

## КРАЙНОСТЬ ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫХ МЕР ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ БЛЮМА – КАПЕЛЯ В СЛУЧАЕ „ЖЕЗЛ” НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

We study the translation-invariant Gibbs measures for the Blume–Capel model with a wand on a Cayley tree of order  $k$ . We find the exact critical value  $\theta_{cr} = 1$  such that there exists a unique translation-invariant Gibbs measure for  $\theta \geq \theta_{cr}$  and there exist exactly three translation-invariant Gibbs measures for  $0 < \theta < \theta_{cr}$  in the case of a wand for the model. In addition, we investigate the problem of (non)extremes for these measures.

Розглядаються трансляційно-інваріантні міри Гіббса для моделі Блюма–Капеля у випадку „жезл” на дереві Келі порядку  $k$ . Знайдено таке точне критичне значення  $\theta_{cr} = 1$ , що при  $\theta \geq \theta_{cr}$  існує єдина трансляційно-інваріантна міра Гіббса, а при  $0 < \theta < \theta_{cr}$  існують точно три трансляційно-інваріантні міри Гіббса у випадку „жезл” для розглядуваної моделі. Крім того, вивчено задачу (не)крайності для цих мір.

**1. Введение.** Мера Гиббса — это фундаментальный закон, определяющий вероятность микроскопического состояния данной физической системы. Она играет важную роль в определении существования фазового перехода той или иной физической системы, так как каждой предельной мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы и происходит фазовый переход, когда мера Гиббса не единственна. Кроме того, известно, что множество всех предельных мер Гиббса образует непустое выпуклое компактное подмножество в множестве всех вероятностных мер и каждая точка этого выпуклого множества однозначно разлагается по его крайним точкам. В связи с этим особый интерес представляет описание всех крайних точек этого выпуклого множества, т. е. крайних мер Гиббса (см. [1–3]).

Изучению предельных мер Гиббса на дереве Кэли для таких моделей статистической физики, как модель Изинга, модель Поттса, модель жесткой сердцевины, модель SOS, посвящено много работ (см., например, [4–9]). В частности, в работе [5] дано полное описание трансляционно-инвариантных мер Гиббса для ферромагнитной модели Поттса с  $q$ -состояниями и показано, что их количество равно  $2^q - 1$ , а в работе [7] изучена задача крайности этих мер. В [8] изучены гиббсовские меры для моделей жесткой сердцевины с тремя состояниями на дереве Кэли порядка  $k \geq 1$  и доказано, что трансляционно-инвариантная мера Гиббса не единственна. Кроме того, указаны области, где меры являются (не)крайними. Более подробно с результатами, посвященными предельным мерам Гиббса на дереве Кэли, можно ознакомиться в монографии [10].

Настоящая работа посвящена изучению динамической модели Блюма–Капеля, которая еще не была изучена на дереве Кэли. Это двумерная спиновая система, где спин может принимать три значения:  $-1, 0, +1$ . Первоначально он был введен для изучения  $He^3 - He^4$  фазового перехода (см. [11]). Можно говорить о ней как о системе частиц со спином. Значение  $\sigma(x) = 0$  спина на узле решетки (или на узле дерева)  $x$  будет соответствовать отсутствию частиц (вакансия), в то время как значения  $\sigma(x) = +1, -1$  будут соответствовать наличию на узле  $x$  частицы со спином  $+1, -1$  соответственно (см. [11–13]).

Опишем кратко структуру статьи. Во втором пункте приведены предварительные сведения; в третьем пункте доказана теорема, обеспечивающая условие согласованности меры; в четвертом пункте найдено точное критическое значение  $\theta_{cr} = 1$  такое, что при  $\theta \geq \theta_{cr}$  существует единственная трансляционно-инвариантная мера Гиббса, а при  $0 < \theta < \theta_{cr}$  существуют ровно три трансляционно-инвариантные меры Гиббса; в пятом и шестом пунктах изучена (не)крайность этих мер.

**2. Предварительные сведения.** Дерево Кэли  $\Gamma^k = (V, L)$  порядка  $k \geq 1$  – это бесконечное дерево, т. е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно  $k + 1$  ребро, где  $V$  – множество вершин  $\Gamma^k$ ,  $L$  – его множество ребер. Пусть  $i$  – функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру  $l \in L$  его концевые точки  $x, y \in V$ . Если  $i(l) = \{x, y\}$ , то вершины  $x$  и  $y$  называются ближайшими соседями и обозначаются через  $\langle x, y \rangle$ . Расстояние  $d(x, y)$ ,  $x, y \in V$ , на дереве Кэли определяется формулой  $d(x, y) = \min \{d \mid \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V \text{ такой, что } \langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle\}$ .

Известно, что дерево Кэли представляется как группа  $G_k$ , являющаяся свободным произведением  $k + 1$  циклической группы второго порядка с образующими  $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$  [1].

Рассмотрим модель, где спин принимает значения из множества  $\Phi = \{-1, 0, +1\}$ . Тогда конфигурация  $\sigma$  на  $V$  определяется как функция  $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$ ; множество всех конфигураций совпадает с  $\Omega = \Phi^V$ . Пусть  $A \subset V$ . Обозначим через  $\Omega_A$  пространство конфигураций, определенных на множестве  $A$ .

Рассмотрим граф с тремя вершинами:  $-1, 0, +1$  (на множестве значений  $\sigma(x)$ ), который имеет следующий вид [4]:

$$\text{жезл: } \{0, -1\}, \{0, +1\}, \{-1, -1\}, \{+1, +1\}.$$

Гамильтониан модели Блюма – Капеля определяется следующим образом:

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x, y \rangle, x, y \in V} (\sigma(x) - \sigma(y))^2, \tag{1}$$

где  $J \in \mathbb{R}$ .

Пусть  $x^0 \in V$  – фиксированная точка. Будем писать  $x < y$ , если путь от  $x^0$  до  $y$  проходит через  $x$ .

Обозначим

$$W_n = \{x \in V : d(x^0, x) = n\}, \quad V_n = \{x \in V : d(x^0, x) \leq n\}.$$

Точка  $y$  называется „прямым потомком” точки  $x$ , если  $x < y$  и  $d(x, y) = 1$ .

Для  $x \in G_k$  обозначим через  $S(x)$  множество „прямых потомков” точки  $x \in V$ .

Пусть  $O = \{\text{жезл}\}$ ,  $G \in O$ . Конфигурация  $\sigma$  называется  $G$ -допустимой конфигурацией на дереве Кэли (в  $V_n$  или  $W_n$ ), если  $\{\sigma(x), \sigma(y)\} = G$  для любой ближайшей пары соседей  $x, y$  из  $V$  (из  $V_n$ ). Обозначим множество  $G$ -допустимых конфигураций через  $\Omega^G(\Omega_{V_n}^G)$ .

Пусть  $h : x \mapsto h_x = (h_{-1,x}, h_{0,x}, h_{+1,x})$  – вектор-функция от  $x \in V \setminus \{x^0\}$ . Рассмотрим вероятностное распределение  $\mu^{(n)}$  на  $\Omega_{V_n}^G$ :

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left\{ -\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x), x} \right\}, \tag{2}$$

где  $\sigma_n \in \Omega_{V_n}^G$ ,  $Z_n = \sum_{\bar{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}^G} \exp \left\{ -\beta H(\bar{\sigma}_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\bar{\sigma}(x), x} \right\}$  и  $h_{\bar{\sigma}, x} \in R$ .

Говорят, что вероятностное распределение  $\mu^{(n)}$  ( $\forall n \geq 1$ ) согласованно, если

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}) \quad (3)$$

для всех  $n \geq 1$  и  $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}^G$ .

В этом случае существует единственная мера  $\mu$  на  $\Omega_V^G$  такая, что

$$\mu(\{\sigma \mid V_n = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$$

для всех  $n \geq 1$  и  $\sigma_n \in \Omega_{V_n}^G$ .

Пусть  $L(G)$  – множество ребер графа  $G$ . Обозначим через  $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j=-1,0,+1}$  матрицу смежности  $G$ , т. е.

$$a_{ij} \equiv a_{ij}^G = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} \in L(G), \\ 0, & \text{если } \{i, j\} \notin L(G). \end{cases}$$

**3. Система функциональных уравнений.** Следующая теорема содержит необходимые и достаточные условия на  $h_{i,x}$ , при которых выполняется (3).

**Теорема 1.** Пусть  $k \geq 2$ . Вероятностное распределение  $\mu^{(n)}(\sigma_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , в (2) согласованно тогда и только тогда, когда для любого  $x \in V$  имеют место следующие уравнения:

$$\begin{aligned} z_{+1,x} &= \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{+1,-1}\theta^4 z_{-1,y} + a_{+1,0}\theta + a_{+1,+1}z_{+1,y}}{a_{0,-1}\theta z_{-1,y} + a_{0,0} + a_{0,+1}\theta z_{+1,y}}, \\ z_{-1,x} &= \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{-1,-1}z_{-1,y} + a_{-1,0}\theta + a_{-1,+1}\theta^4 z_{+1,y}}{a_{0,-1}\theta z_{-1,y} + a_{0,0} + a_{0,+1}\theta z_{+1,y}}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\theta = \exp\{-J\beta\}$ ,  $\beta = 1/T$ ,  $z_{i,x} = \exp(h_{i,x} - h_{0,x})$ ,  $i = +1, -1$ .

**Доказательство. Необходимость.** В силу условия согласования (3) получаем

$$\begin{aligned} \frac{Z_{n-1}}{Z_n} \sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \prod_{x \in W_{n-1}} \prod_{y \in S(x)} a_{\sigma_{n-1}(x), \omega_n(y)} \exp \left\{ -J\beta(\sigma_{n-1}(x) - \omega_n(y))^2 + h_{\omega_n(y), y} \right\} = \\ = \prod_{x \in W_{n-1}} \exp(h_{\sigma_{n-1}(x), x}), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\sigma(x) \in \Phi$ .

В случае  $\sigma_{n-1}(x) = -1$ ,  $\sigma_{n-1}(x) = 0$ ,  $\sigma_{n-1}(x) = +1$  запишем (5) в виде

$$\begin{aligned} \exp(h_{+1,x} - h_{0,x}) &= \prod_{y \in S(x)} \frac{\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} a_{+1, \omega_n(y)} \exp \left\{ -J\beta(1 - \omega_n(y))^2 + h_{\omega_n(y), y} \right\}}{\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} a_{0, \omega_n(y)} \exp \left\{ -J\beta\omega_n^2(y) + h_{\omega_n(y), y} \right\}}, \\ \exp(h_{-1,x} - h_{0,x}) &= \prod_{y \in S(x)} \frac{\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} a_{-1, \omega_n(y)} \exp \left\{ -J\beta(-1 - \omega_n(y))^2 + h_{\omega_n(y), y} \right\}}{\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} a_{0, \omega_n(y)} \exp \left\{ -J\beta\omega_n^2(y) + h_{\omega_n(y), y} \right\}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \exp(h_{+1,x} - h_{0,x}) = \\ &= \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{+1,-1} \exp\{-4J\beta\} \exp\{h_{-1,y} - h_{0,y}\} + a_{+1,0} \exp\{-J\beta\} + a_{+1,+1} \exp\{h_{+1,y} - h_{0,y}\}}{a_{0,-1} \exp\{-J\beta\} \exp\{h_{-1,y} - h_{0,y}\} + a_{0,0} + a_{0,+1} \exp\{-J\beta\} \exp\{h_{+1,y} - h_{0,y}\}}, \\ & \exp(h_{-1,x} - h_{0,x}) = \\ &= \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{-1,-1} \exp\{h_{-1,y} - h_{0,y}\} + a_{-1,0} \exp\{-J\beta\} + a_{-1,+1} \exp\{-4J\beta\} \exp\{h_{+1,y} - h_{0,y}\}}{a_{0,-1} \exp\{-J\beta\} \exp\{h_{-1,y} - h_{0,y}\} + a_{0,0} + a_{0,+1} \exp\{-J\beta\} \exp\{h_{+1,y} - h_{0,y}\}}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем (4).

*Достаточность.* Пусть имеет место (4). Тогда для некоторой функции  $b(x) > 0, x \in V$ , выполняется следующее:

$$\prod_{y \in S(x)} \sum_{u \in \{-1,0,+1\}} a_{t,u} \exp\{-J\beta(t-u)^2 + h_{u,y}\} = b(x) \exp(h_t, x), \quad t = -1, 0, +1. \quad (6)$$

Имеем

$$\begin{aligned} (3) &= \frac{1}{Z_n} \exp(-\beta H(\sigma_{n-1})) \times \\ &\times \prod_{x \in W_{n-1}} \prod_{y \in S(x)} \sum_{u \in \{-1,0,+1\}} a_{\sigma_{n-1}(x),u} \exp\{-J\beta(\sigma_{n-1}(x) - u)^2 + h_{u,y}\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая (6), из (7), обозначая

$$B_n(x) = \prod_{x \in W_{n-1}} b(x),$$

получаем

$$(6) = \frac{B_{n-1}}{Z_n} \exp(-\beta H(\sigma_{n-1})) \prod_{x \in W_{n-1}} \exp(h_{\sigma_{n-1}(x),x}). \quad (8)$$

Поскольку  $\mu^{(n)}, n \geq 1$ , – вероятность, то

$$\sum_{\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}} \sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1}, \omega_n) = 1.$$

Следовательно, из (8) получаем равенство  $Z_{n-1} B_{n-1} = Z_n$  и справедливость (3).

Теорема 1 доказана.

**4. Трансляционно-инвариантные меры Гиббса.** Трансляционно-инвариантные меры Гиббса соответствуют решениям (4) с  $z_{i,x} = z_i$  при всех  $x \in V$  и  $i = -1, +1$ . Для удобства обозначим  $z_{+1} = z_1, z_{-1} = z_2$ . Тогда система уравнений (4) в случае „жезл” примет вид

$$\begin{aligned} z_1 &= \left( \frac{\theta + z_1}{\theta z_1 + \theta z_2} \right)^k, \\ z_2 &= \left( \frac{\theta + z_2}{\theta z_1 + \theta z_2} \right)^k. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть  $z_1 = z_2 = z$ . Тогда из (9) получаем

$$z = \left( \frac{\theta + z}{2\theta z} \right)^k. \quad (10)$$

Справедлива следующая лемма.

**Лемма.** Пусть  $k \geq 2$ . Для любого  $\theta > 0$  уравнение (10) имеет единственное решение.

**Доказательство.** Запишем уравнение (10) в виде

$$z = f(z), \quad (11)$$

где

$$f(z) = \left( \frac{\theta + z}{2\theta z} \right)^k.$$

Заметим, что производная функции  $f(z)$

$$f'(z) = k \left( \frac{\theta + z}{2\theta z} \right)^{k-1} \left( -\frac{1}{2z^2} \right) < 0,$$

т. е. функция  $f(z)$  является убывающей при  $z > 0$ . Значит, уравнение (11) имеет единственное решение  $z^* = z^*(k, \theta)$  для любого  $\theta > 0$ .

Лемма доказана.

Далее, вычитая из первого уравнения системы (9) второе, получаем

$$(z_1 - z_2) \left[ 1 - \frac{(\theta + z_1)^{k-1} + \dots + (\theta + z_2)^{k-1}}{(\theta z_1 + \theta z_2)^k} \right] = 0. \quad (12)$$

Следовательно,  $z_1 = z_2$  или

$$\theta^k (z_1 + z_2)^k = (\theta + z_1)^{k-1} + \dots + (\theta + z_2)^{k-1}. \quad (13)$$

Для  $z_1 = z_2 = z$  из леммы следует, что система (9) имеет единственное решение  $(z^*, z^*)$ .

Рассмотрим случай, когда  $k = 2$ . В этом случае справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Для модели (2) существует такое  $\theta_{cr} = 1$ , что при  $\theta \geq \theta_{cr}$  существует ровно одна трансляционно-инвариантная мера Гиббса, а при  $0 < \theta < \theta_{cr}$  существуют ровно три такие меры.

**Доказательство.** Из (12) при  $k = 2$  получаем

$$(z_1 - z_2) \left( 1 - \frac{2\theta + z_1 + z_2}{\theta^2 (z_1 + z_2)^2} \right) = 0.$$

Из леммы известно, что в случае  $z_1 = z_2$  при любых  $\theta > 0$  для модели (2) существует единственная трансляционно-инвариантная мера Гиббса.

Пусть  $z_1 \neq z_2$ . Тогда

$$\theta^2 (z_1 + z_2)^2 = 2\theta + z_1 + z_2.$$

Отсюда

$$\theta^2 (z_1 + z_2)^2 - (z_1 + z_2) - 2\theta = 0.$$

Решая это уравнение относительно  $z_1 + z_2$ , находим

$$(z_1 + z_2)_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{1 + 8\theta^3}}{2\theta^2} = \varphi_{1,2}(\theta) \tag{14}$$

для всех  $\theta > 0$ .

Ясно, что

$$\varphi_1(\theta) = \frac{1 - \sqrt{1 + 8\theta^3}}{2\theta^2} < 0, \quad \varphi_2(\theta) = \frac{1 + \sqrt{1 + 8\theta^3}}{2\theta^2} > 0.$$

Таким образом,  $z_1 + z_2 = \varphi_2(\theta)$ . Отсюда с учетом первого из уравнений (9) получаем квадратное уравнение относительно  $z_1$ , т. е.

$$z_1^2 - (\theta^2 \varphi_2^2(\theta) - 2\theta)z_1 + \theta^2 = 0, \tag{15}$$

где

$$D = \theta^4 \varphi_2^4(\theta) - 4\theta^3 \varphi_2^2(\theta) > 0,$$

что равносильно неравенству  $\theta \varphi_2^2(\theta) - 4 > 0$ . Тогда, заменив  $\varphi_2(\theta)$  из (14) его выражением, получим  $\theta^3 < 1$ , т. е.  $D > 0$  при  $0 < \theta < \theta_{cr} = 1$ . Значит, уравнение (15) имеет два положительных решения при  $0 < \theta < \theta_{cr} = 1$ :

$$\begin{aligned} z_1^{(1)} &= \frac{1}{2} \varphi_2(\theta) + \frac{\sqrt{D}}{2}, \\ z_1^{(2)} &= \frac{1}{2} \varphi_2(\theta) - \frac{\sqrt{D}}{2}. \end{aligned} \tag{16}$$

Поскольку  $z_1 + z_2 = \varphi_2(\theta)$ , то

$$z_2^{(1)} = z_1^{(2)}, \quad z_2^{(2)} = z_1^{(1)},$$

т. е. решения системы  $(z_1, z_2)$  и  $(z_2, z_1)$  симметричны (см. рис. 1).

Теорема 2 доказана.

**5. Условия некрайности мер.** Чтобы проверить некрайность меры, воспользуемся методом из работ [15–17]. Для этого рассмотрим цепи Маркова с состояниями  $\{-1, 0, +1\}$  и матрицу  $P_\mu$  вероятностных переходов  $P_{\sigma(x)\sigma(y)}$ , определенную данной трансляционно-инвариантной гиббсовской мерой  $\mu$ , т. е.  $P_{\sigma(x)\sigma(y)}$  – вероятность сдвига от состояния  $\sigma(x)$  к состоянию  $\sigma(y)$ .

Достаточным условием некрайности меры Гиббса, соответствующей матрице  $P_\mu$ , является то, что  $k\lambda_2^2 > 1$ , где  $\lambda_2$  – второе по модулю максимальное собственное значение матрицы  $P_\mu$  (условие Кестена – Стигума).

Чтобы проверить это условие, нужно знать явный вид решения системы (9). Точные решения пока нам известны только при  $k = 2$ .

Ясно, что при  $k = 2$  система уравнений (9) при  $\theta \geq \theta_{cr} = 1$  имеет единственное решение  $(z^*, z^*)$ , где  $z^*$  – единственное решение уравнения

$$z = \left( \frac{\theta + z}{2\theta z} \right)^2, \tag{17}$$

а при  $0 < \theta < \theta_{cr} = 1$  имеет три решения:  $(z^*, z^*)$ ,  $(z_1, z_2)$ ,  $(z_2, z_1)$ , где

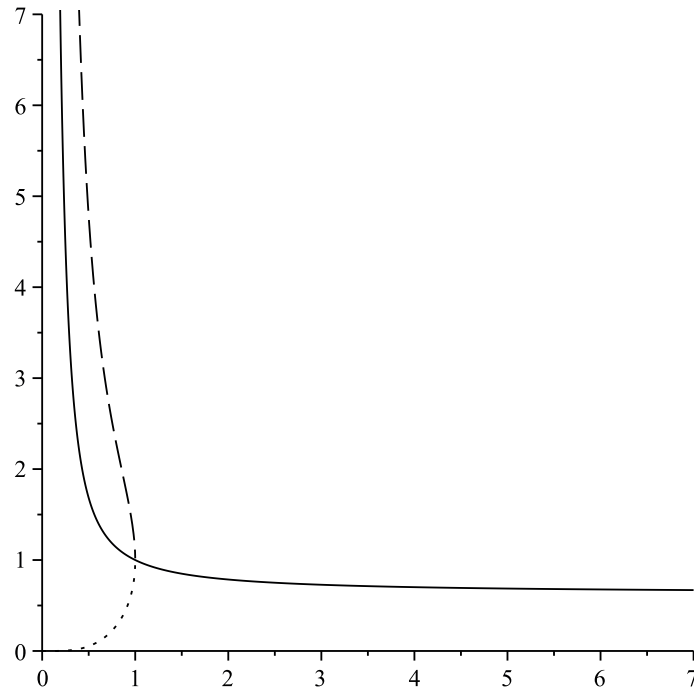


Рис. 1. Графики функций  $z^*(\theta)$  (непрерывная кривая),  $z_1(\theta)$  (штриховая кривая) и  $z_2(\theta)$  (пунктирная кривая).

$$z_1 = \frac{A + \sqrt{D}}{2}, \quad z_2 = \frac{A - \sqrt{D}}{2}. \quad (18)$$

Здесь  $A = \frac{1 + \sqrt{1 + 8\theta^3}}{2\theta^2}$ ,  $D = \theta^4 A^4 - 4\theta^3 A^2$ .

Найдем условия некрайности мер, соответствующим этим решениям. Для этого рассмотрим

$$P_{\sigma(x)\sigma(y)} = \frac{a_{\sigma(x),\sigma(y)} \exp \{-J\beta(\sigma(x) - \sigma(y))^2 + h_{\sigma(y)}\}}{\sum_{\tilde{\sigma}(y) \in \{-1,0,+1\}} a_{\sigma(x),\tilde{\sigma}(y)} \exp \{-J\beta(\sigma(x) - \tilde{\sigma}(y))^2 + h_{\tilde{\sigma}(y)}\}}.$$

В этом случае  $G = \text{жезл}$

$$\begin{aligned} a_{-1,-1} &= 1, & a_{-1,0} &= 1, & a_{-1,+1} &= 0, \\ a_{0,-1} &= 1, & a_{0,0} &= 0, & a_{0,+1} &= 1, \\ a_{+1,-1} &= 0, & a_{+1,0} &= 1, & a_{+1,+1} &= 1. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} P_{-1,-1} &= \frac{z_2}{z_2 + \theta}, & P_{-1,0} &= \frac{\theta}{z_2 + \theta}, & P_{-1,+1} &= 0, \\ P_{0,-1} &= \frac{z_2}{z_1 + z_2}, & P_{0,0} &= 0, & P_{0,+1} &= \frac{z_1}{z_1 + z_2}, \\ P_{+1,-1} &= 0, & P_{+1,0} &= \frac{\theta}{z_1 + \theta}, & P_{+1,+1} &= \frac{z_1}{z_1 + \theta}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{z_2}{z_2 + \theta} & \frac{\theta}{z_2 + \theta} & 0 \\ \frac{z_2}{z_1 + z_2} & 0 & \frac{z_1}{z_1 + z_2} \\ 0 & \frac{\theta}{z_1 + \theta} & \frac{z_1}{z_1 + \theta} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Ясно, что одно из собственных значений этой матрицы  $s_3 = 1$ . Найдем  $s_1$  и  $s_2$ :

$$\begin{aligned} \det(P - sE) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (s - 1)((z_1 + z_2)(\theta + z_1)(\theta + z_2)s^2 + (z_1 + z_2)(\theta^2 - z_1z_2)s - 2\theta z_1z_2) &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Сначала проверим условие некрайности мер  $\mu_1, \mu_2$ , соответствующих решениям  $(z_1, z_2), (z_2, z_1)$  соответственно. Для этого, разделив левую часть последнего уравнения на  $s - 1$  и заметив, что  $z_1z_2 = \theta^2$ , получим квадратное уравнение

$$(z_1 + z_2)(\theta + z_1)(\theta + z_2)s^2 - 2\theta^3 = 0.$$

Решения этого квадратного уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{2\sqrt{2}\theta^3}{\sqrt{(1 + \sqrt{1 + 8\theta^3})(1 + \sqrt{1 + 8\theta^3 + 4\theta^3})}}, \\ s_2 &= \frac{2\sqrt{2}\theta^3}{\sqrt{(1 + \sqrt{1 + 8\theta^3})(1 + \sqrt{1 + 8\theta^3 + 4\theta^3})}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $|s_1| = |s_2| < s_3 = 1$ . Теперь проверим условие некрайности мер  $ks_2^2 > 1$ . Из этого неравенства следует, что

$$s_2 = \frac{2\sqrt{2}\theta^3}{\sqrt{(1 + \sqrt{1 + 8\theta^3})(1 + \sqrt{1 + 8\theta^3 + 4\theta^3})}} > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Решение этого неравенства имеет вид  $\theta > \sqrt[3]{\frac{2 + \sqrt{5}}{2}} \approx 1,28$ . Действительно,

$$2 \left( \frac{2\sqrt{2}\theta^3}{\sqrt{(1 + \sqrt{1 + 8\theta^3})(1 + \sqrt{1 + 8\theta^3 + 4\theta^3})}} \right)^2 - 1 > 0.$$

Введем обозначение  $\sqrt{1 + 8\theta^3} = t$ , т. е.  $\theta^3 = \frac{t^2 - 1}{8}$ . Тогда

$$2 \frac{8\theta^6}{(1 + t)(1 + t + 4\theta^3)} > 1 \Rightarrow$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow (t+1)^2(2(t+1) - (t-1)^2) < 0 &\Rightarrow t > 2 + \sqrt{5} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{1+8\theta^3} > 2 + \sqrt{5} &\Rightarrow \theta > \sqrt[3]{\frac{2+\sqrt{5}}{2}}. \end{aligned}$$

Но решения  $(z_1, z_2), (z_2, z_1)$  существуют только при  $0 < \theta < 1$ . Значит, меры, соответствующие этим решениям, заведомо являются крайними. Это мы проверим в дальнейших исследованиях.

Далее, при  $k = 2$  проверим условие некрайности единственной меры  $\mu_0$ , соответствующей единственному решению уравнения (10). В этом случае уравнение (20) после деления его на  $s - 1$  превратится в квадратное уравнение

$$2z(\theta + z)^2 s^2 + 2z(\theta^2 - z^2)s - 2\theta z^2 = 0,$$

которое имеет два решения

$$s_1 = \frac{z}{z + \theta}, \quad s_2 = -\frac{\theta}{z + \theta},$$

где  $z$  — решение уравнения (17). Найдем  $\max\{|s_1|, |s_2|\}$ :

$$|s_1| - |s_2| = \frac{z}{z + \theta} - \frac{\theta}{z + \theta} = \frac{z - \theta}{z + \theta}.$$

Если  $0 < \theta < 1$ , то  $z > \theta$ . Тогда

$$\max\{|s_1|, |s_2|\} = |s_1|.$$

Если же  $\theta > 1$ , то  $z < \theta$ . Тогда  $\max\{|s_1|, |s_2|\} = |s_2|$ , т. е.

$$\max\{|s_1|, |s_2|\} = \begin{cases} |s_1|, & \text{если } 0 < \theta < 1, \\ |s_2|, & \text{если } \theta > 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что  $s_1 < |s_2| < s_3 = 1$  при  $\theta > \theta_{cr} = 1$ .

Пусть  $\theta > \theta_{cr} = 1$ . В этом случае проверим условие Кестена–Стигума некрайности меры  $\mu_0$ :  $2s_2^2 > 1$ . С помощью формулы Кардано решим уравнение (10). Оно имеет одно вещественное решение

$$\begin{aligned} z = \frac{1}{12} \frac{\sqrt[3]{36\theta^3 + 216\theta^6 + 1 + 24\sqrt{3}\sqrt{\frac{1+27\theta^3}{\theta}}\theta^5}}{\theta^2} + \\ + \frac{1}{12} \frac{24\theta^3 + 1}{\theta^2 \sqrt[3]{36\theta^3 + 216\theta^6 + 1 + 24\sqrt{3}\sqrt{\frac{1+27\theta^3}{\theta}}\theta^5}} + \frac{1}{12\theta^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Чтобы определить интервал некрайности этой меры, проверим условие

$$2s_2^2 - 1 = 2 \cdot \left(\frac{\theta}{z + \theta}\right)^2 - 1 > 0,$$

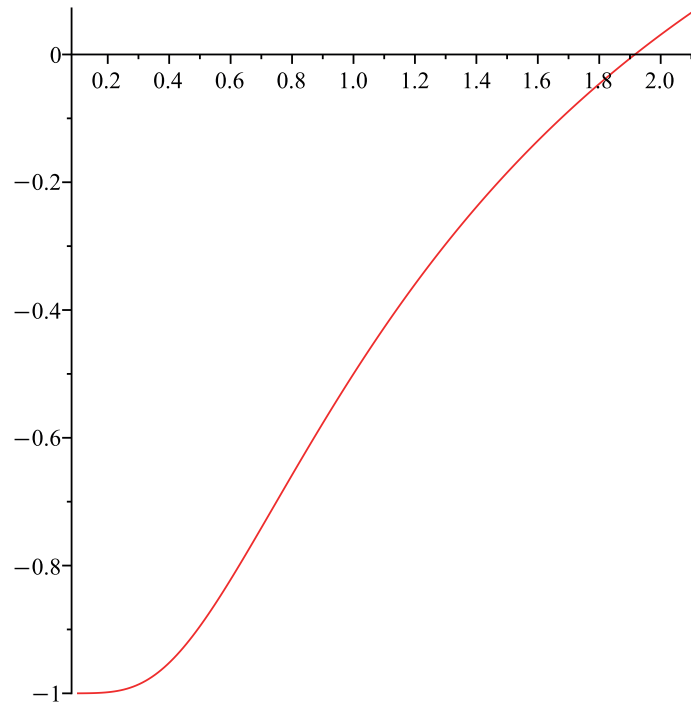


Рис. 2. График функции  $2s_2^2 - 1$ .

где  $z$  имеет вид (21). С помощью программы Maple можно увидеть, что последнее неравенство выполняется при  $\theta \in \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{28 + 20\sqrt{2}}; +\infty\right)$ , где  $\frac{1}{2}\sqrt[3]{28 + 20\sqrt{2}} \approx 1,915$ , т. е. при этом условии мера  $\mu_0$  является некрайней (см. рис. 2).

Пусть теперь  $0 < \theta < \theta_{cr} = 1$ . В этом случае  $|s_2| < s_1 < s_3 = 1$ . Тогда условие Кестена – Стигума некрайности меры  $\mu_0$  имеет вид  $2s_1^2 > 1$ .

Чтобы определить интервал некрайности меры  $\mu_0$  в случае  $0 < \theta < \theta_{cr} = 1$ , проверим условие

$$2s_1^2 - 1 = 2\left(\frac{z}{z + \theta}\right)^2 - 1 > 0,$$

где  $z$  имеет вид (21). С помощью программы Maple можно увидеть, что последнее неравенство выполняется при  $\theta \in \left(0; \frac{1}{2}\sqrt[3]{4\sqrt{2} - 4}\right)$ , где  $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4\sqrt{2} - 4} \approx 0,5916498694$ , т. е. при этом условии мера  $\mu_0$  является некрайней (см. рис. 3).

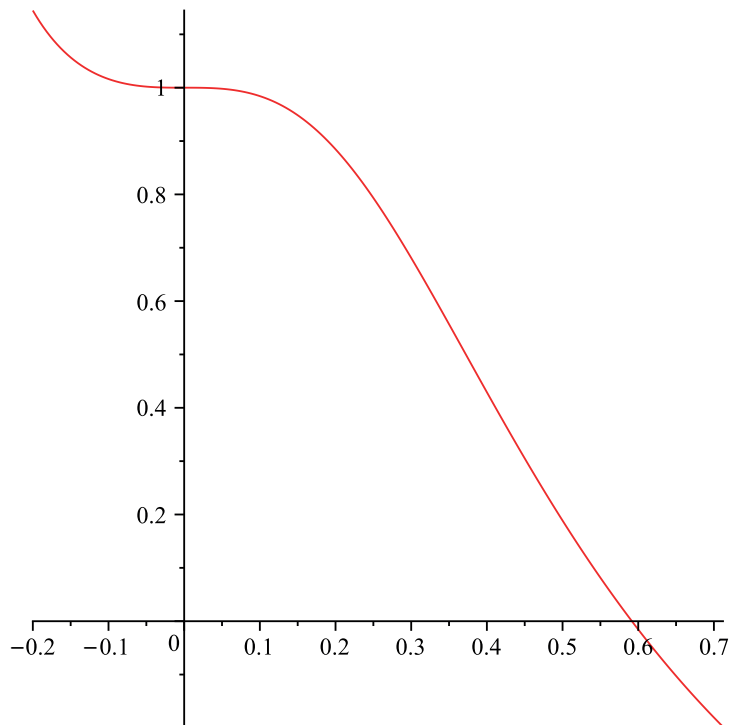
Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть  $k = 2$ . Тогда для модели Блюма – Капля мера  $\mu_0$  при

$$\theta \in \left(0; \frac{1}{2}\sqrt[3]{4\sqrt{2} - 4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{28 + 20\sqrt{2}}; +\infty\right)$$

не является крайней.

**6. Условия крайности мер  $\mu_0, \mu_1, \mu_2$ .** Для исследования крайности применимы методы из работы [17]. Приведем необходимые определения из работы [17]. Если удалить произвольное

Рис. 3. График функции  $2s_1^2 - 1$ .

ребро  $\langle x^0, x^1 \rangle = l \in L$  из дерева Кэли  $\Gamma^k$ , то оно разобьется на две компоненты:  $\Gamma_{x^0}^k$  и  $\Gamma_{x^1}^k$ , каждая из которых называется полубесконечным деревом или полудеревом Кэли.

Рассмотрим конечное полное поддереву  $\mathfrak{S}$ , которое содержит все начальные точки полудерева  $\Gamma_{x^0}^k$ . Граница  $\partial\mathfrak{S}$  поддерева  $\mathfrak{S}$  состоит из ближайших соседей его вершин, которые лежат в  $\Gamma_{x^0}^k \setminus \mathfrak{S}$ . Мы отождествляем поддерево  $\mathfrak{S}$  с множеством его вершин. Через  $E(A)$  обозначим множество всех ребер  $A$  и  $\partial A$ .

В работе [17] введены две ключевые величины:  $\kappa$  и  $\gamma$ , которые играют важную роль при исследовании крайности трансляционно-инвариантных гиббсовских мер. Эти величины являются свойствами множества мер Гиббса  $\{\mu_{\mathfrak{S}}^{\tau}\}$ , где граничное условие  $\tau$  фиксировано и  $\mathfrak{S}$  является произвольным, начальным, полным и конечным поддеревом  $\Gamma_{x^0}^k$ . Для данного начального поддерева  $\Gamma_{x^0}^k$  и вершины  $x \in \mathfrak{S}$  будем писать  $\mathfrak{S}_x$  для (максимального) поддерева  $\mathfrak{S}$  с начальной точкой в  $x$ . Если же  $x$  не является начальной точкой  $\mathfrak{S}$ , через  $\{\mu_{\mathfrak{S}}^s\}$  обозначим меру Гиббса, в которой „предок”  $x$  имеет спин  $s$  и конфигурация на нижней границе  $\mathfrak{S}_x$  (т. е. на  $\partial\mathfrak{S} \setminus \{„предок” x\}$ ) задается через  $\Gamma$ .

Для двух мер на  $\Omega$  через  $\mu_1$  и  $\mu_2$  обозначим расстояние по норме

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_x = \frac{1}{2} \sum_{i \in \{-1, 0, +1\}} |\mu_1(\sigma(x) = i) - \mu_2(\sigma(x) = i)|.$$

Пусть  $\eta^{x,s}$  — конфигурация  $\eta$  со спином в  $x$ , установленная в  $s$ . Следуя [17], определяем

$$\kappa \equiv \kappa(\mu) = \sup_{x \in \Gamma^k} \max_{s, s'} \|\mu_{\mathfrak{S}_x}^s - \mu_{\mathfrak{S}_x}^{s'}\|_x,$$

$$\gamma \equiv \gamma(\mu) = \sup_{A \in \Gamma^k} \max \left\| \mu_A^{\eta^{y,s}} - \mu_A^{\eta^{y,s'}} \right\|_x,$$

где максимум берется по всем граничным условиям  $\eta$  всеми  $y \in \partial A$ , всеми соседями  $x \in A$  вершины  $y$  и всеми спинами  $s, s' \in \{-1, 0, +1\}$ .

Сначала найдем условие крайности меры  $\mu_0$ . Ясно, что  $z > \theta$  при  $0 < \theta < 1$  и  $z < \theta$  при  $\theta > 1$  (см. рис. 1).

Заметим, что формула для  $\kappa$  имеет простой вид

$$\kappa = \frac{1}{2} \max \sum_{l \in \{-1, 0, +1\}} |P_{il} - P_{jl}|.$$

Отсюда ясно, что  $|P_{il} - P_{jl}| = 0$  при  $i = j$ . Используя [17], при  $i \neq j$  вычисляем

$$\sum_{l \in \{-1, 0, +1\}} |P_{il} - P_{jl}| = \begin{cases} \frac{2z}{z + \theta}, & 0 < \theta < 1, \quad i = -1, \quad j = 0, \quad \text{или} \quad i = 0, \quad j = -1, \\ & \text{или} \quad i = 0, \quad j = +1, \quad \text{или} \quad i = +1, \quad j = 0, \\ 1, & \theta > 1, \quad i = -1, \quad j = 0, \quad \text{или} \quad i = 0, \quad j = -1, \\ & \text{или} \quad i = 0, \quad j = +1, \quad \text{или} \quad i = +1, \quad j = 0, \\ \frac{2\theta}{z + \theta}, & \theta > 0, \quad i = -1, \quad j = +1, \quad \text{или} \quad i = +1, \quad j = -1. \end{cases}$$

Значит, для решений  $(z^*, z^*)$  при  $0 < \theta < 1$  имеем

$$\kappa = \frac{z}{z + \theta},$$

а при  $\theta \geq 1$

$$\kappa = \frac{\theta}{z + \theta}.$$

Теперь оценку для  $\gamma$ , как и в работе [17, с. 15], будем искать в виде

$$\gamma = \max \left\{ \left\| \mu_A^{\eta^{y,-1}} - \mu_A^{\eta^{y,0}} \right\|_x, \left\| \mu_A^{\eta^{y,-1}} - \mu_A^{\eta^{y,+1}} \right\|_x, \left\| \mu_A^{\eta^{y,0}} - \mu_A^{\eta^{y,+1}} \right\|_x \right\},$$

где

$$\begin{aligned} & \left\| \mu_A^{\eta^{y,1}} - \mu_A^{\eta^{y,0}} \right\|_x = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{s \in \{-1, 0, +1\}} \left| \mu_A^{\eta^{y,1}}(\sigma(x) = s) - \mu_A^{\eta^{y,0}}(\sigma(x) = s) \right| = \\ & = \frac{1}{2} \left( |P_{+1,-1} - P_{0,-1}| + |P_{+1,0} - P_{0,0}| + |P_{+1,+1} - P_{0,+1}| \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{z + 3\theta + |z - \theta|}{2(z + \theta)} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < \theta < 1, \\ \frac{\theta}{z + \theta}, & \theta \geq 1, \end{cases}$$

$$\left\| \mu_A^{\eta^{y,+1}} - \mu_A^{\eta^{y,-1}} \right\|_x = \frac{1}{2} \sum_{l \in \{-1,0,+1\}} |P_{+1,l} - P_{-1,l}| = \frac{1}{2} \frac{2z}{z + \theta} = \frac{z}{z + \theta}, \quad \theta > 0,$$

$$\left\| \mu_A^{\eta^{y,0}} - \mu_A^{\eta^{y,+1}} \right\|_x = \frac{1}{2} \sum_{l \in \{-1,0,+1\}} |P_{0,l} - P_{+1,l}| =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{|z - \theta| + 3\theta + z}{2(z + \theta)} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < \theta < 1, \\ \frac{\theta}{z + \theta}, & \theta \geq 1, \end{cases}$$

$$\left\| \mu_A^{\eta^{y,0}} - \mu_A^{\eta^{y,-1}} \right\|_x = \frac{1}{2} \sum_{l \in \{-1,0,+1\}} |P_{0,l} - P_{-1,l}| =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{|z - \theta| + 3\theta + z}{2(z + \theta)} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < \theta < 1, \\ \frac{\theta}{z + \theta}, & \theta \geq 1. \end{cases}$$

Следовательно, при  $0 < \theta < 1$

$$\gamma = \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{z}{z + \theta} \right\} = \frac{z}{z + \theta},$$

а при  $\theta > 1$

$$\gamma = \max \left\{ \frac{\theta}{z + \theta}, \frac{z}{z + \theta} \right\} = \frac{\theta}{z + \theta}.$$

Теперь для меры  $\mu_0$  проверим условие крайности  $2\kappa\gamma < 1$ . При  $0 < \theta < 1$  это условие имеет вид

$$2\kappa\gamma - 1 = 2 \cdot \left( \frac{z}{z + \theta} \right)^2 - 1 < 0,$$

а при  $\theta \geq 1$

$$2\kappa\gamma - 1 = 2 \cdot \left( \frac{\theta}{z + \theta} \right)^2 - 1 < 0.$$

С помощью компьютерного анализа убеждаемся, что последние неравенства выполняются при

$$\frac{1}{2} \sqrt[3]{4\sqrt{2} - 4} < \theta < \frac{1}{2} \sqrt[3]{28 + 20\sqrt{2}}$$

(см. рис. 4).

Итак, справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.** Пусть  $k = 2$ . Тогда для модели Блума–Капеля мера  $\mu_0$  при  $\frac{1}{2} \sqrt[3]{4\sqrt{2} - 4} < \theta < \frac{1}{2} \sqrt[3]{28 + 20\sqrt{2}}$  является крайней.

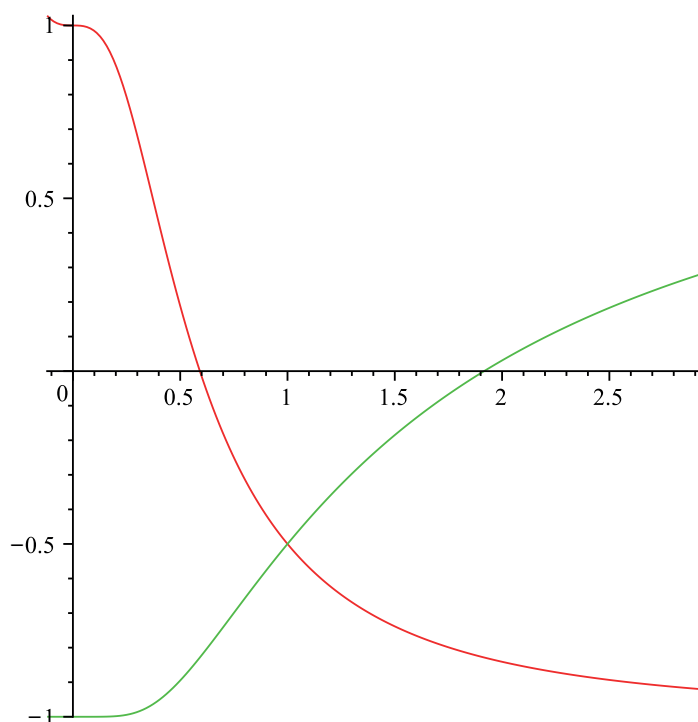


Рис. 4. График функции  $2\kappa\gamma - 1$ .

Теперь найдем условие крайности мер  $\mu_1, \mu_2$ . Заметим, что при  $0 < \theta < 1$  выполняется  $z_2(\theta) < \theta < z_1(\theta)$  (см. рис. 5).

Тогда

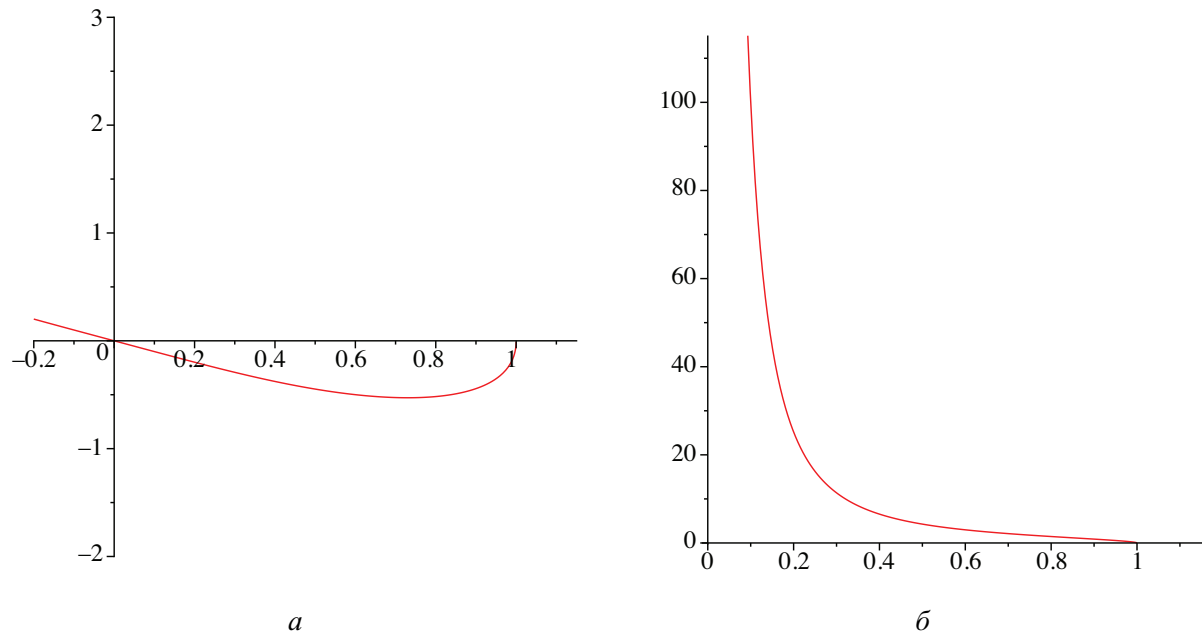
$$\sum_{l \in \{-1, 0, +1\}} |P_{il} - P_{jl}| = \begin{cases} 2 \frac{z_1}{z_1 + z_2}, & i = -1, j = 0, \text{ или } i = 0, j = -1, \\ & \text{или } i = 0, j = +1, \text{ или } i = +1, j = 0, \\ 2 \frac{\theta}{z_2 + \theta}, & i = -1, j = +1, \text{ или } i = +1, j = -1. \end{cases}$$

Значит, для решений  $z_1, z_2$  при  $0 < \theta < 1$  имеем

$$\kappa = \frac{z_1}{z_1 + z_2}.$$

Теперь найдем оценку для  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \left\| \mu_A^{\eta^{y,1}} - \mu_A^{\eta^{y,0}} \right\|_x &= \frac{1}{2} \sum_{s \in \{-1, 0, +1\}} \left| \mu_A^{\eta^{y,1}}(\sigma(x) = s) - \mu_A^{\eta^{y,0}}(\sigma(x) = s) \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left( |P_{+1,-1} - P_{0,-1}| + |P_{+1,0} - P_{0,0}| + |P_{+1,+1} - P_{0,+1}| \right) = \end{aligned}$$

Рис. 5. Графики функций  $z_2(\theta) - \theta$  (а) и  $z_1(\theta) - \theta$  (б).

$$= \frac{1}{2} \frac{z_2(\theta + z_1) + \theta(z_1 + z_2) + z_1|\theta - z_2|}{(z_1 + z_2)(\theta + z_1)} = (\theta > z_2) = \frac{\theta}{\theta + z_1},$$

$$\left\| \mu_A^{\eta^{y,1}} - \mu_A^{\eta^{y,-1}} \right\|_x = \frac{1}{2} (|P_{+1,-1} - P_{-1,-1}| + |P_{+1,0} - P_{-1,0}| + |P_{+1,+1} - P_{-1,+1}|) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{z_2(\theta + z_1) + z_1(\theta + z_2) + \theta|z_2 - z_1|}{(\theta + z_1)(\theta + z_2)} = (z_1 > z_2) = \frac{z_1}{\theta + z_1},$$

$$\left\| \mu_A^{\eta^{y,0}} - \mu_A^{\eta^{y,-1}} \right\|_x = \frac{1}{2} (|P_{0,-1} - P_{-1,-1}| + |P_{0,0} - P_{-1,0}| + |P_{0,+1} - P_{-1,+1}|) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{z_1(\theta + z_2) + \theta(z_1 + z_2) + z_2|z_1 - \theta|}{(z_1 + z_2)(\theta + z_2)} = (\theta < z_1) = \frac{z_1}{z_1 + z_2},$$

т. е.

$$\left\| \mu_A^{\eta^{y,1}} - \mu_A^{\eta^{y,0}} \right\|_x = \frac{\theta}{\theta + z_1},$$

$$\left\| \mu_A^{\eta^{y,1}} - \mu_A^{\eta^{y,-1}} \right\|_x = \frac{z_1}{\theta + z_1},$$

$$\left\| \mu_A^{\eta^{y,0}} - \mu_A^{\eta^{y,-1}} \right\|_x = \frac{z_1}{z_1 + z_2}.$$

Тогда

$$\gamma = \max \left\{ \frac{\theta}{\theta + z_1}, \frac{z_1}{\theta + z_1}, \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right\} = \frac{z_1}{z_1 + z_2}.$$

Действительно,

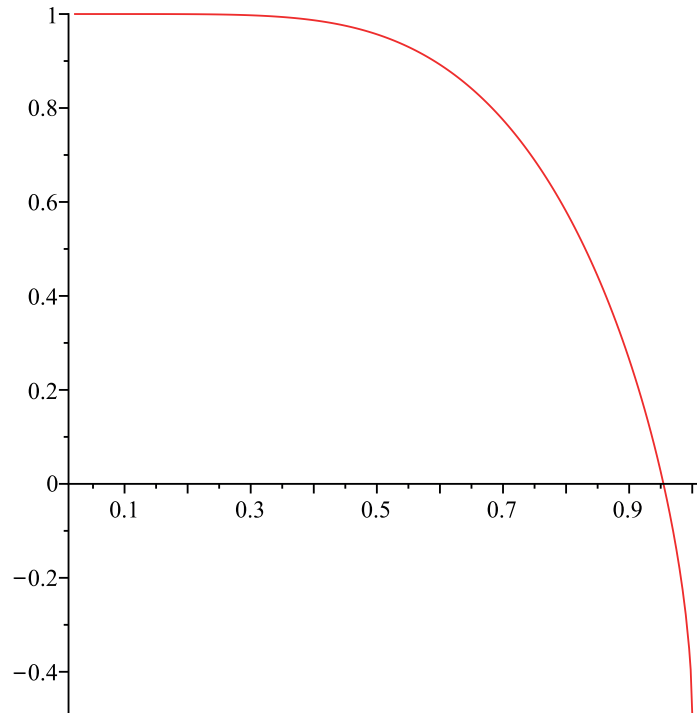


Рис. 6. График функции  $2\kappa\gamma - 1$ .

$$\frac{\theta}{\theta + z_1} - \frac{z_1}{z_1 + z_2} = \frac{\theta z_2 - z_1^2}{(\theta + z_1)(z_1 + z_2)} < 0,$$

$$\frac{z_1}{\theta + z_1} - \frac{z_1}{z_1 + z_2} = \frac{z_1(z_2 - \theta)}{(\theta + z_1)(z_1 + z_2)} < 0.$$

Теперь проверим условие  $2\kappa\gamma < 1$  для  $\mu_1, \mu_2$ :

$$2\kappa\gamma - 1 = 2 \cdot \left( \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right)^2 - 1 < 0.$$

Последнее неравенство выполняется при

$$\sqrt[3]{\sqrt{2} - 1 + \frac{\sqrt{2\sqrt{2} - 2}}{2}} < \theta < 1,$$

где  $\sqrt[3]{\sqrt{2} - 1 + \frac{\sqrt{2\sqrt{2} - 2}}{2}} \approx 0,95$  (см. рис. 6).

Итак, справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.** Пусть  $k = 2$ . Тогда для модели Блюма – Капля меры  $\mu_1, \mu_2$  при

$$\sqrt[3]{\sqrt{2} - 1 + \frac{\sqrt{2\sqrt{2} - 2}}{2}} < \theta < 1$$

являются крайними.



**Замечание.** Для мер  $\mu_1, \mu_2$  при  $0 < \theta < \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1 + \frac{\sqrt{2\sqrt{2} - 2}}{2}}$  задача (не)крайности пока остается открытой.

Автор благодарит профессора У. А. Розикова за полезные советы, которые способствовали улучшению статьи.

### Литература

1. Х.-О. Георги, *Гиббсовские меры и фазовые переходы*, Мир, Москва (1992).
2. С. J. Preston, *Gibbs states on countable sets*, Cambridge Tracts Math., **68**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1974).
3. Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов. Строгие результаты*, Наука, Москва (1980).
4. Н. М. Хатамов, *Новые классы основных состояний для модели Поттса с рассеянными конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли*, Теор. и мат. физика, **180**, № 1, 827–834 (2014).
5. С. Külske, U. A. Rozikov, R. M. Khakimov, *Description of all translation-invariant (splitting) Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree*, J. Stat. Phys., **156**, № 1, 189–200 (2014).
6. Н. М. Хатамов, *Неединственность меры Гиббса для шаровой модели Изинга с радиусом взаимодействия два*, Теор. и мат. физика, **180**, № 3, 318–328 (2014).
7. С. Külske, U. A. Rozikov, *Fuzzy transformations and extremality of Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree*, Random Structures and Algorithms (2016), DOI: 10.1002/rsa.20671.
8. U. A. Rozikov, R. M. Khakimov, *Gibbs measures for the fertile three-state hard core models on a Cayley tree*, Queueing Syst., **81**, № 1, 49–69 (2015).
9. Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, *Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых решеточных моделей на дереве Кэли*, Теор. и мат. физика, **111**, № 1, 109–117 (1997).
10. U. A. Rozikov, *Gibbs measures on Cayley trees*, World Sci. (2013).
11. E. N. Cirillo, E. Olivieri, *Metastability and nucleation for the Blume–Capel model. Different mechanisms of transition*, J. Stat. Phys., **83** 473–554 (1996).
12. P. E. Theodorakis, N. J. Fytas, *Monte Carlo study of the triangular Blume–Capel model under bond randomness*, Phys. Rev., **86**, 011140 (2012).
13. O. Hryniv, R. Kotecky, *Surface tension and the Orustein–Zernike behavior for the 2D Blume–Capel model*, J. Stat. Phys., **106**, № 314 (2002).
14. Н. М. Хатамов, Г. Т. Мадгозиев, *Меры Гиббса для обобщенной модели Поттса с радиусом взаимодействия два*, Теор. и мат. физика, **183**, № 3, 450–459 (2015).
15. M. Formentin, C. Külske, *A symmetric entropy bound on the non-reconstruction regime of Markov chains on Galton–Watson trees*, Electron. Commun. Probab., **14**, 587–596 (2009).
16. H. Kesten, B. P. Stigum, *Additional limit theorem for indecomposable multidimensional Galton–Watson processes*, Ann. Math. Statist., **37**, 1463–1481 (1966).
17. F. Martinelli, A. Sinclair, D. Weitz, *Fast mixing for independent sets, coloring and other models on trees*, Random Structures and Algorithms, **31**, 134–172 (2007).
18. У. А. Розиков, Р. М. Хакимов, *Крайность трансляционно-инвариантной меры Гиббса для НС-модели на дереве Кэли*, arXiv: 1610.04755v1, [math-ph].
19. У. А. Розиков, Р. М. Хакимов, Х. Ф. Хайдаров, *Крайность трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли*, Теор. и мат. физика, **196**, № 1, 117–134 (2018).
20. N. Khatamov, R. Khakimov, *Translation-invariant Gibbs measures for the Blume–Capel model on a Cayley tree*, Журн. мат. фізики, аналізу, геометрії, **15**, № 2, 239–255 (2019).

Получено 30.12.19