DOI: 10.37863/umzh.v73i9.2278

УДК 517.518.13

Р. М. Рзаєв (Азербайджан. держ. пед. ун-т, Баку),
Л. Р. Алієва, Л. Е. Гусейнова (Ін-т математики і механіки НАН Азербайджану, Баку)

СИНГУЛЯРНИЙ ІНТЕГРАЛЬНИЙ ОПЕРАТОР У ПРОСТОРАХ, ЯКІ ВИЗНАЧАЮТЬСЯ ЗА ДОПОМОГОЮ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ОСЦИЛЯЦІЇ

We study the behavior of a multidimensional singular integral operator in the function spaces defined by the conditions imposed on generalized oscillation of a function.

Вивчено поведінку багатовимірного сингулярного інтегрального оператора у функціональних просторах, які визначаються за допомогою умов на узагальнену осциляцію функції.

1. Вступ. Нехай R^n — n-вимірний евклідів простір точок $x = \big(x_1, x_2, \ldots, x_n\big)$, $B(a,r) := \{x \in R^n : |x-a| \le r\}$ — замкнена куля в R^n радіуса $r > 0$ з центром у точці $a \in R^n$, N — множина всіх натуральних чисел, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$, $x^\nu = x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_n^{\nu_n}$, $|\nu| = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n$, де $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — невід'ємні цілі числа. Через $L_{\mathrm{loc}}\big(R^n\big)$ позначимо сукупність усіх локально сумовних у R^n функцій.

Нехай $f \in L_{\mathrm{loc}}\big(R^n\big)$, $k \in \mathrm{N} \bigcup \{0\}$. Розглянемо поліном (див. [5, 13])

$$P_{k,B(a.r)}f(x) := \sum_{|\nu| \le k} \left(\frac{1}{|B(a,r)|} \int\limits_{B(a,r)} f(t) \varphi_\nu\left(\frac{t-a}{r}\right) dt \right) \varphi_\nu\left(\frac{x-a}{r}\right),$$

де $|B(a,r)|$ позначає об'єм кулі $B(a,r)$ і $\{\varphi_\nu\}$, $|\nu| \le k$, — ортонормована система, отримана в результаті застосування процесу ортогоналізації відносно скалярного добутку

$$(f,g) := \frac{1}{|B(0,1)|} \int\limits_{B(0,1)} f(t) g(t) dt$$

до системи степеневих функцій $\{x^\nu\}$, $|\nu| \le k$, що розміщені в частково лексикографічному порядку [14] (див. також [16]). $P_{k,\,B(a,r)}f$ — поліном степеня не вищого за k. Сукупність усіх поліномів у R^n степеня не вищого за k позначимо через P_k. Таким чином, $P_{k,\,B(a,r)}f \in P_k$.

Модуль середньої осциляції k-го порядку $(k \in N)$ локально сумовної функції f визначається рівністю

$$M_f^k(\delta) := \sup \left\{ \Omega_k\big(f, B(x,r)\big) : 0 < r \le \delta, \;\; x \in R^n \right\}, \quad \delta > 0,$$

де

$$\Omega_k\big(f, B(x,r)\big) := \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} \big| f(t) - P_{k-1,B(x,r)} f(t) \big| \, dt, \quad x \in R^n, \quad r > 0.$$

$\Omega_k\left(f, B(a,r)\right)$ називається середньою осциляцією k-го порядку функції f у кулі $B(a,r)$ у метриці L^1.

Через Ψ позначимо клас усіх додатних монотонно зростаючих на $(0,+\infty)$ функцій $\varphi(t)$ таких, що $\varphi(+0)=0$. За визначенням функцію $\varphi(t)\equiv 1$ теж будемо вважати елементом класу Ψ. Через Ψ_k позначимо сукупність усіх функцій $\varphi\in\Psi$ таких, що $\varphi(t)t^{-k}$ майже спадає[1].

Нехай $\varphi\in\Psi_k,\ k\in N,\ 1\le\theta\le\infty$. Через $BMO^k_{\varphi,\theta}$ позначимо сукупність усіх функцій $f\in L_{\mathrm{loc}}(R^n)$, для яких $\|f\|_{BMO^k_{\varphi,\theta}}<+\infty$, де $\|f\|_{BMO^k_{\varphi,\theta}}:=\left(\int_0^\infty\left(\frac{M^k_f(t)}{\varphi(t)}\right)^\theta\frac{dt}{t}\right)^{1/\theta}$ при $1\le\theta<\infty$,

$$\|f\|_{BMO^k_{\varphi,\infty}}:=\sup\left\{\frac{M^k_f(t)}{\varphi(t)}:t>0\right\}.$$

Зазначимо, що простори $BMO^k_{\varphi,\theta}$ вперше введено в роботі [12]. Ці простори є банаховими щодо зазначеної вище норми. Властивості багатовимірних сингулярних інтегральних операторів у просторах $BMO^k_{\varphi,\theta}$ досліджено в роботах [11 – 13].

Неважко бачити, що якщо $k=1,\ \varphi(t)\equiv 1,\ \theta=\infty$, то $BMO^k_{\varphi,\theta}=BMO$, де BMO — простір функцій з обмеженою середньою осциляцією. Зауважимо, що простір BMO введено в роботі [8] у зв'язку з питаннями регулярності розв'язків еліптичних диференціальних рівнянь і він має численні застосування в різних питаннях аналізу. Простори Campanato введено в [4] (див., наприклад, [18]), і вони є узагальненнями простору BMO. Простори $BMO^k_{\varphi,\theta}$ можна віднести до просторів типу Campanato.

Простори, що визначаються умовами на середню осциляцію функцій, є інтенсивним об'єктом дослідження з точки зору внутрішніх задач теорії функцій. Такими є, наприклад, задачі опису гладкісних властивостей функцій у термінах середньої осциляції, дослідження інтегральних операторів гармонічного аналізу у просторах типу BMO, а також питання апроксимації локально сумовних функцій сингулярними інтегралами в термінах середньої осциляції. Функціональні простори, що визначаються умовами на середню осциляцію функцій, вивчались у роботах багатьох авторів (див., наприклад, [4, 5, 7, 9, 10, 19]). Вивчення зв'язків таких просторів із раніше відомими просторами та дослідження сингулярних інтегральних операторів і операторів типу потенціалу в цих просторах надають можливість, наприклад, вивчати більш широкі класи диференціальних рівнянь із частинними похідними.

Питання про обмеженість сингулярних інтегральних операторів у деяких просторах типу Campanato досліджено, наприклад, у роботах [7, 10].

У роботах [11 – 13] одержано оцінки типу оцінки А. Зигмунда у термінах модуля середньої осциляції вищого порядку і за допомогою цих оцінок доведено теореми про обмеженість сингулярних інтегральних операторів у просторах $BMO^k_{\varphi,\theta}$.

2. Попередні факти і позначення. Нехай $\alpha>0,\ r>0$ і

$$\Phi^{(\alpha)}(x)=c_n^{(\alpha)}\frac{1}{1+|x|^{n+\alpha}},\qquad \Phi_r^{(\alpha)}(x)=r^{-n}\Phi^{(\alpha)}\left(\frac{x}{r}\right),$$

де $c_n^{(\alpha)}$ вибирається так, щоб виконувалась умова

[1]Невід'ємна функція $H(t)$, $T\in(0,+\infty)$, називається майже спадною, якщо існує $c>0$ таке, що для будь-яких $t_1,t_2\in(0,+\infty)$ $(t_1<t_2\Rightarrow h(t_1)\ge ch(t_2))$.

$$\int\limits_{R^n} \Phi^{(\alpha)}(x)dx = 1.$$

Легко бачити, що тоді для будь-якого $r > 0$ має місце рівність

$$\int\limits_{R^n} \Phi_r^{(\alpha)}(x)dx = 1.$$

Для функції $f \in L_{\mathrm{loc}}\big(R^n\big)$ введемо також такі позначення:

$$\Omega_{k,\alpha}\big(f, B(x;r)\big) := \int\limits_{R^n} \Phi_r^{(\alpha)}(x-t)\left|f(t) - P_{k-1,\mathrm{B}(x,r)}f(t)\right| dt, \quad x \in R^n, \quad r > 0,$$

$$H_f^{k,\alpha}(\delta) := \sup\left\{\Omega_{k,\alpha}(f, B(x,r)) \colon 0 < r \leq \delta,\ x \in R^n\right\}, \quad \delta > 0.$$

Очевидно, що функція $H_f^{k,\alpha}(\delta)$ монотонно зростає за аргументом $\delta \in (0, +\infty)$. Величини $\Omega_{k,\alpha}\big(f, B(x;r)\big)$ і $H_f^{k,\alpha}(\delta)$ вперше було введено в [17]. $\Omega_{k,\alpha}\big(f, B(x;r)\big)$ ми називаємо Ф-осциляцією або узагальненою осциляцією k-го порядку функції f у кулі $B(x;r)$.

У роботі [17] доведено нерівності, що пов'язують характеристики $M_f^k(\delta)$ і $H_f^{k,\alpha}(\delta)$. А саме, доведено такі твердження.

Теорема 2.1 [17]. *Нехай* $f \in L_{\mathrm{loc}}\big(R^n\big)$, $\alpha > 0$, $k \in N$, $k < \alpha + 1$. *Тоді виконується нерівність*

$$H_f^{k,\alpha}(\delta) \leq c\delta^\alpha \int\limits_\delta^\infty \frac{M_f^k(t)}{t^{\alpha+1}} dt, \quad \delta > 0, \tag{2.1}$$

де $c > 0$ *не залежить від* f *і* δ.

Теорема 2.2 [17]. *Якщо* $f \in L_{\mathrm{loc}}\big(R^n\big)$, $\alpha > 0$, $k \in N$, *то виконується нерівність*

$$M_f^k(\delta) \leq cH_f^{k,\alpha}(\delta), \quad \delta > 0, \tag{2.2}$$

де $c > 0$ *не залежить від* f *і* δ.

Нехай $P(x)$ — ядро Пуассона для R^n, тобто $P(x) = c_n\big(1+|x|^2\big)^{-\frac{n+1}{2}}$, де $c_n = \Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right) \times$ $\times\, \pi^{-\frac{n+1}{2}}$. Легко перевірити, що $P(x) \approx \Phi^{(1)}(x)$, $x \in R^n$. Зазначимо, що для невід'ємних функцій $F(x)$ і $G(x)$ $(x \in X)$ запис $F(x) \approx G(x)$, $x \in X$, означає таке: існують додатні сталі c_1 і c_2 такі, що для всіх $x \in X$ має місце нерівність

$$c_1 F(x) \leq G(x) \leq c_2 F(x).$$

Для $f \in L_{\mathrm{loc}}\big(R^n\big)$ покладемо

$$H_f(\delta) := \sup_{\substack{0<r\leq\delta \\ x\in R^n}} \int\limits_{R^n} P_r(x-t)\big|f(t) - P_r f(x)\big| dt, \quad \delta > 0,$$

де $P_r(x) := r^{-n}P\left(\dfrac{x}{r}\right)$ $(r > 0)$, $P_r f(x) := (P_r * f)(x) = \displaystyle\int_{R^n} P_r(x-t)f(t)dt$.

$H_f(\delta)$ називається модулем гармонічної осциляції (див. [3, 17]). У роботі [17] показано, що $H_f(\delta) \approx H_f^{1,1}(\delta)$, $\delta > 0$, де сталі відносно $\approx$ не залежать від f і δ.

Нехай $f \in L_{\text{loc}}\big(R^n\big)$, $\alpha > 0$, $k \in N$, $\varphi \in \Psi_k$. Будемо використовувати також такі позначення (див. [1]):

$$A_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}(f) := \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{H_f^{k,\alpha}(t)}{\varphi(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} \quad \text{при} \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$A_{\varphi,\infty}^{k,\alpha}(f) := \sup\left\{\frac{H_f^{k,\alpha}(t)}{\varphi(t)} : t > 0\right\};$$

$$A_{\varphi,\theta}(f) := \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{H_f(t)}{\varphi(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} \quad \text{при} \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$A_{\varphi,\infty}(f) := \sup\left\{\frac{H_f(t)}{\varphi(t)} : t > 0\right\}.$$

Нехай $\varphi \in \Psi_k$, $k \in N$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\alpha > 0$, $k < \alpha + 1$. Через $HO_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}$ позначимо сукупність усіх функцій $f \in L_{\text{loc}}\big(R^n\big)$, для яких $A_{\varphi,\theta}^{k,\alpha} < +\infty$. Можна перевірити, що $HO_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}$ є лінійним простором. Оскільки для будь-якого полінома $\pi \in P_{k-1}$ і довільної кулі B з R^n виконується рівність $\Omega_{k,\alpha}(\pi, B) = 0$, то ми ототожнюємо $f \in HO_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}$ з функцією $f + \pi$, де $\pi \in P_{k-1}$. Тому клас $HO_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}$ можна розглядати як підмножину у фактор-просторі $L_{\text{loc}}\big(R^n\big)/P_{k-1}$. Норму в цьому класі введемо рівністю

$$\|f\|_{HO_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}} := A_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}.$$

Введемо також такі позначення:

$$HO_{\varphi,\theta} := \left\{f \in L_{\text{loc}}\big(R^n\big) : A_{\varphi,\theta}(f) < +\infty\right\},$$

$$\|f\|_{HO_{\varphi,\theta}} := A_{\varphi,\theta}(f), \quad \varphi \in \Psi_1, \quad 1 \leq \theta \leq \infty.$$

Якщо врахувати, що $H_f(\delta) \approx H_f^{1,1}(\delta)$, $\delta > 0$, то з визначень отримуємо, що $HO_{\varphi,\theta}^{1,1} = HO_{\varphi,\theta}$ і їхні норми еквівалентні.

3. Про ізоморфізм просторів $\boldsymbol{HO_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}}$ і $\boldsymbol{BMO_{\varphi,\theta}^{k}}$.

Теорема 3.1. *Нехай $f \in L_{\text{loc}}\big(R^n\big)$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\alpha > 0$, $k \in N$, $\varphi \in \Psi_k$. Тоді якщо $A_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}(f) < +\infty$, то $f \in BMO_{\varphi,\theta}^k$ і виконується нерівність*

$$\|f\|_{BMO_{\varphi,\theta}^k} \leq cA_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}(f),$$

де стала $c > 0$ не залежить від f.

Доведення. Нехай спочатку $\theta = \infty$. Якщо $A_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}(f) < +\infty$, то це означає, що

$$H_f^{k,\alpha}(\delta) \leq A_{\varphi,\infty}^{k,\alpha}(f)\varphi(\delta), \quad \delta > 0.$$

Звідси завдяки нерівності (2.2) отримуємо

$$M_f^k(\delta) \le cH_f^{k,\alpha}(\delta) \le cA_{\varphi,\infty}^{k,\alpha}(f)\varphi(\delta), \quad \delta > 0.$$

Останнє означає, що $f \in BMO_{\varphi,\theta}^k$ і, крім того,

$$\|f\|_{BMO_{\varphi,\theta}^k} \le cA_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}(f), \quad \delta > 0,$$

де $c > 0$ — стала з нерівності (2.2).

Якщо $1 \le \theta < \infty$, то у випадку $A_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}(f) < +\infty$, застосовуючи нерівність (2.2), маємо

$$\|f\|_{BMO_{\varphi,\theta}^k} = \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{M_f^k(t)}{\varphi(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} \le c\left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{H_f^{k,\alpha}(t)}{\varphi(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} = cA_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}(f),$$

тобто і в цьому випадку одержуємо необхідне твердження.

Теорему доведено.

Нехай μ — додатне число. Через Z_μ позначимо сукупність усіх функцій $\varphi \in \Psi$ таких, що

$$\delta^\mu \int\limits_\delta^\infty \frac{\varphi(t)}{t^{\mu+1}}dt = O\big(\varphi(\delta)\big), \quad \delta > 0. \tag{3.1}$$

Зауважимо, що в подальшому через (α) позначається найбільше ціле число, яке менше за число α.

Теорема 3.2. *Нехай* $f \in L_{\mathrm{loc}}\big(R^n\big),\ \alpha > 0,\ k = (\alpha) + 1$ *і* $\varphi \in Z_\alpha$. *Тоді якщо* $f \in BMO_{\varphi,\theta}^k$, *то справджуються співвідношення*:

a) $\displaystyle\int_{R^n} \frac{\big|f(x)\big|}{1 + |x|^{n+\alpha}}dx < +\infty$,

b) $A_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}(f) < +\infty$.

При цьому виконується нерівність

$$A_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}(f) \le c\|f\|_{BMO_{\varphi,\theta}^k}, \tag{3.2}$$

де стала $c > 0$ *не залежить від* f.

Доведення. Нехай $f \in BMO_{\varphi,\theta}^k$. Спочатку розглянемо випадок $\theta = \infty$. Тоді маємо

$$M_f^k(r) \le \|f\|_{BMO_{\varphi,\infty}^k}\varphi(r), \quad r > 0. \tag{3.3}$$

У цьому випадку справедливість твердження a) випливає з теореми 1 роботи [15]. Далі завдяки нерівностям (2.1), (3.3) й умові $\varphi \in Z_\alpha$ маємо

$$H_f^{k,\alpha}(\delta) \le c\delta^\alpha \int\limits_\delta^\infty \frac{M_f^k(t)}{t^{\alpha+1}}dt \le c\|f\|_{BMO_{\varphi,\infty}^k}\delta^\alpha \int\limits_\delta^\infty \frac{\varphi(t)}{t^{\alpha+1}}dt \le$$

$$\le c_1\|f\|_{BMO_{\varphi,\infty}^k}\varphi(\delta), \quad \delta > 0,$$

де $c_1 > 0$ не залежить від f і δ. Звідси отримуємо

$$A^{k,\alpha}_{\varphi,\infty}(f) = \sup\left\{\frac{H^{k,\alpha}_f(\delta)}{\varphi(\delta)} : \delta > 0\right\} \leq c_1\|f\|_{BMO^k_{\varphi,\infty}},$$

тобто має місце твердження b) теореми й виконується нерівність (3.2).

Нехай тепер $1 \leq \theta < \infty$ і $f \in BMO^k_{\varphi,\theta}$. Тоді для будь-якого $r \in (0,+\infty)$ маємо

$$\left(\int\limits_r^\infty \left(\frac{M^k_f(t)}{\varphi(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} \geq \left(\int\limits_r^{2r} \left(\frac{M^k_f(t)}{\varphi(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} \geq \frac{M^k_f(r)}{\varphi(2r)}(\ln 2)^{1/\theta}. \tag{3.4}$$

Покажемо, що якщо виконується умова $\varphi \in Z_\alpha$, то справджується співвідношення $\varphi(2r) \approx \approx \varphi(r),\ r > 0$. Справді, завдяки монотонному зростанню φ маємо $\varphi(r) \leq \varphi(2r),\ r > 0$. З іншого боку, за допомогою нерівності (3.1) з $\mu = \alpha$ отримуємо

$$c\varphi(r) \geq \delta^\alpha \int\limits_\delta^\infty \frac{\varphi(t)}{t^{\alpha+1}}dt \geq \delta^\alpha \int\limits_{2\delta}^\infty \frac{\varphi(t)}{t^{\alpha+1}}dt \geq \varphi(2r)\delta^\alpha \int\limits_{2\delta}^\infty t^{-1-\alpha}dt = \varphi(2r)\frac{1}{\alpha\cdot 2^\alpha},$$

тобто $\varphi(2r) \leq c\alpha\cdot 2^\alpha\varphi(r),\ r > 0$. Таким чином, $\varphi(2r) \approx \varphi(r),\ r > 0$.

Далі, зі співвідношення (3.4) одержуємо

$$M^k_f(r) = (\ln 2)^{-1/\theta} c\varphi(r)\left(\int\limits_r^\infty \left(\frac{M^k_f(t)}{\varphi(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} \leq c_1\varphi(r)\|f\|_{BMO^k_{\varphi,\theta}}, \quad r \in (0,+\infty),$$

звідки, зокрема, випливає, що

$$\int\limits_1^\infty \frac{M^k_f(t)}{t^{\alpha+1}}dt \leq c_1\|f\|_{BMO^k_{\varphi,\theta}} \int\limits_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t^{\alpha+1}}dt < +\infty.$$

Тому й у цьому випадку, застосовуючи теорему 1 з [15], переконуємось у справедливості твердження a).

Введемо позначення $G^{k,\alpha}_f(r) := r^\alpha \int_r^\infty \frac{M^k_f(t)}{t^{\alpha+1}}dt$ і доведемо, що

$$\left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{G^{k,\alpha}_f(t)}{\varphi(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} \leq c\|f\|_{BMO^k_{\varphi,\theta}},$$

де стала $c > 0$ не залежить від f.

Нехай $g \in L^{\theta_1}(0,+\infty),\ g(t) \geq 0\ (t > 0),\ \dfrac{1}{\theta_1} + \dfrac{1}{\theta} = 1$. Тоді, змінюючи порядок інтегрування, отримуємо

$$\int\limits_0^\infty \frac{G^{k,\alpha}_f(t)}{t^{1/\theta}\varphi(t)}g(t)dt = \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{t^{1/\theta}\varphi(t)}t^\alpha \int\limits_t^\infty \frac{M^k_f(y)}{y^{\alpha+1}}dy\right) g(t)dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{M_f^k(y)}{y^{\alpha+1}} \left(\int_0^y \frac{t^\alpha g(t)}{t^{1/\theta}\varphi(t)} \right) dy. \tag{3.5}$$

Відомо [2], що якщо виконується умова $\varphi \in Z_\alpha$, то існує число $\nu \in (0,\alpha)$ таке, що $\dfrac{\varphi(t)}{t^\nu}$ майже спадає. Нехай $\beta = \nu - \alpha + \dfrac{1}{\theta}$. Тоді за допомогою (3.5) одержуємо

$$\int_0^\infty \frac{G_f^{k,\alpha}(t)}{t^{1/\theta}\varphi(t)} g(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{M_f^k(y)}{y^{\alpha+1}} \left(\int_0^y \frac{g(t)}{\left(\frac{\varphi(t)}{t^\nu}\right) t^\beta} dt \right) dy \le$$

$$\le c \int_0^\infty \frac{M_f^k(y)}{y^{\alpha+1}} \left(\frac{y^\nu}{\varphi(y)} \int_0^y g(t) t^{-\beta} dt \right) dy =$$

$$= c \int_0^\infty \frac{M_f^k(y)}{\varphi(y)} \left(y^{\nu-\alpha-1} \int_0^y g(t) t^{-\beta} dt \right) dy =$$

$$= c \int_0^\infty \frac{M_f^k(y)}{y^{1/\theta}\varphi(y)} \left(y^{\beta-1} \int_0^y g(t) t^{-\beta} dt \right) dy, \tag{3.6}$$

де $c > 0$ — деяка стала, яка залежить лише від φ і ν.

Далі знаходимо $\beta = \nu + \dfrac{1}{\theta} - \alpha < \alpha + \dfrac{1}{\theta} - \alpha = \dfrac{1}{\theta} \le 1$, тобто $\beta < 1$. Враховуючи це, при $\theta_1 = \infty$ (тобто $\theta = 1$) з нерівності (3.6) отримуємо

$$\int_0^\infty \frac{G_f^{k,\alpha}(t)}{t^{1/\theta}\varphi(t)} g(t) dt = c \|g\|_{L^{\theta_1}(0,+\infty)} \int_0^\infty \frac{M_f^k(y)}{y\varphi(y)} \left(y^{\beta-1} \int_0^y t^{-\beta} dt \right) dy =$$

$$= c \frac{1}{1-\beta} \|g\|_{L^{\theta_1}(0,+\infty)} \|f\|_{BMO^k_{\varphi,\theta}}. \tag{3.7}$$

Тепер розглянемо випадок $1 < \theta_1 < \infty$. Застосовуючи нерівність Гельдера, з (3.6) одержуємо

$$\int_0^\infty \frac{G_f^{k,\alpha}(t)}{t^{1/\theta}\varphi(t)} g(t) dt \le c \left(\int_0^\infty \left(\frac{M_f^k(y)}{\varphi(y)} \right)^\theta \frac{dy}{y} \right)^{1/\theta} \times$$

$$\times \left(\int_0^\infty \left(y^{\beta-1} \int_0^y g(t) t^{-\beta} dt \right)^{\theta_1} dy \right)^{1/\theta_1}. \tag{3.8}$$

Позначимо $r = (1-\beta)\theta_1 - 1$. Тоді

$$r = \left(1 - \nu - \frac{1}{\theta} + \alpha\right)\theta_1 - 1 > \left(1 - \nu - \frac{1}{\theta} + \nu\right)\theta_1 - 1 = \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)\theta_1 - 1 = \frac{1}{\theta_1}\theta_1 - 1 = 1 - 1 = 0,$$

тобто $r > 0$. Тепер, застосовуючи нерівність Гарді (див. [20])

$$\left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^x |h(y)|dy\right)^{\theta_1} x^{-r-1}dx\right)^{1/\theta_1} \leq \frac{\theta_1}{r}\left(\int\limits_0^\infty (y|h(y)|)^{\theta_1} y^{-r-1}dy\right)^{1/\theta_1}$$

і покладаючи $h(y)=g(y)y^{-\beta}$, з (3.8) отримуємо

$$\int\limits_0^\infty \frac{G_f^{k,\alpha}(t)}{t^{1/\theta}\varphi(t)}g(t)dt \leq c\|f\|_{BMO^k_{\varphi,\theta}}\frac{\theta_1}{r}\left(\int\limits_0^\infty \left(yg(y)y^{-\beta}\right)^{\theta_1} y^{(\beta-1)\theta_1}dy\right)^{1/\theta_1} =$$

$$= c\frac{\theta_1}{(1-\beta)\theta_1-1}\|f\|_{BMO^k_{\varphi,\theta}}\left(\int\limits_0^\infty (g(y))^{\theta_1}dy\right)^{1/\theta_1} =$$

$$= c\frac{\theta_1}{(1-\beta)\theta_1-1}\|f\|_{BMO^k_{\varphi,\theta}}\|g\|_{L^{\theta_1}(0,+\infty)}. \tag{3.9}$$

Із нерівностей (3.7) і (3.9) видно, що при $1\leq\theta<\infty$ виконується нерівність

$$\left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{G_f^{k,\alpha}(t)}{\varphi(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} \leq c\|f\|_{BMO^k_{\varphi,\theta}},$$

де стала $c>0$ не залежить від f. Звідси за допомогою нерівності (2.1) одержуємо

$$A^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}(f) = \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{H_f^{k,\alpha}(t)}{\varphi(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} \leq c\left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{G_f^{k,\alpha}(t)}{\varphi(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} \leq c_1\|f\|_{BMO^k_{\varphi,\theta}},$$

тобто справджується твердження b) теореми і виконується нерівність (3.2) у випадку $1\leq\theta<$ $<\infty$.

Теорему доведено.

Із теорем 3.1 і 3.2 випливає така теорема.

Теорема 3.3. *Нехай $f\in L_{\mathrm{loc}}(R^n)$, $1\leq\theta\leq\infty$, $\alpha>0$, $k=(\alpha)+1$ і $\varphi\in Z_\alpha$. Тоді $BMO^k_{\varphi,\theta}=HO^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}$ і*

$$\exists c_1>0\quad \exists c_2>0\quad \forall f: c_1\|f\|_{BMO^k_{\varphi,\theta}} \leq \|f\|_{H^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}} \leq c_2\|f\|_{BMO^k_{\varphi,\theta}}.$$

Нехай $BMO_{\varphi,\theta}:=BMO^1_{\varphi,\theta}$, $BMO_\varphi:=BMO_{\varphi,\infty}$. З попередньої теореми випливають такі твердження у термінах модуля гармонічної осциляції $H_f(\delta)$.

***Наслідок* 3.1.** *Нехай $f\in L_{\mathrm{loc}}(R^n)$, $1\leq\theta\leq\infty$ і $\varphi\in Z_1$. Тоді $BMO_{\varphi,\theta}=HO_{\varphi,\theta}$ і*

$$\exists c_1>0\quad \exists c_2>0\quad \forall f: c_1\|f\|_{BMO_{\varphi,\theta}} \leq \|f\|_{H_{\varphi,\theta}} \leq c_2\|f\|_{BMO_{\varphi,\theta}}.$$

***Наслідок* 3.2.** *Нехай $f\in L_{\mathrm{loc}}(R^n)$ і $\varphi\in Z_1$. Тоді еквівалентні такі умови*:

1) $f\in BMO_\varphi$,

2) $A_\varphi(f):=\sup_{\substack{r>0\\ x\in R^n}}\dfrac{1}{\varphi(r)}\displaystyle\int_{R^n}P_r(x-t)\left|f(t)-P_rf(x)\right|dt<+\infty.$

При цьому $\|f\|_{BMO_\varphi}\approx A_\varphi(f)$, де сталі щодо $\approx$ не залежать від f.

4. Властивості сингулярного інтегрального оператора. Розглянемо сингулярний інтегральний оператор (див., наприклад, [13, 16])

$$A_k f(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{R^n} \left\{ K_\varepsilon(x-y) - \left(\sum_{|\nu|\le k-1} \frac{x^v}{v!} D^v K(-y) \right) X_{\{|t|>1\}}(y) \right\} f(y)\, dy,$$

де

$$K(x) = \omega(x)|x|^{-n}, \qquad \int\limits_{S^{n-1}} \omega(x) ds = 0, \qquad K_\varepsilon(x) = K(x) X_{\{|t|>\varepsilon\}}(x),$$

$\omega(x)$ — однорідна функція степеня 0, $X_{\{|t|>\varepsilon\}}$ — характеристична функція множини $\{t \in R^n : |t| > \varepsilon\}$, S^{n-1} — одинична сфера в евклідовому просторі R^n. Припускаємо, що при $k = 1$ функція $K(x)$ диференційовна і має обмежені частинні похідні першого порядку, а при $k > 1$ функція $K(x)$ є k разів неперервно диференційовною на сфері S^{n-1}; $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — цілі невід'ємні числа, $|v| = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$, $v! = v_1! v_2! \ldots v_n!$, $k \in N$,

$$D^v f := \frac{\partial^{|v|} f}{\partial x_1^{v_1} \partial x_2^{v_2} \ldots \partial x_n^{v_n}}.$$

Лема 4.1. *Нехай* $f \in L_{\mathrm{loc}}(R^n)$, $\alpha > 0$, $k \in N$, $k < \alpha$, $\tilde f := A_k f$ *і*

$$\int\limits_1^\infty \frac{H_f^{k,\alpha}(t)}{t^{k+1}} dt < +\infty.$$

Тоді виконується нерівність

$$H_{\tilde f}^{k,\alpha}(\delta) \le C\delta^k \int\limits_\delta^\infty \frac{H_f^{k,\alpha}(t)}{t^{k+1}} dt, \quad \delta > 0, \tag{4.1}$$

де стала $C > 0$ *не залежить від* f *і* δ.

Доведення. Відомо [13], що при збіжності інтеграла у правій частині виконується нерівність

$$M_{\tilde f}^k(\delta) \le c\delta^k \int\limits_\delta^\infty \frac{M_f^k(t)}{t^{k+1}} dt, \quad \delta > 0, \tag{4.2}$$

де $c > 0$ не залежить від f і δ.

Застосовуючи нерівності (2.1), (4.2) і (2.2), отримуємо

$$H_{\tilde f}^{k,\alpha}(\delta) \le c\delta^\alpha \int\limits_\delta^\infty \frac{M_{\tilde f}^k(t)}{t^{\alpha+1}} dt \le c_1 \delta^\alpha \int\limits_\delta^\infty \frac{1}{t^{\alpha+1}} \left(t^k \int\limits_t^\infty \frac{M_f^k(y)}{y^{k+1}} dy \right) dt =$$

$$= c_1 \delta^\alpha \int\limits_\delta^\infty \frac{1}{t^{\alpha+1-k}} \left(\int\limits_t^\infty \frac{M_f^k(y)}{y^{k+1}} dy \right) dt \le c_2 \delta^\alpha \int\limits_\delta^\infty \frac{1}{t^{\alpha+1-k}} \left(\int\limits_t^\infty \frac{H_f^{k,\alpha}(y)}{y^{k+1}} dy \right) dt =$$

$$= c_2\delta^{\alpha}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{H_f^{k,\alpha}(y)}{y^{k+1}}\left(\int\limits_{\delta}^{y}t^{k-\alpha-1}dt\right)dy \le \frac{c_2}{\alpha-k}\delta^{\alpha}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{H_f^{k,\alpha}(y)}{y^{k+1}}\Big(\delta^{k-\alpha}-y^{k-\alpha}\Big)dy \le$$

$$\le \frac{c_2}{\alpha-k}\delta^{k}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{H_f^{k,\alpha}(y)}{y^{k+1}}\,dy, \quad \delta>0.$$

Лему доведено.

Лема 4.2. *Якщо* $\mu_1<\mu_2$, *то* $Z_{\mu_1}\subset Z_{\mu_2}$.

Доведення. Нехай $\varphi\in Z_{\mu_1}$, тобто

$$\delta^{\mu_1}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t^{\mu_1+1}}dt = O\big(\varphi(\delta)\big), \quad \delta>0.$$

Звідси при $\mu_1<\mu_2$ отримуємо

$$\delta^{\mu_2}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t^{\mu_2+1}}dt = \delta^{\mu_1}\delta^{\mu_2-\mu_1}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t^{\mu_1+1}}\frac{1}{t^{\mu_2-\mu_1}}dt \le$$

$$\le \delta^{\mu_1}\delta^{\mu_2-\mu_1}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t^{\mu_1+1}}\frac{1}{\delta^{\mu_2-\mu_1}}dt = \delta^{\mu_1}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t^{\mu_1+1}}dt = O\big(\varphi(\delta)\big), \quad \delta>0.$$

Лему доведено.

Теорема 4.1. *Нехай* $\alpha>0,\ k\in N,\ k<\alpha+1,\ 1\le\theta\le\infty,\ \mu=\min\{\alpha,k\},\ \varphi\in Z_{\mu}$. *Тоді оператор* A_k *обмежено діє в просторі* $HO^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}$.

Доведення. Нехай спочатку $\alpha\le k<\alpha+1$. Оскільки k — натуральне число і α — додатне число, то ця нерівність рівносильна тому, що $k=(\alpha)+1$, де через (α) позначено найбільше ціле число, яке менше за число α.

Якщо $\varphi\in Z_{\alpha}$, то в цьому випадку простори $HO^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}$ і $BMO^{k}_{\varphi,\theta}$ є ізоморфними (теорема 3.3). Крім того, відомо [13], що при виконанні умови $\varphi\in Z_k$ оператор A_k обмежено діє в просторі $BMO^{k}_{\varphi,\theta}$. Таким чином, згідно з лемою 4.2 отримуємо, що якщо $\varphi\in Z_{\alpha}$ (в цьому випадку $\mu=\alpha$), то оператор A_k обмежено діє в просторі $HO^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}$.

Тепер розглянемо випадок $k<\alpha$. Нехай $\varphi\in Z_k$ (у цьому випадку $\mu=k$).

Якщо $\theta=\infty$, то умова $f\in HO^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}$ рівносильна такій:

$$\|f\|_{HO^{k,\alpha}_{\varphi,\infty}} := \sup\left\{\frac{H_f^{k,\alpha}(t)}{\varphi(t)} : t>0\right\} < +\infty.$$

Звідси отримуємо, що $H_f^{k,\alpha}(\delta)\le\|f\|_{HO^{k,\alpha}_{\varphi,\infty}}\varphi(\delta),\ \delta>0$. Тоді завдяки умові $\varphi\in Z_k$ за допомогою нерівності (4.1) маємо

$$H_{\tilde f}^{k,\alpha}(\delta)\le c\delta^{k}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{H_f^{k,\alpha}(t)}{t^{k+1}}dt \le c\|f\|_{HO^{k,\alpha}_{\varphi,\infty}}\delta^{k}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t^{k+1}}dt \le$$

$$\leq c_1 \|f\|_{HO^{k,\alpha}_{\varphi,\infty}} \varphi(\delta), \quad \delta > 0,$$

де $\tilde{f} := A_k f$, а додатна стала c_1 не залежить від f і δ. З останньої нерівності випливає, що $\tilde{f} \in HO^{k,\alpha}_{\varphi,\infty}$ і

$$\|A_k f\|_{HO^{k,\alpha}_{\varphi,\infty}} = \|\tilde{f}\|_{HO^{k,\alpha}_{\varphi,\infty}} = \sup\left\{\frac{H^{k,\alpha}_{\tilde{f}}(\delta)}{\varphi(\delta)} : \delta > 0\right\} \leq c_1 \|f\|_{HO^{k,\alpha}_{\varphi,\infty}},$$

тобто оператор $A_k f = \tilde{f}$ обмежено діє у просторі $HO^{k,\alpha}_{\varphi,\infty}$.

Далі розглянемо випадок $1 \leq \theta < \infty$. Нехай $f \in HO^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}$. Це означає, що

$$\|f\|_{HO^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}} := \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{H^{k,\alpha}_f(t)}{\varphi(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\theta}} < +\infty.$$

Звідси отримуємо, що для будь-якого $x \in (0, +\infty)$

$$\|f\|_{HO^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}} \geq \left(\int\limits_x^\infty \left(\frac{H^{k,\alpha}_f(t)}{\varphi(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\theta}} \geq$$

$$\geq \left(\int\limits_x^{2x} \left(\frac{H^{k,\alpha}_f(t)}{\varphi(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\theta}} \geq \frac{H^{k,\alpha}_f(x)}{\varphi(2x)} (\ln 2)^{\frac{1}{\theta}}. \tag{4.3}$$

Можна показати, що якщо $\varphi \in Z_k$, то

$$\exists C > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty) : \varphi(2x) \leq C\varphi(x).$$

За допомогою цього факту і нерівності (4.3) встановлюємо, що

$$H^{k,\alpha}_f(x) \leq (\ln 2)^{-\frac{1}{\theta}} C \|f\|_{HO^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}} \varphi(x), \quad x \in (0, +\infty).$$

Звідси одержуємо нерівність

$$\int\limits_1^\infty \frac{H^{k,\alpha}_f(x)}{x^{k+1}} dx \leq (\ln 2)^{-\frac{1}{\theta}} C \|f\|_{HO^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}} \int\limits_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t^{k+1}} dt < +\infty.$$

Таким чином, якщо $1 \leq \theta < \infty$, $f \in HO^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}$ і $\varphi \in Z_k$, то збігається інтеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{H^{k,\alpha}_f(x)}{x^{k+1}} dx.$$

Тому має місце нерівність (4.1). Якщо ввести позначення

$$F_f^{k,\alpha}(x) := x^k \int\limits_x^\infty \frac{H_f^{k,\alpha}(t)}{t^{k+1}} dt, \quad x \in (0, +\infty),$$

то згідно з нерівністю (4.1) доведення теореми буде завершено, якщо ми покажемо, що

$$\left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{F_f^{k,\alpha}(t)}{\varphi(t)} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta} \leq C \|f\|_{HO_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}}, \tag{4.4}$$

де C — додатна стала, яка не залежить від f.

Нехай $h \in L^{\theta_1}(0, +\infty)$, $h(t) \geq 0$, $\dfrac{1}{\theta_1} + \dfrac{1}{\theta} = 1$. Тоді, змінюючи порядок інтегрування, маємо

$$\int\limits_0^\infty \frac{F_f^{k,\alpha}(t)}{t^{1/\theta}\varphi(t)} h(t) dt = \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{t^{1/\theta}\varphi(t)} t^k \int\limits_t^\infty \frac{H_f^{k,\alpha}(\tau)}{\tau^{k+1}} d\tau \right) h(t)\, dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{H_f^{k,\alpha}(\tau)}{\tau^{k+1}} \left(\int\limits_0^\tau \frac{t^k h(t)}{t^{1/\theta}\varphi(t)} dt \right) d\tau. \tag{4.5}$$

Відомо [2], що якщо $\varphi \in Z_k$, то існує число $\sigma \in (0, k)$ таке, що $\varphi(t)t^{-\sigma}$ майже спадає. Нехай $\beta = \sigma - k + \dfrac{1}{\theta}$. Тоді за допомогою співвідношення (4.5) отримуємо

$$\int\limits_0^\infty \frac{F_f^{k,\alpha}(t)}{t^{1/\theta}\varphi(t)} h(t) dt = \int\limits_0^\infty \frac{H_f^{k,\alpha}(\tau)}{\tau^{k+1}} \left(\int\limits_0^\tau \frac{h(t)}{\left(\dfrac{\varphi(t)}{t^\sigma}\right) t^\beta} dt \right) d\tau \leq$$

$$\leq c \int\limits_0^\infty \frac{H_f^{k,\alpha}(\tau)}{\tau^{k+1}} \left(\frac{\tau^\sigma}{\varphi(\tau)} \int\limits_0^\tau h(t) t^{-\beta} dt \right) d\tau =$$

$$= c \int\limits_0^\infty \frac{H_f^{k,\alpha}(\tau)}{\varphi(\tau)} \left(\tau^{\sigma-k-1} \int\limits_0^\tau h(t) t^{-\beta} dt \right) d\tau =$$

$$= c \int\limits_0^\infty \frac{H_f^{k,\alpha}(\tau)}{\tau^{1/\theta}\varphi(\tau)} \left(\tau^{\beta-1} \int\limits_0^\tau h(t) t^{-\beta} dt \right) d\tau.$$

Далі, застосовуючи нерівність Гельдера, звідси одержуємо

$$\int\limits_0^\infty \frac{F_f^{k,\alpha}(t)}{t^{1/\theta}\varphi(t)} h(t) dt \leq c \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{H_f^{k,\alpha}(\tau)}{\varphi(\tau)} \right)^\theta \frac{d\tau}{\tau} \right)^{1/\theta} \left(\int\limits_0^\infty \left(\tau^{\beta-1} \int\limits_0^\tau h(t) t^{-\beta} dt \right)^{\theta_1} d\tau \right)^{1/\theta_1} \tag{4.6}$$

з відповідною модифікацією у випадку $\theta_1 = \infty$ (тобто $\theta = 1$), де c — додатна стала. Згідно з нашими позначеннями $\beta = \sigma + \dfrac{1}{\theta} - k < k + \dfrac{1}{\theta} - k = \dfrac{1}{\theta} \leq 1$, тобто $\beta < 1$. Тому при $\theta_1 = \infty$ з нерівності (4.6) безпосередньо випливає, що

$$\int_0^\infty \frac{F_f^{k,\alpha}(t)}{\varphi(t)t^{1/\theta}} h(t)dt \le c\|f\|_{HO^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}} \|h\|_{L^{\theta_1}(0,+\infty)}. \tag{4.7}$$

Нехай тепер $1 < \theta_1 < \infty$. Розглянемо оператор Гарді $Pf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

Відомо (див. [6, 20]), що якщо $w(x) = x^a$, $v(x) = x^{a+p}$, $1 \le p < \infty$ і $a < -1$, то виконується нерівність

$$\left(\int_0^\infty |Pg(x)|^p\, w(x)dx\right)^{1/p} \le c\left(\int_0^\infty |g(x)|^p v(x)dx\right)^{1/p}, \tag{4.8}$$

де стала $c > 0$ не залежить від g.

Позначаючи $a = (\beta-1)\theta_1$, $p = \theta_1$, маємо

$$a + p = (\beta-1)\theta_1 + \theta_1 = \beta\theta_1,$$

$$a = (\beta-1)\theta_1 = \left(\sigma + \frac{1}{\theta} - k - 1\right)\theta_1 < \left(k + \frac{1}{\theta} - k - 1\right)\theta_1 =$$

$$= \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)\theta_1 = \left(-\frac{1}{\theta_1}\right)\theta_1 = -1,$$

тобто $a < -1$. Тоді для функції (4.8) з нерівності $g(x) = h(x)x^{-\beta}$ одержуємо

$$\left(\int_0^\infty x^{(\beta-1)\theta_1}\left(\int_0^x h(t)t^{-\beta}dt\right)^{\theta_1} dx\right)^{1/\theta_1} \le c\left(\int_0^\infty (h(x)x^{-\beta})^{\theta_1} x^{\beta\theta_1}dx\right)^{1/\theta_1} =$$

$$= c\left(\int_0^\infty (h(x))^{\theta_1}dx\right)^{1/\theta_1} = c\|h\|_{L^{\theta_1}(0,+\infty)}.$$

Враховуючи це, з нерівності (4.6) отримуємо

$$\int_0^\infty \frac{F_f^{k,\alpha}(t)}{\varphi(t)t^{1/\theta}} h(t)dt \le c\|f\|_{HO^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}} \|h\|_{L^{\theta_1}(0,+\infty)}, \tag{4.9}$$

де $c > 0$ — деяка стала, що не залежить від f і h.

Із нерівностей (4.7) і (4.9) видно, що при $1 \le \theta < \infty$ виконується нерівність (4.4). Звідси завдяки нерівності (4.1) знаходимо

$$\|A_k f\|_{HO^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}} = \|\tilde{f}\|_{HO^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}} = \left(\int_0^\infty \left(\frac{H^{k,\alpha}_{\tilde{f}}(t)}{\varphi(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} \le$$

$$\leq C\left(\int_0^\infty \left(\frac{F_f^{k,\alpha}(t)}{\varphi(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} \leq C_1\|f\|_{HO^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}},$$

де стала $C_1 > 0$ не залежить від f. Остання нерівність означає, що оператор $A_k f = \tilde{f}$ обмежено діє у просторі $HO^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}$.

Теорему доведено.

***Наслідок* 4.1.** *Нехай* $1 \leq \theta \leq \infty$, $\varphi \in Z_1$. *Тоді оператор* A_1 *обмежено діє у просторі* $HO_{\varphi,\theta}$.

Література

1. L. R. Aliyeva, *Equivalent norms in spaces of mean oscillation*, Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. and Math. Sci., **31**, № 4, 19 – 26 (2011).
2. N. K. Bari, S. B. Stechkin, *Best approximation and differential properties of two conjugate functions* (in Russian), Tr. Mosk. Mat. Obshch., **5**, 483 – 552 (1956).
3. O. Blasco, M. A. Perez, *On functions of integrable mean oscillation*, Rev. Mat. Complut., **18**, № 2, 465 – 477 (2005).
4. S. Campanato, *Proprieta di hölderianita di alcune classi di funzioni*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, **17**, 175 – 188 (1963).
5. De R. Vore, R. Sharpley, *Maximal functions measuring smoothness*, Mem. Amer. Math. Soc., **47**, № 293, 1 – 115 (1984).
6. E. M. Dyn'kin, B. P. Osilenker, *Weighted estimates for singular integrals and their applications* (in Russian), Itogi Nauki i Tekh. Ser. Mat. Anal., **21**, 42 – 129 (1983).
7. Ch. Fefferman, E. M. Stein, *H^p spaces of several variables*, Acta Math., 129, № 3-4, 137 – 193 (1972).
8. F. John, L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation*, Commun. Pure and Appl. Math., **14**, 415 – 426 (1961).
9. G. N. Meyers, *Mean oscillation over cubes and Hölder continuity*, Proc. Amer. Math. Soc., **15**, 717 – 721 (1964).
10. J. Peetre, *On the theory of $L_{p,\lambda}$ spaces*, J. Funct. Anal., **4**, 71 – 87 (1969).
11. R. M. Rzaev, *A multidimensional singular integral operator in spaces defined by conditions on the mean oscillation of functions*, Sov. Math. Dokl., **42**, № 2, 520 – 523 (1991).
12. R. M. Rzaev, *On boundedness of multidimensional singular integral operator in spaces $BMO^k_{\varphi,\theta}$ and $H^k_{\varphi,\theta}$* (in Russian), Proc. Azerb. Math. Soc., **2**, 164 – 175 (1996).
13. R. M. Rzaev, *A multidimensional singular integral operator in spaces defined by conditions on the k-th order mean oscillation* (in Russian), Dokl. Akad. Nauk, **356**, № 5, 602 – 604 (1997).
14. R. M. Rzaev, *On some maximal functions, measuring smoothness, and metric characteristics*, Trans. Acad. Sci. Azerb., **19**, № 5, 118 – 124 (1999).
15. R. M. Rzaev, *Some growth conditions for locally summable functions*, Abstracts Intern. Conf. Math. and Mech., Baku, **147** (2006).
16. R. M. Rzaev, L. R. Aliyeva, *On local properties of functions and singular integrals in terms of the mean oscillation*, Cent. Eur. J. Math., **6**, № 4, 595 – 609 (2008).
17. R. M. Rzaev, L. R. Aliyeva, *Mean oscillation, Φ-oscillation and harmonic oscillation*, Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. and Math. Sci., **30**, № 1, 167 – 176 (2010).
18. R. M. Rzaev, Z. Sh. Gakhramanova, L. R. Alieva, *On generalized Besov and Campanato spaces*, Ukr. Math. J., **69**, № 8, 1275 – 1286 (2018).
19. S. Spanne, *Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, **19**, 593 – 608 (1965).
20. E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1970).

Одержано 27.12.19,
після доопрацювання — 11.08.21