DOI: 10.37863/umzh.v72i5.2284

УДК 511.72+511.75+519.21

М. П. Мороз (Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, Київ)

ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ, ПОВ'ЯЗАНОЇ ІЗ ЗОБРАЖЕННЯМ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ РЯДАМИ ЕНГЕЛЯ

It is known that any $x \in (0;1] \equiv \Omega$ has a unique Engel expansion

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p_1(x)+1)\ldots(p_n(x)+1)},$$

where $p_n(x) \in \mathbb{N}$, $p_{n+1}(x) \geq p_n(x)$ for all $n \in \mathbb{N}$. This means that $p_n(x)$ is a well-defined measurable function on the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$, where $\mathcal{F}$ is the σ-algebra of Lebesgue-measurable subsets of Ω and λ is the Lebesgue measure.

The main subject of our research is the function

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n(x)+1},$$

defined on $\Omega^* \subset \Omega$, where Ω^* is the convergence set of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{p_n(x)+1}$. We prove that the function ψ is defined a.e. on $(0;1]$ and ψ is a random variable on the probability space $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \lambda)$, where $\mathcal{F}^*$ is the σ-algebra of Lebesgue-measurable subsets of Ω^*, and obtain the mathematical expectation and variance of the function ψ. Also, we consider the variables ψ_k as a generalization of the function ψ and calculate the mathematical expectations $M\psi_k$ of these random variables.

Відомо, що будь-яке число $x \in (0;1] \equiv \Omega$ єдиним чином розкладається в ряд Енгеля

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p_1(x)+1)\ldots(p_n(x)+1)},$$

де $p_n(x) \in \mathbb{N}$, $p_{n+1}(x) \geq p_n(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Цей розклад коректно визначає $p_n(x)$ як вимірну функцію (випадкову величину) на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$, де $\mathcal{F}$ — σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин множини Ω, λ — міра Лебега.

На множині $\Omega^* \subset \Omega$ збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{p_n(x)+1}$ визначається функція

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n(x)+1},$$

яка є основним об'єктом дослідження в даній роботі. Доведено, що функція ψ визначена (набуває скінченних значень) майже скрізь на $(0;1]$ та є випадковою величиною на ймовірнісному просторі $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \lambda)$, де $\mathcal{F}^*$ — σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин множини Ω^*, обчислено її математичне сподівання та дисперсію. Розглянуто випадкові величини ψ_k як узагальнення функції ψ та обчислено їхні математичні сподівання $M\psi_k$.

1. Вступ. Існує багато різних моделей загальної аксіоматичної теорії дійсних чисел. В одній із них моделлю числа є ряд, у другій – ланцюговий дріб, у третій – нескінченний добуток тощо. Окрему групу моделей утворюють зображення чисел рядами, елементами яких є єгипетські дроби (чисельник яких дорівнює 1, а знаменник — довільному натуральному числу). До таких відносяться зображення чисел рядами Люрота [1, 3], Остроградського – Серпінського – Пірса [4], Сільвестера [6], Енгеля [7] та інші. Серед них більш зручними для розвитку метричної та ймовірнісної теорії дійсних чисел є додатні ряди, до яких відносяться ряди Енгеля.

Означення 1. *Рядом Енгеля називається додатний ряд вигляду*

$$\frac{1}{p_1+1}+\frac{1}{(p_1+1)(p_2+1)}+\ldots+\frac{1}{(p_1+1)\ldots(p_n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p_1+1)\ldots(p_n+1)},$$

де $p_n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} \geq p_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1 [7]. *Сума кожного ряду Енгеля є дійсним числом з* $(0;1]$. *Будь-яке число* x *з* $(0;1]$ *можна єдиним чином зобразити у вигляді ряду Енгеля, тобто існує єдина неспадна послідовність натуральних чисел* $(p_n(x))$ *така, що*

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p_1(x)+1)\ldots(p_n(x)+1)} \equiv \Delta^E_{p_1(x)\ldots p_n(x)\ldots}.$$

Скорочений (символічний) запис $\Delta^E_{p_1(x)\ldots p_n(x)\ldots}$ називається Δ^E-зображенням числа x, при цьому натуральне число $p_n(x)$ називається n-ю цифрою Δ^E-зображення числа x. Кожна Δ^E-цифра є коректно означеною функцією числа, що зображується у вигляді ряду Енгеля, внаслідок єдиності такого зображення.

Означення 2. *Циліндром* $\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}$ *рангу* m *з основою* $c_1c_2\ldots c_m$, *що породжений зображенням чисел рядами Енгеля, називається множина всіх чисел вигляду* $\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots}$.

Відомо [7], що різні Δ^E-циліндри або не перетинаються, або один із них є власною підмножиною іншого. При цьому $\Delta^E_{a_1a_2\ldots a_m} \subset \Delta^E_{b_1b_2\ldots b_n}$ тоді і тільки тоді, коли $n<m$ та $a_i=b_i$, $i=\overline{1,n}$. Кожен циліндр $\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}$ є піввідрізком, довжина (міра Лебега) якого обчислюється за формулою

$$\lambda\left(\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}\right)=\frac{1}{(c_1+1)\ldots(c_m+1)\,c_m}.$$

У роботі [2] розглянуто послідовності $(q_n(x))_{n=1}^{\infty}$ елементів розкладу чисел з відрізка $[0;1]$ в ряди Остроградського – Серпінського – Пірса. Для цих послідовностей доведено властивості, що з різних боків характеризують швидкість зростання їхніх елементів. Зокрема, встановлено, що для майже всіх $x\in[0;1]$ має місце рівність $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{q_n(x)}=e$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{q_n(x)}$ збігається майже скрізь на $[0;1]$ (у розумінні міри Лебега), а математичне сподівання суми цього ряду дорівнює 1.

Ми будемо розглядати функцію $\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n(x)+1}$, що визначена на множині Ω^* збіжності функціонального ряду, яким вона задана. Ця функція є аналогом ряду, який розглядав Дж. Шалліт [2]. Тому варто очікувати, що деякі їхні властивості будуть схожими. З цих причин будемо розв'язувати задачу (аналогічну до задачі Дж. Шалліта щодо рядів Остроградського – Серпінського – Пірса) про обчислення математичного сподівання випадкової величини $\psi(x)$, що визначена на ймовірнісному просторі $(\Omega^*,\mathcal{F}^*,\lambda)$, де λ — міра Лебега, $\mathcal{F}^*$ — σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин множини Ω^*.

Взагалі кажучи, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n(x)+1}$ залежно від числа x може бути як збіжним, так і розбіжним. У даній статті ми встановлюємо, що цей ряд збігається майже скрізь на $(0;1]$ (у розумінні міри Лебега), та обчислюємо математичне сподівання випадкової величини $\psi(x)$. Крім цього, ми розв'язуємо нову задачу — обчислюємо дисперсію випадкової величини $\psi(x)$.

2. Функція ψ як випадкова величина. Розглядається ймовірнісний простір $(\Omega,\mathcal{F},\lambda)$, де $\Omega=(0,1]$, λ — міра Лебега, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин множини Ω.

Нехай n — фіксоване натуральне число. Розглядається функція $p_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Теорема 2. *Функція* $\dfrac{1}{p_n+1}$ *є дискретною випадковою величиною на* $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$.

Доведення. Враховуючи припущення, що передують теоремі, залишилось показати, що функція $\dfrac{1}{p_n(x)+1}$ є вимірною, тобто множина $\left\{x\colon \dfrac{1}{p_n(x)+1} \le a\right\} \in \mathcal{F}$ для будь-якого $a \in \mathbb{R}$. Зрозуміло, що $\dfrac{1}{p_n(x)+1}$ може набувати тільки зліченну множину значень, причому $0 < \dfrac{1}{p_n(x)+1} \le \dfrac{1}{2}$. Якщо $a \le 0$, то $\left\{x\colon \dfrac{1}{p_n(x)+1} \le a\right\} = \varnothing \in \mathcal{F}$. Якщо $a \ge \dfrac{1}{2}$, то $\left\{x\colon \dfrac{1}{p_n(x)+1} \le a\right\} = \Omega \in \mathcal{F}$.

Нехай $0 < a < \dfrac{1}{2}$. Тоді функція $\dfrac{1}{p_n(x)+1}$ набуває зліченну множину значень, що не перевищують a, а саме значень із множини $\left\{\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k+1}, \ldots\right\}$, де $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ та $\dfrac{1}{k} \le a < \dfrac{1}{k-1}$. Тоді

$$\left\{x\colon \frac{1}{p_n(x)+1} \le a\right\} = \bigcup_{r=0}^{\infty} \left\{x\colon \frac{1}{p_n(x)+1} = \frac{1}{k+r}\right\} = \bigcup_{r=0}^{\infty} \{x\colon p_n(x)+1 = k+r\} =$$

$$= \bigcup_{r=0}^{\infty} \left(\bigcup_{c_1 \le \ldots \le c_{n-1} \le k+r-1} \Delta^E_{c_1 \ldots c_{n-1}[k+r-1]} \right).$$

Зрозуміло, що $\bigcup_{c_1 \le \ldots \le c_{n-1} \le k+r-1} \Delta^E_{c_1 \ldots c_{n-1}[k+r-1]}$ є зліченним об'єднанням циліндрів, кожен з яких є вимірною за Лебегом множиною. Тому таке об'єднання теж є вимірною множиною. Звідси отримуємо, що й множина $\left\{x\colon \dfrac{1}{p_n(x)+1} \le a\right\}$ є вимірною за Лебегом.

Отже, $\left\{x\colon \dfrac{1}{p_n(x)+1} \le a\right\} \in \mathcal{F}\ \forall a \in \mathbb{R}$, а тому функція $\dfrac{1}{p_n(x)+1}$ є випадковою величиною для будь-якого $n \in \mathbb{N}$.

Теорему 2 доведено.

Далі нам знадобиться теорема, яка має місце для інтеграла Лебега.

Теорема 3 [5, с. 303] (Теорема Б. Леві)**.** *Нехай дано вимірний простір із мірою* $(A, \mathcal{A}, \mu)$ *та послідовність інтегровних функцій* $f_n(x)\colon A \to \mathbb{R}$ *таких, що*

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f_n(x) \le \ldots$$

і для яких існує таке число $K \in \mathbb{R}$, *що* $\displaystyle\int_A f_n(x)\, d\mu \le K\ \forall n \in \mathbb{N}$. *Тоді майже скрізь на* A *існує границя*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

причому функція $f(x)$ *інтегровна на* A *та*

$$\int_A f_n(x)\, d\mu \to \int_A f(x)\, d\mu.$$

***Наслідок* 1.** *Якщо* $g_n(x) \geq 0$ *та* $\sum_{k=1}^{\infty} \int_A g_n(x)\,d\mu < +\infty$, *то майже скрізь на* A *збігається ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} g_n(x)$ *та* $\int_A \left(\sum_{k=1}^{\infty} g_n(x)\right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A g_n(x)\,d\mu.$

Нехай $A(k,t) = \sum_{k\leq p_1\leq\ldots\leq p_n\leq k+t} \dfrac{1}{(p_1+1)\ldots(p_n+1)}$, де сума обчислюється по всіх можливих скінченних послідовностях $(p_i)_{i=1}^n$ таких, що $k \leq p_1 \leq \ldots \leq p_n \leq k+t$, k — довільне натуральне число, t — довільне невід'ємне число.

Теорема 4. $A(k,t) = \sum_{k\leq p_1\leq\ldots\leq p_n\leq k+t} \dfrac{1}{(p_1+1)\ldots(p_n+1)} = \dfrac{t+1}{k}.$

Доведення. Для доведення скористаємося методом математичної індукції.

Якщо $t=0$, то $A\,(k,0) = \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{(k+1)^2} + \ldots = \dfrac{1}{k} = \dfrac{t+1}{k}$, оскільки в цьому випадку $p_i = k \ \forall i \in \mathbb{N}$.

Якщо $t=1$, то $p_i = k$ або $p_i = k+1$. Згрупуємо дроби за степенем входження множника $p_i+1 = k+2$ в знаменники дробів. Тоді отримаємо

$$A(k,1) = \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^3} + \ldots\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)^2(k+2)} + \ldots\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{(k+2)^2} + \frac{1}{(k+1)(k+2)^2} + \frac{1}{(k+1)^2(k+2)^2} + \ldots\right) + \ldots =$$
$$= A(k,0) + \frac{1}{k+2}\,(1 + A(k,0)) + \frac{1}{(k+2)^2}\,(1 + A(k,0)) + \ldots =$$
$$= A(k,0) + (1 + A(k,0))\left(\frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+2)^2} + \ldots\right) = \frac{1}{k} + \frac{k+1}{k}\frac{1}{k+1} = \frac{2}{k} = \frac{t+1}{k}.$$

При $t=0$ та $t=1$ твердження справджується. Припустимо, що твердження справджується при $t=s$, тобто має місце рівність $A(k,s) = \dfrac{s+1}{k}$. Тоді при $t=s+1$, згрупувавши дроби за степенем входження в їхні знаменники множника $k+s+2$, як і у випадку при $t=1$, отримаємо

$$A(k,s+1) = A(k,s) + \frac{1}{k+s+2}\,(1 + A(k,s)) + \frac{1}{(k+s+2)^2}\,(1 + A(k,s)) + \ldots =$$
$$= A(k,s) + (1 + A(k,s))\left(\frac{1}{k+s+2} + \frac{1}{(k+s+2)^2} + \ldots\right) =$$
$$= \frac{s+1}{k} + \frac{k+s+1}{k}\frac{1}{k+s+1} = \frac{s+1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{s+2}{k} = \frac{t+1}{k}.$$

Отже, за принципом математичної індукції $A(k,t) = \dfrac{t+1}{k}$ для довільного цілого невід'ємного t та довільного натурального k.

Теорему 4 доведено.

Теорема 5. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n(x)+1} \tag{1}$$

збігається майже скрізь (в сенсі міри Лебега) на множині Ω.

Доведення. Розглянемо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$. Нехай на множині Ω визначено послідовність функцій

$$g_n(x)=\frac{1}{p_n(x)+1}>0.$$

Покажемо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega} g_n\,(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega}\frac{1}{p_n(x)+1}\,d\lambda$ є збіжним. Маємо

$$\int\limits_{\Omega}\frac{1}{p_1(x)+1}\,d\lambda=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\lambda(\Delta_k^E)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}\frac{1}{(k+1)k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)^2},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{p_n(x)+1}\,d\lambda=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{p_n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p_n+1}\sum_{1\le p_1\le\ldots\le p_{n-1}\le p_n}\lambda(\Delta^E_{p_1\ldots p_{n-1}p_n})\right)=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{p_n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p_n+1}\sum_{1\le p_1\le\ldots\le p_{n-1}\le p_n}\frac{1}{(p_1+1)\ldots(p_n+1)\,p_n}\right)=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{p_n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p_n(p_n+1)^2}\sum_{1\le p_1\le\ldots\le p_{n-1}\le p_n}\frac{1}{(p_1+1)\ldots(p_{n-1}+1)}\right)=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k(k+1)^2}\sum_{1\le p_1\le\ldots\le p_{n-1}\le k}\frac{1}{(p_1+1)\ldots(p_{n-1}+1)}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k(k+1)^2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{1\le p_1\le\ldots\le p_{n-1}\le k}\frac{1}{(p_1+1)\ldots(p_{n-1}+1)}\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k(k+1)^2}A\,(1,k-1)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k(k+1)^2}k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Остаточно отримуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{p_n(x)+1}\,d\lambda=\int\limits_{\Omega}\frac{1}{p_1(x)+1}\,d\lambda+\sum_{n=2}^{\infty}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{p_n(x)+1}\,d\lambda=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+k}{k(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1.$$

Отже, згідно з наслідком з теореми Б. Леві, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n(x)+1}$ збігається майже скрізь на множині Ω. При цьому

$$\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n(x)+1}\right)d\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{p_n(x)+1}\,d\lambda=1.$$

Теорему 5 доведено.

Позначимо через T підмножину множини Ω, на якій ряд (1) розбігається. Згідно з попередньою теоремою, $\lambda(T)=0$. Розглянемо множину $\Omega^*=\Omega\backslash T$, $\lambda(\Omega^*)=\lambda(\Omega)=1$. Нехай $\mathcal{F}^*$ — σ-алгебра підмножин множини Ω^*, вимірних за Лебегом. Таким чином, $(\Omega^*,\mathcal{F}^*,\lambda)$ — ймовірнісний простір.

Розглянемо функцію $\psi\colon\Omega^*\to\mathbb{R}$ таку, що

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n(x)+1}.$$

Враховуючи попередні результати, можемо стверджувати, що функція $\psi(x)$ є випадковою величиною (вимірною функцією) на $(\Omega^*,\mathcal{F}^*,\lambda)$, оскільки вона є границею послідовності вимірних функцій, що монотонно зростають в кожній точці області визначення [8, c.133].

Зауваження. Як зазначено в роботі [8, с. 126], при розгляді вимірних функцій можна допускати набуття ними нескінченних значень. Тому функцію ψ можна розглядати і на множині Ω. Оскільки множини Ω і Ω^* збігаються з точністю до множини міри нуль, то інтегральні властивості функції ψ не залежать від того, на якій з цих двох множин вона визначена.

3. Числові характеристики випадкової величини ψ.

Теорема 6. *Математичне сподівання $M\psi$ випадкової величини ψ дорівнює* 1.

Доведення. Оскільки $M\psi=\int\limits_{\Omega^*}\psi(x)\,d\lambda$, то, враховуючи проміжні результати, одержані при доведенні теореми 5, отримуємо

$$M\psi=\int\limits_{\Omega^*}\psi(x)\,d\lambda=\int\limits_{\Omega^*}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n(x)+1}\right)d\lambda=\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n(x)+1}\right)d\lambda=1.$$

Теорему 6 доведено.

Теорема 7. *Дисперсія $D\psi$ випадкової величини ψ дорівнює $\zeta(2)-1$, де $\zeta(2)$ — значення ζ-функції Рімана в точці* 2.

Доведення. Оскільки $D\psi=M\psi^2-(M\psi)^2$, то $D\psi=M\psi^2-1$. Бачимо, що обчислення дисперсії зводиться до обчислення математичного сподівання випадкової величини ψ^2:

$$(\psi(x))^2=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n(x)+1}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p_n(x)+1)^2}+2\sum_{\substack{k,m\in\mathbb{N}\\k<m}}\frac{1}{(p_k(x)+1)(p_m(x)+1)}.$$

Кожна з двох сум в останній рівності є вимірною функцією, яка набуває на Ω^* тільки скінченних значень, а тому вони є випадковими величинами. При цьому кожен доданок, що входить до цих сум, також є випадковою величиною. Тому

$$M\psi^2=\sum_{n=1}^{\infty}M\frac{1}{(p_n+1)^2}+2\sum_{\substack{k,m\in\mathbb{N}\\k<m}}M\frac{1}{(p_k+1)(p_m+1)}.$$

Знайдемо значення суми $\sum_{n=1}^{\infty}M\frac{1}{(p_n+1)^2}$:

$$M\frac{1}{(p_1+1)^2}=\sum_{p_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(p_1+1)^2}\lambda\left(\Delta^E_{p_1}\right)\right)=\sum_{p_1=1}^{\infty}\frac{1}{(p_1+1)^3p_1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^3},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}M\frac{1}{(p_n+1)^2}=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{p_n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(p_n+1)^2}\sum_{1\le p_1\le\ldots\le p_{n-1}\le p_n}\lambda(\Delta^E_{p_1\ldots p_{n-1}p_n})\right)=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{p_n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(p_n+1)^2}\sum_{1\le p_1\le\ldots\le p_{n-1}\le p_n}\frac{1}{(p_1+1)\ldots(p_{n-1}+1)(p_n+1)p_n}\right)=$$

$$=\sum_{p_n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(p_n+1)^3p_n}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{1\le p_1\le\ldots\le p_{n-1}\le p_n}\frac{1}{(p_1+1)\ldots(p_{n-1}+1)}\right)\right)=$$

$$=\sum_{p_n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p_n(p_n+1)^3}A\left(1,p_n-1\right)\right)=\sum_{p_n=1}^{\infty}\frac{p_n}{p_n(p_n+1)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3}.$$

Таким чином,

$$\sum_{n=1}^{\infty}M\frac{1}{(p_n+1)^2}=M\frac{1}{(p_1+1)^2}+\sum_{n=2}^{\infty}M\frac{1}{(p_n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=1-(\zeta(2)-1)=2-\zeta(2).$$

Тепер знайдемо значення суми $\sum_{\substack{k,m\in\mathbb{N}\\k<m}}M\dfrac{1}{(p_k+1)(p_m+1)}$:

$$\sum_{\substack{k,m\in\mathbb{N}\\k<m}}M\frac{1}{(p_k+1)(p_m+1)}=$$

$$=\sum_{\substack{k,m\in\mathbb{N}\\k<m}}\left(\sum_{1\le p_k\le p_m}\left(\frac{1}{(p_k+1)(p_m+1)}\sum_{1\le p_1\le\ldots\le p_m}\lambda\left(\Delta^E_{p_1\ldots p_k\ldots p_m}\right)\right)\right)=$$

$$=\sum_{\substack{1\le p_k\le p_m\\k<m}}\left(\frac{1}{(p_k+1)^2(p_m+1)^2p_m}\sum_{1\le p_1\le\ldots\le p_m}\frac{1}{(p_1+1)\ldots(p_{k-1}+1)(p_{k+1}+1)\ldots(p_{m-1}+1)}\right).$$

Знайдемо значення суми $\sum_{1\le p_1\le\ldots\le p_m}\dfrac{1}{(p_1+1)\ldots(p_{k-1}+1)(p_{k+1}+1)\ldots(p_{m-1}+1)}$ за всіма допустимими наборами натуральних чисел $(p_1,\ldots,p_k,\ldots,p_m)$, де p_k і p_m — фіксовані числа, порядкові номери яких можуть набувати довільних допустимих значень:

$$\sum_{1\le p_1\le\ldots\le p_m}\frac{1}{(p_1+1)\ldots(p_{k-1}+1)(p_{k+1}+1)\ldots(p_{m-1}+1)}=$$

$$= \left(1 + \sum_{1 \le p_1 \le \ldots \le p_k} \frac{1}{(p_1+1)\ldots(p_{k-1}+1)}\right)\left(1 + \sum_{p_k \le \ldots \le p_m} \frac{1}{(p_{k+1}+1)\ldots(p_{m-1}+1)}\right).$$

В сумі $1 + \sum_{1 \le p_1 \le \ldots \le p_k} \dfrac{1}{(p_1+1)\ldots(p_{k-1}+1)}$ перший доданок відповідає випадку, коли перед елементом p_k не міститься жодних інших елементів, тобто коли $k = 1$. Наступні доданки (вони знаходяться під знаком суми) відповідають випадкам, коли перед p_k міститься принаймні один елемент.

В сумі $1 + \sum_{p_k \le \ldots \le p_m} \dfrac{1}{(p_{k+1}+1)\ldots(p_{m-1}+1)}$ перший доданок відповідає випадку, коли між елементами p_k і p_m не міститься жодного елемента, тобто коли $m = k+1$. Наступні доданки (вони знаходяться під знаком суми) відповідають випадкам, коли між p_k і p_m міститься принаймні один елемент.

За теоремою 4

$$\sum_{1 \le p_1 \le \ldots \le p_m} \frac{1}{(p_1+1)\ldots(p_{k-1}+1)(p_{k+1}+1)\ldots(p_{m-1}+1)} =$$

$$= (1 + A(1, p_k - 1))\,(1 + A(p_k, p_m - p_k)) = \frac{(p_k+1)(p_m+1)}{p_k}.$$

Тоді

$$\sum_{\substack{k,m \in \mathbb{N}\\ k<m}} M \frac{1}{(p_k+1)(p_m+1)} = \sum_{\substack{1 \le p_k \le p_m\\ k<m}} \left(\frac{1}{(p_k+1)^2(p_m+1)^2 p_m} \frac{(p_k+1)(p_m+1)}{p_k}\right) =$$

$$= \sum_{1 \le p_k \le p_m} \frac{1}{p_k(p_k+1)p_m(p_m+1)} = \sum_{p_k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p_k(p_k+1)} \sum_{p_m=p_k}^{\infty} \frac{1}{(p_m+1)p_m}\right) =$$

$$= \sum_{p_k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p_k(p_k+1)} \frac{1}{p_k}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)-n}{n^2(n+1)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \zeta(2) - 1.$$

Остаточно отримуємо

$$D\psi = M\psi^2 - (E\psi)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} M \frac{1}{(p_n+1)^2} + 2 \sum_{\substack{k,m \in \mathbb{N}\\ k<m}} M \frac{1}{(p_k+1)(p_m+1)} - 1 =$$

$$= 2 - \zeta(2) + 2(\zeta(2) - 1) - 1 = \zeta(2) - 1.$$

Теорему 7 доведено.

4. Узагальнення випадкової величини ψ. Розглянемо випадкову величину $\psi_k : \Omega^* \to \mathbb{R}$ таку, що

$$\psi_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n(x) + k},$$

де k — деяке фіксоване натуральне число. Вона є узагальненням випадкової величини ψ. Зрозуміло, що для довільного $x \in \Omega^*$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{p_n(x)+k}$ збігається, оскільки збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{p_n(x)+1}$.

Знайдемо математичне сподівання $E\psi_k$.

Аналогічно до міркувань в доведеннях теорем 4–6 одержуємо

$$M\psi_k = \int\limits_{\Omega^*} \psi_k(x)\, d\lambda = \int\limits_{\Omega^*} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n(x)+k} \right) d\lambda = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n(x)+k} \right) d\lambda =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{p_n(x)+k}\, d\lambda = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{p_1(x)+k}\, d\lambda + \sum_{n=2}^{\infty} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{p_n(x)+k}\, d\lambda =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)(i+k)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)(i+k)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+k)}.$$

При $k=1$ маємо $\psi_1 = \psi$, а тому $M\psi = M\psi_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{i(i+1)} = 1$, що узгоджується з теоремою 6.

При $k \geq 2$ отримуємо

$$M\psi_k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+k)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k}{i(i+k)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(k+i)-i}{i(i+k)} =$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+k} \right) = \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} \right) = \frac{H(k)}{k},$$

де $H(k) = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{k}$ — k-те гармонічне число.

В даній статті ми не обчислюємо дисперсії цих випадковх величин через певні технічні труднощі. Проте не виключено, що цю задачу буде розв'язано згодом.

Література

1. Yu. Khvorostina, M. Pratsiovytyi, *Topological and metric properties of distributions of random variables represented by the alternating Lüroth series with independent elements*, Random Oper. Stoch. Equat., **21**, № 4, 385–401 (2013).
2. J. O. Shallit, *Metric theory of Pierce expansions*, Fibonacci Quart., **24**, № 1, 22–40 (1986).
3. Yu. Zhykharyeva, M. Pratsiovytyi, *Expansions of numbers in positive Lüroth series and their applications to metric, probabilistic and fractal theories of numbers*, Algebra and Discrete Math., **14**, № 1, 145–160 (2012).
4. О. М. Барановський, М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін, *Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їхні застосування*, Наук. думка, Київ (2013).
5. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, Москва (1976).
6. І. М. Працьовита, М. В. Задніпряний, *Розклади чисел в ряди Сільвестера та їх застосування*, Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки, № 10, 73–87 (2009).
7. М. В. Працьовитий, Б. І. Гетьман, *Ряди Енгеля та їх застосування*, Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки, № 7, 105–116 (2006).
8. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, т. 5, Наука, Москва (1959).

Одержано 31.12.19,
після доопрацювання — 14.04.20