{P}$-субнормальна в G. За лемою 1.1 (1) підгрупа X $\mathbb{P}$-субнормальна в N. За індукцією підгрупа N розв'язна. Нехай Y/N — довільна надрозв'язна B-підгрупа в G/N і H — найменша в Y підгрупа така, що $HN = Y$. За лемою 1.6 підгрупа H буде надрозв'язною B-підгрупою. За умовою H $\mathbb{P}$-субнормальна в G. За лемою 1.1 (1) підгрупа $HN/N = Y/N$ $\mathbb{P}$-субнормальна в G/N. За індукцією фактор-група G/N розв'язна. Тому група розв'язна. Твердження 3 доведено.

4. Згідно з твердженням 3 група G розв'язна. Згідно з твердженнями 1 – 3 леми 1.7 у кожній підгрупі і в кожній фактор-групі G/N всі B-підгрупи $\mathbb{P}$-субнормальні. За індукцією H і G/N метанільпотентні для кожної власної підгрупи H і кожної нормальної в G підгрупи N, $1 \neq N \neq G$. Тому група G примітивна і є мінімальною неметанільпотентною групою. Згідно з лемою 3 з [16] фактор-група $G/F(G)$ є групою Шмідта. Оскільки $F(G)$ — мінімальна нормальна в G підгрупа і $G = [F(G)]M$ для деякої максимальної підгрупи M, то M — група Шмідта. За умовою підгрупа M $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Тому $|F(G)|$ — просте число і M абелева.

Вимогу „p — найбільший простий дільник порядку групи G" відкинути не можна. Підтвердженням є проста група $SL(2,4)$ при $p = 2$. У цій групі кожна $B_{\langle 2,q\rangle}$-підгрупа ізоморфна знакозмінній групі A_4 степеня 4, яка $\mathbb{P}$-субнормальна в $SL(2,4)$. Відповідний ланцюг має вигляд $A_4 \leq SL(2,4)$, $|SL(2,11) : A_4| = 5$.

Література

1. В. С. Монахов, *Введение в теорию конечных групп и их классов*, Вышэйш. шк., Минск (2006).
2. B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer, Berlin etc. (1967).
3. А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов, *О конечных группах сверхразрешимого типа*, Сиб. мат. журн., **51**, № 6, 1270 – 1281 (2010).
4. V. N. Kniahina, V. S. Monakhov, *Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups*, Ric. Mat., **62**, № 2, 307 – 322 (2013).
5. V. N. Kniahina, V. S. Monakhov, *On supersolvability of finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups*, Int. J. Group Theory, **2**, № 4, 21 – 29 (2013).
6. В. С. Монахов, *Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами*, Сиб. мат. журн., **57**, № 2, 447 – 462 (2016).
7. В. Н. Тютянов, *Конечные группы с $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами Шмидта*, Проблемы физики, математики и техники, № 1 (22), 88 – 91 (2015).
8. P. J. Cameron, R. Solomon, *Chains of subgroups in symmetric groups*, J. Algebra, № 127, 340 – 352 (1989).
9. Н. Ф. Кузенный, С. С. Левищенко, *Конечные группы Шмидта и их обобщения*, Укр. мат. журн., **43**, № 7-8, 963 – 968 (1991).
10. В. С. Монахов, *Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения*, Укр. мат. конгр.: сб. тр., Ин-т математики НАН Украины, Киев (2002), с. 81 – 90.
11. Y. G. Berkovich, Z. Janko, *Groups of prime power order*, Vol. 3, Walter de Gruyter (2011).
12. В. Н. Княгина, В. С. Монахов, Е. В. Зубей, *О разрешимости конечной группы с S-полунормальными подгруппами Шмидта*, Укр. мат. журн., **70**, № 11, 1511 – 1518 (2018).
13. D. Gorenstein, *Finite simple groups. An introduction to their classification*, Plenum Publ. Corp., New York (1982).
14. J. H. Conway, *Atlas of finite groups*, Clarendon, London (1985).
15. В. С. Монахов, *О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта*, Мат. заметки, **58**, № 5, 717 – 722 (1995).
16. В. С. Монахов, *О группах с формационно субнормальными 2-максимальными подгруппами*, Мат. заметки, **105**, № 2, 269 – 277 (2019).

Одержано 07.12.19