DOI: 10.37863/umzh.v72i11.2295

УДК 517.98+515.164.17

Ю. В. Богданський (Ін-т прикл. систем. аналізу Нац. техн. ун-ту України „КПІ ім. І. Сікорського”, Київ)

ФОРМУЛА СТОКСА НА БАНАХОВИХ МНОГОВИДАХ

We suggest a divergent version of the Stokes formula for a Banach manifold with a uniform atlas.

Запропоновано дивергентний варіант формули Стокса на банаховому многовиді з рівномірним атласом.

Класична формула Стокса, записана у вигляді

$$\int\limits_S d\,\omega = \int\limits_{\partial S} \omega, \tag{1}$$

не допускає безпосереднього узагальнення на випадок нескінченновимірного многовиду S. У випадку, коли S є областю вихідного простору, формула (1) допускає інший, „дивергентний” запис („формула Гаусса – Остроградського”):

$$\int\limits_S \operatorname{div} \mathbf{X}\, d\mu = \int\limits_{\partial S} (\mathbf{X}, \mathbf{n})\, d\sigma. \tag{2}$$

В даний час існують різноманітні узагальнення формули Гаусса – Остроградського на нескінченновимірних лінійних просторах і нелінійних многовидах [1 – 5], а також у просторах конфігурацій [6, 7]. У роботі [8] отримано варіант формули Стокса (у вигляді (1)) на локально опуклому просторі зі щільно вкладеним сепарабельним гільбертовим простором для області S вихідного простору. При цьому форми скінченного костепеня ω розумілися як векторні борелівські міри спеціального вигляду, запропоновані у роботі [9].

У даній роботі запропоновано дивергентний варіант формули Стокса на поверхні скінченної корозмірності, вкладеній у банахів многовид. Отримані тут результати також мають місце у банахових просторах, на яких існують гладкі функції з непорожнім обмеженим носієм, зокрема у рефлексивних банахових просторах.

1. Попередні відомості (див. [4, 10, 11]). Нехай M — зв’язний ґаусдорфів банахів многовид класу C^2 з модельним дійсним простором E.

Атлас $\Omega = \big\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\big\}$ на M називаємо *обмеженим*, якщо існує таке число $K > 0$, що відображення склейки $F_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ для кожної пари карт атласу задовольняє умову $\big(x \in$ $\in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)\big) \Longrightarrow \Big(\big\|F'_{\beta\alpha}(x)\big\| \le K,\ \big\|F''_{\beta\alpha}(x)\big\| \le K\Big)$.

Обмежені атласи Ω_1 та Ω_2 називаємо *еквівалентними*, якщо $\Omega_1 \cup \Omega_2$ знову є обмеженим атласом. Якщо на M задано клас еквівалентних обмежених атласів, то кажемо, що на M задано *обмежену структуру* (класу C^2).

Нехай (M_1, Ω_1) і (M_2, Ω_2) — два банахові многовиди M_1 і M_2 класу C^2 з модельними просторами E_1 і E_2 та обмеженими атласами Ω_1 і Ω_2 відповідно. Відображення $f : M_1 \to M_2$ класу C^2 назвемо *обмеженим морфізмом*, якщо для нього існує таке число $C > 0$, що для будь-якої пари карт $(U,\varphi)\in\Omega_1$ і $(V,\psi)\in\Omega_2$ виконується умова $\big(p\in U, f(p)\in V\big)\Longrightarrow\Big(\big\|(\psi\circ\circ f\circ\varphi^{-1})^{(k)}\big(\varphi(p)\big)\big\|\le C,\ k=1,2\Big)$. Природним чином визначається *обмежений ізоморфізм* (M_1,Ω_1) і (M_2,Ω_2).

Властивість відображення f бути обмеженим морфізмом не залежить від вибору представників у класах еквівалентних обмежених атласів вихідних многовидів.

Задання на M обмеженого атласу приводить до коректного означення довжини $L(\Gamma)$ кусково-гладкої кривої Γ в M. Для кусково-гладкої кривої $\Gamma:[t_1,t_2]\ni t\longmapsto x(t)\in M$ розглядаються всі можливі розбиття $\Delta: t_1=s_0<s_1<\ldots<s_m=t_2$ відрізка параметра, при яких кожна ділянка кривої $\Gamma_k=\{x(t)\mid s_{k-1}\le t\le s_k\}$ лежить в області визначення однієї з карт φ_k вихідного атласу. Кожному розбиттю Δ ставимо у відповідність число $l(\Gamma,\Delta)=\sum_{k=1}^{m}l(\Gamma_k)_{\varphi_k}$, де $l(\Gamma_k)_\varphi$ — довжина зображення кривої Γ_k в карті $\varphi: l(\Gamma_k)_\varphi=\displaystyle\int_{S_{k-1}}^{S_k}\left\|\frac{d}{ds}\varphi(x(s))\right\|ds$. Довжину кривої Γ визначимо формулою $L(\Gamma)=\sup_\Delta\{l(\Gamma,\Delta)\}$. Відповідна внутрішня метрика ρ ($\rho(x,y)$ — точна нижня межа довжин всіляких кусково-гладких кривих, що з'єднують точки x та y) узгоджена з вихідною топологією. Обмежений морфізм $f:(M_1,\Omega_1)\to(M_2,\Omega_2)$ є ліпшицевим відносно відповідних внутрішніх метрик.

Фіксація обмеженого атласу дозволяє ввести у дотичному просторі T_pM до многовиду M норму формулою $|||\xi|||_p=\sup_\alpha\|\xi_{\varphi_\alpha}\|$, де $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ — повний набір карт вихідного атласу, для яких $p\in U_\alpha$, а $\xi_\varphi\in E$ — зображення дотичного вектора ξ у карті φ. При цьому має місце властивість *рівномірного топологічного ізоморфізму* просторів T_pM і модельного простору E: $\|\xi_\varphi\|\le|||\xi|||_p\le K\|\xi_\varphi\|$, де K — стала з означення обмеженого атласу, φ — карта в точці $p\in M$.

На многовиді з обмеженим атласом (M,Ω) коректним є задання *обмеженого* тензорного поля $\mathbf{T}$ класу C^1. Припускається існування числа $C>0$, що обмежує зверху норму $\mathbf{T}_\varphi$ кожного локального зображення у карті тензора $\mathbf{T}$ разом з його похідною: $\big((U,\varphi)\in\Omega;\ x\in\in U\big)\Longrightarrow\Big(\big\|\mathbf{T}_\varphi\big(\varphi(x)\big)\big\|\le C;\ \big\|\mathbf{T}'_\varphi\big(\varphi(x)\big)\big\|\le C\Big)$. Властивість обмеженості тензорного поля є інваріантною відносно переходу до еквівалентного обмеженого атласу. Такі тензорні поля називаємо тензорними полями класу $C^1_b(M)$. Природним чином визначаємо гладкі функції класу $C^p_b,\ p=0,1,2,\ C_b=C^0_b$. Вказані позначення будемо використовувати і у випадку, коли областю визначення полів і функцій є область V в M, E або на поверхні в M. Під тензорним полем класу $C^1_0(V)$ розуміємо тензорне поле класу $C^1_b(V)$, якщо воно має обмежений носій, який міститься у V з деяким своїм ε-околом.

Обмежений атлас Ω називаємо *рівномірним*, якщо існує таке число $r>0$, що для будь-якої точки $p\in M$ існує карта $(U,\varphi)\in\Omega$, для якої $\varphi(U)$ містить кулю в E з центром $\varphi(p)$ радіуса r. Подібна умова на атлас многовиду, мабуть уперше, з'явилась у формулюванні твердження 4 у книзі [12, с. 96]. Більш детальне означення рівномірного атласу, а також обмежених тензорних полів, наведено і застосовано у книзі [13, с. 177, 178]. У даній роботі використовується означення з роботи [4].

В скінченновимірному випадку рівномірний атлас існує на компактних многовидах. Прикладом нескінченновимірного многовиду M з рівномірним атласом є зв'язна компонента поверхні сумісного рівня скінченного набору функцій $F_k,\ k=1,\ldots,m$, визначених на гільбертовому просторі, які належать до класу $C^2(U)$ в околі U поверхні M, похідні яких F'_k та F''_k рівномірно обмежені на U і виконується умова $\inf_M\Gamma(\mathbf{grad}F_1,\ldots,\mathbf{grad}F_m)>0$, де $\Gamma(\cdot)$ — детермінант

Грама. Рівномірний атлас будується (ортогональним) проектуванням околів точок $p \in M$ на відповідні дотичні простори T_pM.

Внутрішня метрика на M, що породжена рівномірним атласом, перетворює M у повний метричний простір. Якщо обмежений атлас є еквівалентним рівномірному, то метрика, що породжена цим атласом, також є повною. Якщо серед еквівалентних атласів, що задають на M обмежену структуру, є рівномірний атлас, то цю структуру будемо називати *рівномірною*. Структури обмежено ізоморфних многовидів одночасно або рівномірні, або ні.

Потік $\Phi(t,x)$ векторного поля $\mathbf{X}$ класу C_b^1 на многовиді M з рівномірною структурою є визначеним на $\mathbb{R} \times M$ [12, с. 96].

Протягом усієї роботи многовид M вважаємо наділеним рівномірною структурою.

Якщо V — відкрита множина в $\mathbb{R}^m$, то для многовиду з обмеженим атласом (M,Ω) обмежену структуру на $M \times V$ (з модельним простором $E \dotplus \mathbb{R}^m$) домовимося задавати атласом $\Omega \times id = \big\{(U \times V, \varphi \times id) \mid (U,\varphi) \in \Omega\big\}$.

Елементарну (вкладену) поверхню $\Sigma \subset M$ корозмірності m визначаємо таким чином. Нехай N — многовид з обмеженою структурою, модельний простір якого E_1 є підпростором в E корозмірності m (у подальшому E ототожнюємо з $E_1 \dotplus \mathbb{R}^m$); V — відкритий окіл нуля $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$ і $g\colon N \times V \to U \subset M$ — обмежений („*спрямлюючий*”) ізоморфізм на відкриту підмножину U в M. При цьому $\Sigma = g\big(N \times \{\vec{0}\}\big)$.

Для $\varepsilon > 0$ покладемо

$$\Sigma_{-\varepsilon} := \Sigma \bigcap \big\{x \mid \rho(x, M \setminus U) \geq \varepsilon\big\}. \tag{3}$$

При цьому $\Sigma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma_{-\frac{1}{n}}$.

Розглянемо диференціальну m-форму ω класу C_b^1, визначену на U (або, можливо, на більшій відкритій підмножині в M), для якої у довільній точці $x \in \Sigma$ дотичний простір $T_x\Sigma$ є асоційованим підпростором зовнішньої форми $\omega(x)$ у просторі T_xM (тобто $T_x\Sigma = \big\{Y \in T_xM \mid i_Y\omega(x) = 0\big\}$, де i_Y — внутрішній добуток зовнішньої форми на вектор Y). Якщо, додатково, існує обмежений атлас Ω, узгоджений із заданою на M рівномірною структурою, для якого виконується така умова: якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх $x \in \Sigma_{-\varepsilon}$ і карти $(U,\varphi) \in \Omega$ в точці $x \in \Sigma_{-\varepsilon}$ (тобто $x \in U$) має місце нерівність $\big\|\omega_\varphi(\varphi(x))\big\| \geq \delta$ (ω_φ — зображення ω в карті φ)”, то форму ω називаємо *асоційованою m-формою вкладення* Σ в M.

Якщо $g\colon N \times V \to U$ — спрямлюючий ізоморфізм елементарної поверхні Σ, P — проекція $N \times V$ на V і h — неперервно диференційовна функція на V, для якої $h(\vec{0}) \neq 0$, то $\omega = \big(g^{-1}\big)^* P^*(h\, dt_1 \wedge dt_2 \wedge \ldots \wedge dt_m)$ є прикладом асоційованої m-форми вкладення Σ. Зазначимо, що побудована m-форма ω є замкненою.

Нехай тепер μ — (скінченна) борелева міра на M. Асоційована борелева міра μ_ω на Σ будується за таким принципом. Спочатку розглядається строго трансверсальний до Σ набір $\vec{\mathbf{Y}} = \{\mathbf{Y_1}, \ldots, \mathbf{Y_m}\}$ визначених на U (або, можливо, на більшій відкритій множині в M) векторних полів класу C_b^1, що попарно комутують. Строга трансверсальність набору $\vec{\mathbf{Y}}$ розуміється так: для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якого $x \in \Sigma_{-\varepsilon}$ має місце нерівність $\big|\omega(\vec{\mathbf{Y}})(x)\big| = \big|\omega(\mathbf{Y_1}, \ldots, \mathbf{Y_m})(x)\big| \geq \delta$. Існування такого набору полів доведено в [10].

Позначивши через $\Phi_t^{\mathbf{Y_k}}$ потік поля $\mathbf{Y_k}$, покладемо $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{\mathbf{Y}}} := \Phi_{t_1}^{\mathbf{Y_1}} \ldots \Phi_{t_m}^{\mathbf{Y_m}}$. При цьому справджується рівність $\Phi_{\vec{t}+\vec{s}}^{\vec{\mathbf{Y}}} = \Phi_{\vec{t}}^{\vec{\mathbf{Y}}} \Phi_{\vec{s}}^{\vec{\mathbf{Y}}}$.

Для борелевих множин $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, $A \in \mathcal{B}(M)$ множина $\Phi_B^{\vec{\mathbf{Y}}} A := \big\{ \Phi_{\vec{t}}^{\vec{\mathbf{Y}}}(x) \mid \vec{t} \in B; x \in A \big\}$ є борелевою в M. При цьому для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $r > 0$, що $\big(A \in \mathcal{B}(\Sigma_{-\varepsilon});\ B \in \mathcal{B}(B_r)\big) \Longrightarrow \big(\Phi_B^{\vec{\mathbf{Y}}} A \in \mathcal{B}(U)\big)$. Тут $B_r = \big\{ \vec{t} \mid \|\vec{t}\| < r \big\} \subset \mathbb{R}^m$. Для кожної множини $B \in \mathcal{B}(B_r)$ визначимо міру ν_B на $\mathcal{B}(\Sigma_{-\varepsilon})$ рівністю $\nu_B(A) = \mu\big(\Phi_B^{\vec{\mathbf{Y}}} A\big)$.

Нехай λ_m — інваріантна міра Лебега на $\mathbb{R}^m$. Якщо для кожного $A \in \mathcal{B}(\Sigma_{-\varepsilon})$ існує границя

$$\sigma_{\vec{\mathbf{Y}}}(A) := \lim_{r \to 0} \frac{\nu_{B_r}(A)}{\lambda_m(B_r)}, \tag{4}$$

то за теоремою Нікодима функція множин $\mathcal{B}(\Sigma_{-\varepsilon}) \ni A \mapsto \sigma_{\vec{\mathbf{Y}}}(A) \in \mathbb{R}$ є (скінченною) борелевою мірою на $\Sigma_{-\varepsilon}$. Зображення множини $A \in \mathcal{B}(\Sigma)$ у вигляді $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(A \cap \Sigma_{-\frac{1}{n}} \Big)$ дозволяє продовжити міру $\sigma_{\vec{\mathbf{Y}}}$ на $\mathcal{B}(\Sigma)$.

У роботі [10] наведено достатні умови існування границі (4); міру $\sigma_{\vec{\mathbf{Y}}}$ запропоновано називати поверхневою мірою першого типу на Σ (породженою сім'єю полів $\vec{\mathbf{Y}}$).

Поверхневу міру другого типу μ_ω вводимо на Σ формулою

$$\mu_\omega = \frac{1}{\omega(\vec{\mathbf{Y}})\big|_\Sigma} \sigma_{\vec{Y}}. \tag{5}$$

У роботі [10] доведено коректність даного означення (незалежність правої частини в (5) від вибору строго трансверсального до Σ набору полів $\vec{\mathbf{Y}}$, що попарно комутують).

Доцільно зазначити, що запровадження базових для подальшого понять: елементарної поверхні, обмежених тензорних полів, поверхневих мір ґрунтується на умові існування рівномірного атласу многовиду M.

Далі протягом усієї роботи припускається існування відповідних поверхневих мір першого та другого типів.

Якщо тепер S — вкладена в Σ елементарна поверхня корозмірності m і α — диференціальна форма на U, обмеження якої $\widetilde{\alpha}$ на Σ — асоційована форма вкладення S в Σ, то $\alpha \wedge \omega$ — асоційована форма вкладення S в M і для невід'ємної міри μ має місце рівність

$$\mu_{\alpha \wedge \omega} = (\mu_\omega)_{\widetilde{\alpha}}. \tag{6}$$

Даний факт доведено в [11]. Зайвою є умова замкнености форми ω у роботі [11]. Дійсно, якщо ω і ω_1 — дві асоційовані форми вкладення Σ в M, то існує функція $f \in C^1(\Sigma)$, для якої при кожному $\varepsilon > 0$ функції f та $\dfrac{1}{f}$ належать до $C_b^1(\Sigma_{-\varepsilon})$, така, що $\omega\big|_\Sigma = f \cdot \omega_1\big|_\Sigma$ (наслідок колінеарності зовнішніх m-форм з однаковим асоційованим підпростором $L \subset E$). Тому з (5) випливають рівності

$$\mu_{\omega_1} = f \cdot \mu_\omega, \qquad \mu_{\alpha \wedge \omega_1} = f\big|_S \cdot \mu_{\alpha \wedge \omega}.$$

Якщо при цьому ω — замкнена форма і виконується рівність (6), то для форми ω_1 ця рівність також має місце:

$$\mu_{\alpha \wedge \omega_1} = f\big|_S \cdot \mu_{\alpha \wedge \omega} = (f \cdot \mu_\omega)_{\widetilde{\alpha}} = (\mu_{\omega_1})_{\widetilde{\alpha}}.$$

2. Допоміжні леми. Нехай Σ — елементарна поверхня, $\vec{\mathbf{Y}}$ — строго трансверсальний до Σ набір полів класу C_b^1, які попарно комутують. Згідно з конструкцією асоційованої міри $\sigma = \sigma_{\vec{\mathbf{Y}}}$ для кожного $\varepsilon > 0$ формула $\sigma_r(A) = \dfrac{1}{\lambda_m(B_r)}\,\mu(\Phi_{B_r}^{\vec{\mathbf{Y}}}A)$ визначає на $\Sigma_{-\varepsilon}$ борелеву міру; $\sigma_r(A) \to \sigma(A)$, $r \to 0$ для кожного $A \in \mathcal{B}(\Sigma_{-\varepsilon})$. Далі покладемо $\Phi_B A = \Phi_B^{\vec{\mathbf{Y}}}A$.

Лема 1. *Якщо μ — радонова міра на M і $\varepsilon > 0$, то σ_r і σ — радонові міри на $\Sigma_{-\varepsilon}$.*

Доведення. Нехай $A \in \mathcal{B}(\Sigma_{-\varepsilon})$, $r > 0$, $\delta > 0$. Тоді існує такий компакт $K \subset \Phi_{B_r}A$, що $|\mu|(\Phi_{B_r}A \setminus K) < \delta \cdot \lambda_m(B_r)$. Нехай $K_1 = \big\{x \in \Sigma_{-\varepsilon} \mid \exists \vec{t} \in B_r : \Phi_{\vec{t}}x \in K\big\}$. Тоді $K_1 \subset A$, K_1 — компакт в $\Sigma_{-\varepsilon}$ (образ K при неперервному відображенні) і $\Phi_{B_r}K_1 \supset K$, а тому $|\sigma_r|(A\backslash K_1) < \delta$. Це доводить, що міра σ_r є радоновою.

Залишилося зазначити, що для кожного $r > 0$ міра σ абсолютно неперервна відносно міри σ_r, що доводить радоновість міри σ на $\Sigma_{-\varepsilon}$.

***Наслідок* 1.** *Якщо ω — асоційована m-форма вкладення Σ в M і $\varepsilon > 0$, то міра μ_ω є радоновою на $\Sigma_{-\varepsilon}$.*

Доведення безпосередньо випливає з рівності (5).

Лема 2. *Нехай μ — невід'ємна міра Радона на M, $u \in C_b(M)$, $\varepsilon > 0$ і $A \in \mathcal{B}(\Sigma_{-\varepsilon})$. Тоді має місце рівність*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\int\limits_{\Phi_{B_r}A} u\,d\mu = \int\limits_A u\,d\sigma.$$

Доведення. Для функції $v\colon \Sigma_{-\varepsilon} \to \mathbb{R}$ через $\hat{v}$ позначимо функцію на $\Phi_{B_r}\Sigma_{-\varepsilon}$, для якої $\hat{v}(\Phi_{\vec{t}}x) = v(x)$ при всіх $\vec{t} \in B_r$, $x \in \Sigma_{-\varepsilon}$.

Для обмеженої борелевої функції v на $\Sigma_{-\varepsilon}$ має місце збіжність

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\int\limits_{\Phi_{B_r}\Sigma_{-\varepsilon}} \hat{v}\,d\mu = \lim_{r\to 0}\int\limits_{\Sigma_{-\varepsilon}} v\,d\sigma_r = \int\limits_{\Sigma_{-\varepsilon}} v\,d\sigma,$$

а тому достатньо довести рівність

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\int\limits_{\Phi_{B_r}A} (u - \hat{v})\,d\mu = 0,$$

де $v = u\big|_{\Sigma_{-\varepsilon}}$.

Покладемо $C_1 = \sup_M |u|$, $C_2 = \sup_{r>0}\{\mathrm{Var}(\sigma_r)\} < \infty$ (тут $\mathrm{Var}(\sigma_r)$ — варіація міри σ_r на $\Sigma_{-\varepsilon}$). Нехай $\delta > 0$. За лемою 1 існує компакт $K \subset A$, для якого $\sigma(A \setminus K) < \delta$.

Для кожної точки $x \in K$ існують окіл $V_x \subset \Sigma_{-\varepsilon}$ і число $r(x) > 0$ такі, що для будь-якої точки $y \in U_x = \big\{\Phi_{\vec{t}}z \mid z \in V_x; \|\vec{t}\| < r(x)\big\}$ виконується нерівність $\big|u(y) - \hat{v}(y)\big| < \delta$.

Нехай $V_{x_1}, V_{x_2}, \ldots, V_{x_n}$ — скінченне підпокриття K і $r_1 = \min\{r(x_1), \ldots, r(x_n)\}$. Тоді для кожної точки $x \in K$ і $\vec{t} \in B_{r_1}$ виконується нерівність $\big|u(\Phi_{\vec{t}}x) - \hat{v}(\Phi_{\vec{t}}x)\big| < \delta$.

Покладемо $A_1 = A \setminus K$. Існує таке $r_2 > 0$, що при будь-якому $r \in (0, r_2)$ має місце нерівність

$$\mu(\Phi_{B_r}A_1) < 2\delta\lambda_m(B_r).$$

Покладемо $r_0 = \min(r_1, r_2)$. Тоді для $r \in (0, r_0)$ виконуються нерівності

$$\left| \int\limits_{\Phi_{B_r} A} (u - \hat{v})\, d\mu \right| \leq \int\limits_{\Phi_{B_r} K} |u - \hat{v}|\, d\mu + \int\limits_{\Phi_{B_r} A_1} (|u| + |\hat{v}|)\, d\mu \leq$$

$$\leq \delta C_2 \lambda_m(B_r) + 2C_1 \cdot 2\delta \lambda_m(B_r) = \delta \lambda_m(B_r)(C_2 + 4C_1),$$

звідки і випливає твердження леми.

Означення 1. *У випадку, коли $u \in L_1(M, \mu)$, де $L_1(M, \mu)$ — простір μ-інтегровних на M функцій, і для множини $A \in \mathcal{B}(\Sigma_{-\varepsilon})$ існує $\lim_{r \to 0} \dfrac{1}{\lambda_m(B_r)} \displaystyle\int_{\Phi_{B_r} A} u\, d\mu$, домовимося останню границю позначати символом $\displaystyle\int_A u\, d\sigma$.*

У роботі [10] доведено існування для кожного $\varepsilon > 0$ числа $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, для якого відображення $\Phi \colon \Sigma_{-\varepsilon} \times B_\delta \ni (x, \vec{t}) \mapsto \Phi_{\vec{t}} x \in \Phi_{B_\delta} \Sigma_{-\varepsilon}$ є гомеоморфізмом.

Лема 3. *Для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$, для якого $\Phi \colon \Sigma_{-\varepsilon} \times B_\gamma \to \Phi_{B_\gamma} \Sigma_{-\varepsilon}$ є обмеженим дифеоморфізмом.*

Доведення. Неперервна диференційовність відображення Φ на $\Sigma_{-\varepsilon} \times B_\delta$ випливає із загальної теорії диференціальних рівнянь у банахових просторах. При природному ототожненні $\Sigma_{-\varepsilon} \times B_\delta$ з $\Phi_{B_\delta} \Sigma_{-\varepsilon}$ похідна $\Phi'(\langle x, \vec{0} \rangle)$ при кожному $x \in \Sigma_{-\varepsilon}$ є тотожним оператором; операторна сім'я $\Phi'_x(\langle x, \vec{t}\, \rangle)$ частинних похідних по x задовольняє систему рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \Phi'_x(\langle x, \vec{t}\, \rangle) = (\mathbf{Y_i})'_x \left(\Phi(\langle x, \vec{t}\, \rangle) \right) \Phi'_x(\langle x, \vec{t}\, \rangle), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{7}$$

а частинні похідні по t_i задовольняють рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \Phi(\langle x, \vec{t}\, \rangle) = \mathbf{Y_i} \left(\Phi(\langle x, \vec{t}\, \rangle) \right), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{8}$$

Оскільки поля $\mathbf{Y_i}$ належать до класу C_b^1, то умови (7), (8) дозволяють зробити висновок про існування $\gamma \in (0, \delta)$, при якому має місце рівномірна обмеженість операторного поля $\Phi'(\cdot)$ на $\Sigma_{-\varepsilon} \times B_\gamma$.

Зменшуючи, якщо необхідно, $\gamma > 0$ і враховуючи строгу трансверсальність системи полів $\vec{\mathbf{Y}}$, на підставі теореми про обернене відображення отримуємо існування, неперервність і обмеженість операторного поля $(\Phi^{-1})'(\cdot)$ на $\Phi_{B_\gamma} \Sigma_{-\varepsilon}$, що завершує доведення леми.

Наслідок 2. *Для кожного $\varepsilon > 0$ існують $\gamma = \gamma(\varepsilon)$ і визначена на $\Phi_{B_\gamma} \Sigma_{-\varepsilon}$ замкнена диференціальна m-форма ω, яка при кожному $\vec{t} \in B_\gamma$ є асоційованою формою для поверхні $\Phi_{\vec{t}} \Sigma_{-\varepsilon}$ і при цьому $\langle \omega, \vec{\mathbf{Y}} \rangle = \omega(\mathbf{Y_1}, \ldots, \mathbf{Y_m}) \equiv 1$ в $\Phi_{B_\gamma} \Sigma_{-\varepsilon}$.*

Доведення. Нехай ξ — m-форма $dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_m$ на $\Sigma_{-\varepsilon} \times B_\gamma$, де $\gamma = \gamma(\varepsilon)$ побудовано згідно з лемою 3. Тоді $\omega = (\Phi^{-1})^* \xi$ є шуканою m-формою.

Означення 2. *Асоційовану форму $\omega = \omega_{\vec{\mathbf{Y}}}$, побудовану в наслідку 2, назвемо канонічною формою, що відповідає набору полів $\vec{\mathbf{Y}}$.*

Лема 4. *Нехай E — лінійний простір, L — підпростір в E корозмірності m, α — асоційована з L зовнішня m-форма на E (тобто $L = \{x \mid i_x \alpha = 0\}$). Нехай $\vec{W} = \{W_0, W_1 \ldots, W_m\}$ — впорядкований набір векторів в E, $\vec{W}^i = \{W_0, \ldots, \widehat{W_i} \ldots, W_m\}$ — піднабір $\vec{W}$ з відсутнім W_i, $X = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \langle \alpha, \vec{W}^i \rangle W_i$. Тоді X належить до L.*

Доведення. Покладемо $\widetilde{W_i}$ — клас вектора W_i в E/L.

Випадок 1. Нехай система $\{\widetilde{W_i},\ i=0,\ldots,m\}$ повна в E/L. Достатньо перевірити, що $\alpha(X,W_{i_1},\ldots,W_{i_{m-1}})=0$ для будь-якого піднабору $(W_{i_1},\ldots,W_{i_{m-1}})$. Без втрати загальності вважаємо, що $i_1<i_2<\ldots<i_{m-1}$.

Якщо $j<k,\ \{j,k\}=\{0,1,\ldots,m\}\setminus\{i_1,\ldots,i_{m-1}\}$, то

$$\alpha(X,W_{i_1},\ldots,W_{i_{m-1}})=(-1)^j\alpha(\vec{W}^j)\alpha(W_j,W_{i_1},\ldots,W_{i_{m-1}})+$$
$$+(-1)^k\alpha(\vec{W}^k)\alpha(W_k,W_{i_1},\ldots,W_{i_{m-1}})=\alpha(\vec{W}^j)\alpha(\vec{W}^k)-\alpha(\vec{W}^k)\alpha(\vec{W}^j)=0.$$

Випадок 2. Нехай система $\{\widetilde{W_i}\}$ не повна в E/L. Тоді $\widetilde{\alpha}\big(\widetilde{W_{i_1}},\ldots,\widetilde{W_{i_m}}\big)=0$ для будь-якого піднабору m векторів з $\big\{\widetilde{W_i}\big\}$. Тут $\widetilde{\alpha}$ — m-форма на E/L, індукована $\alpha\colon\widetilde{\alpha}\big(\widetilde{Z_1},\ldots,\widetilde{Z_m}\big)==\alpha(Z_1,\ldots,Z_m)$. Тому і в цьому випадку X належить до L.

3. Полівекторні поля і оператор дивергенції. Якщо $\mathbf{Z_1},\ldots,\mathbf{Z_m}$ — векторні поля на M, то m-векторне поле $\vec{\mathbf{Z}}=\mathbf{Z_1}\wedge\ldots\wedge\mathbf{Z_m}$ на M — поле кососиметричного тензора на M типу $(0,m)$, визначене на диференціальних m-формах класу $C^1_b(M)$ рівністю $\langle\vec{\mathbf{Z}},\omega\rangle=\langle\omega,\vec{\mathbf{Z}}\rangle==\omega(\mathbf{Z_1},\mathbf{Z_2},\ldots,\mathbf{Z_m})$.

Природним чином визначаються неперервні полівекторні поля; m-векторне поле $\vec{\mathbf{Z}}$ на M, для якого існує послідовність неперервних m-векторних полів $\vec{\mathbf{Z}}_\mathbf{n}$ таких, що $\lim_{n\to\infty}\Big|\Big|\Big|\vec{\mathbf{Z}}_\mathbf{n}(p)-\vec{\mathbf{Z}}(p)\Big|\Big|\Big|_p=0\ (\mathrm{mod}\ \mu)$, назвемо μ-вимірним векторним полем (тут $|||\cdot|||_p$ — норма в просторі $\Lambda_m(T_pM)$, див. п. 1).

Для вимірного полівекторного поля $\vec{\mathbf{Z}}$ функція $x\mapsto\Big|\Big|\Big|\vec{\mathbf{Z}}(x)\Big|\Big|\Big|_x$ є μ-вимірною на M. У випадку, коли ця функція інтегровна на M за мірою μ, полівекторне поле $\vec{\mathbf{Z}}$ назвемо інтегровним: $\vec{\mathbf{Z}}\in L_1(\mu)$ (див. [14]). Аналогічно вводяться полівекторні поля класу $L_p(\mu),\ 1<p\le\infty$.

Нескладно перевірити, що у випадку, коли векторні поля $\mathbf{Z_2},\mathbf{Z_3},\ldots,\mathbf{Z_m}$ вимірні й обмежені на M, а $\mathbf{Z_1}$ — поле класу $L_p(\mu)$, полівекторне поле $\vec{\mathbf{Z}}$ належить до $L_p(\mu)$. Аналогічно $\Big(\vec{\mathbf{Z}}\in L_p(\mu),\omega\in C_b(M)\Big)\Longrightarrow\Big(\omega(\vec{\mathbf{Z}})\in L_p(\mu))\Big)$.

Лінійні комбінації m-векторних полів класу $L_p(\mu)$ утворюють лінійний простір, який будемо позначати через $L_p\Lambda_m(\mu)$.

Означення 3. *Нехай* $\vec{\mathbf{Z}}=\mathbf{Z_1}\wedge\ldots\wedge\mathbf{Z_m}$ — *m-векторне поле класу* $C^1_b(M)$ (*тобто всі векторні поля* $\mathbf{Z_i}\in C^1_b(M)$), $\vec{\mathbf{W}}\in L_1\Lambda_{m-1}(\mu)$. $\vec{\mathbf{W}}$ *назвемо дивергенцією* $\vec{\mathbf{Z}}$ $\big(\vec{\mathbf{W}}=\operatorname{div}\vec{\mathbf{Z}},\ \vec{\mathbf{Z}}\in D(\operatorname{div})\big)$, *якщо для будь-якої диференціальної* $(m-1)$-*форми* ω *класу* $C^1_0(M)$ *має місце рівність*

$$\int\limits_M\langle\omega,\vec{\mathbf{W}}\rangle\,d\mu=-\int\limits_M\langle d\omega,\vec{\mathbf{Z}}\rangle\,d\mu. \tag{9}$$

Лема 5. *Нехай на просторі E існує функція класу C^1_0 з непорожнім обмеженим носієм* (*достатньо вимагати рефлексивність простору E, див.* [15]), *μ — радонова міра. Тоді для довільного m-векторного поля $\vec{\mathbf{Z}}$ класу C^1_b не існує двох різних елементів простору $L_1\Lambda_{m-1}(\mu)$, що є дивергенціями $\vec{\mathbf{Z}}$.*

Доведення. Припускаючи, що $\vec{\mathbf{W}}\ne\vec{0}\,(\mathrm{mod}\ \mu)$, доведемо існування $(m-1)$-форми $\omega\in\in C^1_0(M)$, для якої $\displaystyle\int_M\langle\omega,\vec{\mathbf{W}}\rangle\,d\mu\ne0$.

Крок 1. Завдяки тому, що міра μ є радоновою, існує компакт $L \subset M$, для якого $|\mu|(L) > 0$; $\vec{\mathbf{W}}(x) \neq 0$ для кожної точки $x \in L$, а тому існує карта $\varphi\colon V \to \varphi(V) \subset E$, для якої

$$|\mu|\Big(\big\{x \in V \mid \vec{\mathbf{W}}(x) \neq 0\big\}\Big) > 0. \tag{10}$$

Індуковану гомеоморфізмом φ міру Радона на $\varphi(V)$ і тензорне поле позначимо через μ_φ і $\vec{\mathbf{W}}_\varphi$ відповідно. При цьому $\vec{\mathbf{W}}_\varphi \in L_1\Lambda_{m-1}(\mu_\varphi)$.

Крок 2. Нехай α — зовнішня $(m-1)$-форма на E. Функція $f = \langle \alpha, \vec{\mathbf{W}}_\varphi \rangle \in L_1(\mu_\varphi)$. Припустивши, що для кожної функції $u \in C_0^1\big(\varphi(V)\big)$ має місце рівність $\displaystyle\int_{\varphi(V)} uf\, d\mu_\varphi = 0$, доведемо, що $f = 0 \,(\operatorname{mod} \mu_\varphi)$.

Якщо $u \in C_0^1(E)$, $U = \{x \mid u(x) > 0\} \neq \varnothing$, то для довільних функцій $h \in C^1(\mathbb{R})$, $h(0) = 0$, чисел $k \in \mathbb{R}$ і векторів $b \in E$ функції $v(x) = h \circ u(kx + b)$ також належать до $C_0^1(E)$. Тому на E існує сім'я функцій $u_\alpha \in C_0^1(E)$, для яких $u_\alpha(x) \in [0;1]$, і множини $U_\alpha = \{x \mid u_\alpha(x) > 0\}$ утворюють базу топології в E.

Використовуючи теорему Лебега про мажоровану збіжність, приходимо до висновку, що для будь-якої множини U_α має місце рівність $\displaystyle\int_{U_\alpha} f\, d\mu_\varphi = 0$. Оскільки сім'я множин U_α є замкненою відносно скінченних об'єднань, для кожного компакту $K \subset \varphi(V)$ і $\varepsilon > 0$ знайдеться U_α, для якого мають місце вкладення $K \subset U_\alpha \subset K_\varepsilon$ (тут і далі A_ε — ε-окіл множини A), звідки випливає рівність $\displaystyle\int_K f\, d\mu_\varphi = 0$. Завдяки радоновості міри μ_φ отримуємо рівність $\displaystyle\int_A f\, d\mu_\varphi = 0$ для кожного $A \in \mathcal{B}\big(\varphi(V)\big)$, тобто $f = 0 \,(\operatorname{mod} \mu_\varphi)$.

Крок 3. Застосовуючи до тензорного поля $\vec{\mathbf{W}}_\varphi$ узагальнену теорему Лузіна (див. [16]) і враховуючи (10), приходимо до висновку про існування компакту K в $\varphi(V)$, на якому $\vec{\mathbf{W}}_\varphi\big|_K$ неперервне і при цьому $|\mu_\varphi|\Big(\big\{x \in K \mid \vec{\mathbf{W}}_\varphi(x) \neq 0\big\}\Big) > 0$.

Множина $\{\vec{\mathbf{W}}_\varphi(x) \mid x \in K\}$ вкладається у сепарабельний підпростір F простору $\Lambda_{m-1}(E)$, а тому існує зліченна сім'я $\{\beta_n\}$ зовнішніх $(m-1)$-форм на E, які відокремлюють елементи F. Оскільки, за доведеним вище, $\langle \beta_n, \vec{\mathbf{W}}_\varphi \rangle = 0 \,(\operatorname{mod} \mu_\varphi)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, отримуємо суперечність: $|\mu_\varphi|\Big(\big\{x \in K \mid \vec{\mathbf{W}}_\varphi(x) \neq 0\big\}\Big) = 0$.

Лему доведено.

У подальшому модельний простір E задовольняє умову леми 5.

Лема 6. *Нехай векторне поле* $\mathbf{X}$ *і* m*-векторне поле* $\vec{\mathbf{Z}}$ *належать до* $C_b^1(M) \cap D(\operatorname{div})$. *Тоді* $\mathbf{X} \wedge \vec{\mathbf{Z}} \in C_b^1(M) \cap D(\operatorname{div})$ *і має місце рівність*

$$\operatorname{div}(\mathbf{X} \wedge \vec{\mathbf{Z}}) = \operatorname{div} \mathbf{X} \cdot \vec{\mathbf{Z}} - \mathbf{X} \wedge \operatorname{div} \vec{\mathbf{Z}} + L_{\mathbf{X}} \vec{\mathbf{Z}}, \tag{11}$$

де $L_{\mathbf{X}}$ *— диференціювання Лі.*

Доведення. Нехай ω — диференціальна m-форма на M класу $C_0^1(M)$. Будемо виходити з рівності

$$\big\langle d\omega, \mathbf{X} \wedge \vec{\mathbf{Z}} \big\rangle = \big\langle i_{\mathbf{X}} d\omega, \vec{\mathbf{Z}} \big\rangle = \mathbf{X}\big\langle \omega, \vec{\mathbf{Z}} \big\rangle - \big\langle d\, i_{\mathbf{X}} \omega, \vec{\mathbf{Z}} \big\rangle - \big\langle \omega, L_{\mathbf{X}} \vec{\mathbf{Z}} \big\rangle. \tag{12}$$

З (9) і (12) отримуємо

$$\int\limits_M \big\langle d\omega, \mathbf{X}\wedge\vec{\mathbf{Z}}\big\rangle\, d\mu = \int\limits_M \big\langle \omega, -\operatorname{div}\mathbf{X}\cdot\vec{\mathbf{Z}} + \mathbf{X}\wedge\operatorname{div}\vec{\mathbf{Z}} - L_{\mathbf{X}}\vec{\mathbf{Z}}\big\rangle\, d\mu,$$

звідки і випливає твердження леми.

***Наслідок* 3.** *Якщо* $\vec{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z_1}\wedge\ldots\wedge\mathbf{Z_m}$ *і всі векторні поля* $\mathbf{Z_k}$ *належать до* $C_b^1(M)\cap D(\operatorname{div})$, *то* $\vec{\mathbf{Z}}$ *належить до* $C_b^1(M)\cap D(\operatorname{div})$.

Нехай $\vec{\mathbf{W}} = \mathbf{W_0}\wedge\mathbf{W_1}\wedge\ldots\wedge\mathbf{W_m}\in C_b^1(M)\cap D(\operatorname{div})$, ω — диференціальна m-форма класу $C_b^1(M)$. Покладемо

$$\mathbf{Z} = \langle\omega, \vec{\mathbf{W}}\rangle := \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\big\langle\omega, \vec{\mathbf{W}}^{\mathbf{i}}\big\rangle\mathbf{W_i}, \tag{13}$$

де $\vec{\mathbf{W}}^{\mathbf{i}} = \mathbf{W_0}\wedge\ldots\wedge\mathbf{W_{i-1}}\wedge\mathbf{W_{i+1}}\wedge\ldots\wedge\mathbf{W_m}$.

Лема 7. *Векторне поле* $\mathbf{Z}$, *визначене формулою* (13), *належить до* $C_b^1(M)\cap D(\operatorname{div})$, *і має місце „правило Лейбніца"*:

$$\operatorname{div}\mathbf{Z} = \big\langle\omega, \operatorname{div}\vec{\mathbf{W}}\big\rangle + \big\langle d\omega, \vec{\mathbf{W}}\big\rangle. \tag{14}$$

Доведення. Нехай u — функція на M класу $C_0^1(M)$. Тоді

$$\int\limits_M u\Big(\big\langle\omega, \operatorname{div}\vec{\mathbf{W}}\big\rangle + \big\langle d\omega, \vec{\mathbf{W}}\big\rangle\Big)\, d\mu =$$

$$= \int\limits_M \big\langle u\omega, \operatorname{div}\vec{\mathbf{W}}\big\rangle\, d\mu + \int\limits_M \big\langle d(u\omega), \vec{\mathbf{W}}\big\rangle\, d\mu - \int\limits_M \big\langle du\wedge\omega, \vec{\mathbf{W}}\big\rangle\, d\mu =$$

$$= -\int\limits_M \left(\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\langle du, \mathbf{W_i}\rangle\big\langle\omega, \vec{\mathbf{W}}^{\mathbf{i}}\big\rangle\right) d\mu = -\int\limits_M \langle du, \mathbf{Z}\rangle\, d\mu,$$

звідки, внаслідок довільності $u\in C_0^1(M)$, випливає твердження леми.

Нехай $\varepsilon > 0$, $\omega = \omega_{\vec{\mathbf{Y}}}$ — канонічна m-форма поверхні $\Sigma_{-\varepsilon}$, що відповідає набору полів $\vec{\mathbf{Y}} = \{\mathbf{Y_1}, \ldots, \mathbf{Y_m}\}$, і $\vec{\mathbf{W}} = \mathbf{W_0}\wedge\mathbf{W_1}\wedge\ldots\wedge\mathbf{W_m}\in C_b^1(M)\cap D(\operatorname{div})$.

Лема 8. *Для кожного* $\varepsilon > 0$ *існує таке* $r(\varepsilon) > 0$, *що для будь-якого* $r\in(0, r(\varepsilon))$ *і будь-якої функції* $u\in C_0^1(\Sigma_{-\varepsilon})$ *має місце рівність*

$$\int\limits_{\Phi_{B_r}\Sigma_{-\varepsilon}} \hat{u}\cdot\big\langle\omega, \operatorname{div}\vec{\mathbf{W}}\big\rangle\, d\mu = -\int\limits_{\Phi_{B_r}\Sigma_{-\varepsilon}} \mathbf{Z}\hat{u}\, d\mu, \tag{15}$$

де поле $\mathbf{Z}$ *визначено формулою* (13); $\hat{u}(\Phi_{\vec{t}}x) = u(x)$ *для кожного* $x\in\Sigma_{-\varepsilon}$ *і* $\omega = \omega_{\vec{\mathbf{Y}}}$.

Доведення. Оскільки m-форма ω є замкненою, то внаслідок (14) справджується рівність

$$\big\langle\omega, \operatorname{div}\vec{\mathbf{W}}\big\rangle = \operatorname{div}\mathbf{Z}. \tag{16}$$

За наслідком 2 і лемою 4 векторне поле $\mathbf{Z}$ дотикається до кожної поверхні $\Phi_{\vec{t}}\Sigma_{-\varepsilon}$ при фіксованому $\vec{t}$ достатньо малої норми $\big(\|\vec{t}\| < \gamma\big)$.

Зафіксуємо $r \in (0, \gamma)$. Нехай послідовність функцій $\varphi_n \in C[0, r]$ при $n > 3$ визначено умовами

$$\varphi_n(s) = 0 \quad \text{при} \quad s \in \left[0, \frac{n-3}{n} r\right] \cup \left[\frac{n-1}{n} r, r\right],$$

$$\varphi_n(s) = -\frac{n^2}{r^2} s + \frac{n(n-3)}{r} \quad \text{при} \quad s \in \left[\frac{n-3}{n} r, \frac{n-2}{n} r\right],$$

$$\varphi_n(s) = \frac{n^2}{r^2} s - \frac{n(n-1)}{r} \quad \text{при} \quad s \in \left[\frac{n-2}{n} r, \frac{n-1}{n} r\right].$$

Тоді послідовність функцій $h_n(s) = 1 + \int_0^s \varphi_n(s)\, ds$ є такою, що функції $u_n(\Phi_{\vec{t}} x) = h_n\big(\|\vec{t}\|\big) \cdot u(x)$ збігаються з функцією $\hat{u}(\Phi_{\vec{t}} x)$ в $\Phi_{B_{\frac{n-3}{n} r}} \Sigma_{-\varepsilon}$. При цьому $u_n \in C_0^1(\Phi_{B_r} \Sigma_{-\varepsilon})$, а тому мають місце рівності

$$\int\limits_{\Phi_{B_r} \Sigma_{-\varepsilon}} u_n \operatorname{div} \mathbf{Z}\, d\mu = - \int\limits_{\Phi_{B_r} \Sigma_{-\varepsilon}} \mathbf{Z} u_n\, d\mu. \tag{17}$$

При цьому $(\mathbf{Z} u_n)(\Phi_{\vec{t}} x) = h_n\big(\|\vec{t}\|\big) \cdot (\mathbf{Z} \hat{u})(\Phi_{\vec{t}} x),\ x \in \Sigma_{-\varepsilon}$. Тому, переходячи в (17) до границі при $n \to \infty$ з урахуванням (16), приходимо до рівності (15).

Лему доведено.

4. Основна теорема. Нехай M — зв'язний ґаусдорфів банахів многовид класу C^2 з модельним дійсним простором E, на якому існує функція класу C^1 з непорожнім обмеженим носієм. Многовид M наділено рівномірною структурою; μ — невід'ємна міра Радона на M; Σ — елементарна поверхня в M корозмірності m; S — область в $\Sigma_{-\varepsilon}$ при деякому $\varepsilon > 0$, границя якої ∂S є елементарною вкладеною в Σ поверхнею корозмірності 1; ω — диференціальна m-форма класу C_b^1 в околі U поверхні Σ, асоційована з вкладенням Σ в M; α — 1-форма класу C_b^1 на U, обмеження якої $\widetilde{\alpha}$ на Σ є асоційованою формою вкладення ∂S в Σ; $\vec{\mathbf{W}} = \mathbf{W_0} \wedge \ldots \wedge \mathbf{W_m}$ — полівекторне поле на M; $\mathbf{W_i} \in C_b^1(M) \cap D(\operatorname{div})$; $\operatorname{div} \mathbf{W_i} \in L_\infty(\mu)$, $i = 0, 1, \ldots, m$.

Теорема. *При виконанні наведених вище умов справджується рівність*

$$\int\limits_{\partial S} \big\langle \alpha \wedge \omega, \vec{\mathbf{W}} \big\rangle\, d\mu_{\alpha \wedge \omega} = \int\limits_{S} \big\langle \omega, \operatorname{div} \vec{\mathbf{W}} \big\rangle\, d\mu_\omega. \tag{18}$$

Доведення. Ідея доведення теореми полягає в зведенні формули (18) до вигляду (19) з векторним полем $\mathbf{Z}$, що визначено формулою (13), із подальшим доведенням відповідної версії формули Гаусса – Остроградського.

Крок 1. Зазначимо, що міра μ_ω визначається формулою (5) через комутовний строго трансверсальний до Σ набір полів $\vec{\mathbf{Y}}$. При цьому без втрати загальності в якості форми ω можна взяти канонічну форму $\omega_{\vec{\mathbf{Y}}}$, оскільки перехід до іншої асоційованої форми вкладення Σ в M не змінить жодну з частин рівності (18) (див. п. 1).

За наслідком 2

$$\vec{\mathbf{W}} \in C_b^1(M) \cap D(\operatorname{div}), \qquad \big\langle \alpha \wedge \omega, \vec{\mathbf{W}} \big\rangle = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \alpha(\mathbf{W_i})\, \omega(\vec{\mathbf{W}}^{\mathbf{i}}) = \langle \alpha, \mathbf{Z} \rangle,$$

де поле $\mathbf{Z}$ визначене формулою (13) і за лемою 4 дотикається до Σ.

Оскільки $\langle \alpha, \mathbf{Z} \rangle \big|_{\Sigma} = \big\langle \widetilde{\alpha}, \mathbf{Z} \big|_{\Sigma} \big\rangle$, то з урахуванням (16) і рівності (6) рівність (18) перетворюється у таку:

$$\int\limits_{\partial S} \langle \widetilde{\alpha}, \mathbf{Z} \big|_{\Sigma} \rangle \, d(\mu_\omega)_{\widetilde{\alpha}} = \int\limits_{S} \operatorname{div} \mathbf{Z} \, d\mu_\omega. \tag{19}$$

Тут $\widetilde{\alpha}$ (обмеження на Σ форми α) — асоційована форма вкладення ∂S в Σ,

$$\int\limits_{S} \operatorname{div} \mathbf{Z} \, d\mu_\omega := \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r} S} \frac{1}{\langle \omega, \vec{\mathbf{Y}} \rangle} \operatorname{div} \mathbf{Z} \, d\mu,$$

якщо остання границя існує.

Далі для зручності позначатимемо $\mathbf{Z}\big|_{\Sigma}$ через $\mathbf{Z}$.

Крок 2. Нехай $\mathbf{X} \in C_b^1(\Sigma)$ — векторне поле на Σ, строго трансверсальне до ∂S, зовнішнє по відношенню до області S. Завдяки обмеженості поля $\mathbf{X}$ його потік $\Phi_t = \Phi_t^{\mathbf{X}}$ є визначеним у околі $t_0 = 0$ рівномірно відносно $x \in \partial S$. При цьому

$$\int\limits_{\partial S} \langle \widetilde{\alpha}, \mathbf{Z} \rangle \, d(\mu_\omega)_{\widetilde{\alpha}} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t S} \frac{\langle \widetilde{\alpha}, \mathbf{Z} \rangle}{\langle \widetilde{\alpha}, \mathbf{X} \rangle} \, d\mu_\omega.$$

Якщо u належить до $C_0^1(S)$, то за лемою 8 справджується рівність

$$\frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r} S} \hat{u} \cdot \operatorname{div} \mathbf{Z} \, d\mu = -\frac{1}{\lambda_m(B_r)} \int\limits_{\Phi_{B_r} S} \mathbf{Z} \hat{u} \, d\mu, \tag{20}$$

де $\hat{u}$ — продовження функції u на $\Phi_{B_r} S$ — стала на траєкторіях полів набору $\vec{\mathbf{Y}}$.

Оскільки $\mathbf{Z}\hat{u}$ належить до $C_b(\Phi_{B_r} \Sigma_{-\varepsilon})$, то за лемою 2 права частина в (20) має границю при $r \to 0$, що дорівнює $-\displaystyle\int_S \mathbf{Z} u \, d\sigma$.

Визначимо функцію $t(\cdot)$ в околі ∂S на Σ тотожністю $\Phi\big(t(x), x\big) \in \partial S$ (тут $\Phi(t,x) = \Phi_t x$). Функція $t(\cdot)$ визначена в околі $(\partial S)_\delta$ і, за теоремою про неявну функцію, $t(\cdot) \in C^1\big((\partial S)_\delta\big)$. Оскільки $\mathbf{X}$ належить до $C_b^1(\Sigma)$, то $t(\cdot)$ належить до $C_b^1\big((\partial S)_\delta\big)$ й існує таке $\gamma > 0$, що $\Phi_{[-\gamma,\gamma]}(\partial S) \subset (\partial S)_\delta$.

Зафіксуємо $\beta \in (0, \gamma)$ і визначимо функцію $\psi_\beta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ умовами: $\psi_\beta(t) = 0$ при $t \le 0$, $\psi_\beta(t) = 1$ при $t \ge \beta$ і $\psi_\beta(t) = \dfrac{1}{\beta} t$ при $0 < t < \beta$. Покладемо $u_\beta(x) = \psi_\beta\big(t(x)\big)$ при $x \in (\partial S)_\delta$, $u_\beta(x) = 1$ при $x \in S \setminus (\partial S)_\delta$ і $u_\beta(x) = 0$ при $x \in \Sigma \setminus S_\delta$.

$\mu_\omega(\partial S) = \mu_\omega\big(\Phi_{-\beta}(\partial S)\big) = 0$ (див. [4]), а тому функція $\mathbf{Z} u_\beta$ визначена майже скрізь на $\Sigma \pmod{\mu_\omega}$. Для $x \in \Sigma \setminus \big(\partial S \cup \Phi_{-\beta}(\partial S)\big)$ має місце рівність $(\mathbf{Z} u_\beta)(x) = \psi'_\beta\big(t(x)\big) \cdot (\mathbf{Z} t)(x)$.

Нехай послідовність функцій $\varphi_n = \varphi_{n,\beta} \in C^1(\mathbb{R})$ задовольняє такі умови: $\varphi_n(t) = 0$ при $t \le \dfrac{1}{n} < \dfrac{\beta}{3}$, $\varphi_n(t) = 1$ при $t \ge \beta$, послідовність $\{\varphi'_n\}$ рівномірно обмежена на $\mathbb{R}$ і $\varphi'_n(t) \to \psi'_\beta(t)$ у кожній точці $t \in \mathbb{R} \setminus \{0; \beta\}$.

Приклад послідовності: $\varphi_n(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} h_n(s) \, ds$, де $h_n(s) = 0$ при $s \in \left(-\infty, \dfrac{1}{n}\right] \cup [\beta, +\infty)$; $h_n(s) = \dfrac{n^2}{n\beta - 2}\left(s - \dfrac{1}{n}\right)$ при $s \in \left[\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right]$; $h_n(s) = -\dfrac{n^2}{n\beta - 2}(s - \beta)$ при $s \in \left[\beta - \dfrac{1}{n}, \beta\right]$; $h_n(s) = \dfrac{n}{n\beta - 2}$ при $s \in \left[\dfrac{2}{n}, \beta - \dfrac{1}{n}\right]$.

Тоді $\varphi_n \circ t$ належить до $C_0^1(S)$; послідовність $\varphi_n \circ t$ при $n \to \infty$ рівномірно на Σ збігається до u_β; $\big(\mathbf{Z}(\varphi_n \circ t)\big)(x) = \varphi_n'\big(t(x)\big) \cdot (\mathbf{Z}t)(x)$. Тому за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\int\limits_S \mathbf{Z}(\varphi_n \circ t)\, d\mu_\omega \to \int\limits_S \mathbf{Z}u_\beta\, d\mu_\omega, \quad n \to \infty.$$

Крок 3. Векторне поле $\mathbf{Q} = \mathbf{Z} - \dfrac{\langle \widetilde{\alpha}, \mathbf{Z}\rangle}{\langle \widetilde{\alpha}, \mathbf{X}\rangle}\mathbf{X}$ є визначеним на Σ в околі ∂S. Оскільки $\langle \widetilde{\alpha}, \mathbf{Q}\rangle = 0$, то поле $\mathbf{Q}$ дотикається до ∂S.

У достатньо малому околі $V \subset \Sigma$ поверхні ∂S справджується рівність

$$\int\limits_V \mathbf{Z}u_\beta\, d\mu_\omega = \int\limits_V \mathbf{Q}u_\beta\, d\mu_\omega + \int\limits_V \frac{\langle \widetilde{\alpha}, \mathbf{Z}\rangle}{\langle \widetilde{\alpha}, \mathbf{X}\rangle}\mathbf{X}u_\beta\, d\mu_\omega. \tag{21}$$

При цьому $(\mathbf{X}u_\beta)(x) = \psi_\beta'\big(t(x)\big)(\mathbf{X}t)(x)$, $(\mathbf{X}t)(x) = \dfrac{d}{ds}\Big|_{s=0} t(\Phi_s x) = \dfrac{d}{ds}\Big|_{s=0}\big(t(x) - s\big) = -1$. Тому $(\mathbf{X}u_\beta)(x) = -\dfrac{1}{\beta}$ при $x \in S \setminus \Phi_{-\beta}S$, $(\mathbf{X}u_\beta)(x) = 0$ при $x \in \Phi_{-\beta}S$,

$$\lim_{\beta\to 0}\int\limits_V \frac{\langle \widetilde{\alpha}, \mathbf{Z}\rangle}{\langle \widetilde{\alpha}, \mathbf{X}\rangle}\mathbf{X}u_\beta\, d\mu_\omega = -\lim_{\beta\to 0}\frac{1}{\beta}\int\limits_{S\setminus\Phi_{-\beta}S}\frac{\langle \widetilde{\alpha}, \mathbf{Z}\rangle}{\langle \widetilde{\alpha}, \mathbf{X}\rangle}\, d\mu_\omega = -\int\limits_{\partial S}\langle \widetilde{\alpha}, \mathbf{Z}\rangle\, d(\mu_\omega)_{\widetilde{\alpha}}.$$

Аналогічно

$$(\mathbf{Q}u_\beta)(x) = \psi'\big(t(x)\big)(\mathbf{Q}t)(x), \qquad \lim_{\beta\to 0}\int\limits_V \mathbf{Q}u_\beta\, d\mu_\omega = -\lim_{\beta\to 0}\frac{1}{\beta}\int\limits_{S\setminus\Phi_{-\beta}S}(\mathbf{Q}t)\, d\mu_\omega = 0,$$

оскільки $\mathbf{Q}t \equiv 0$ на ∂S.

Тепер, виходячи з рівності (21) і конструкції функції $\varphi_{n,\beta}$, робимо висновок про існування послідовності функцій $v_k(x) = \varphi_{n(k),\frac{1}{k}} \circ t \in C_0^1(S)$, для якої $A_k = \{x \in S \mid v_k(x) \neq 1\} \searrow \varnothing$;

$$-\int\limits_S \mathbf{Z}v_k\, d\sigma \longrightarrow \int\limits_{\partial S}\langle \widetilde{\alpha}, \mathbf{Z}\rangle\, d\mu_{\alpha\wedge\omega}, \quad k \to \infty. \tag{22}$$

При цьому $\big|v_k(x)\big| \le 1$ і $v_k(x) \to 1$ при кожному $x \in S$, а тому при достатньо малих $r > 0$ має місце збіжність

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\int\limits_{\Phi_{B_r}S}\hat{v}_k \cdot \operatorname{div}\mathbf{Z}\, d\mu = \frac{1}{\lambda_m(B_r)}\int\limits_{\Phi_{B_r}S}\operatorname{div}\mathbf{Z}\, d\mu.$$

Крок 4. Нехай $C = \|\operatorname{div}\mathbf{Z}\|_{L_\infty}$. За теоремою Віталі – Лебега має місце рівномірна по r збіжність

$$\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\int\limits_{\Phi_{B_r}A_n}|\operatorname{div}\mathbf{Z}|\, d\mu \le C\sigma_r(A_n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Якщо $k > n$, то з побудови послідовності $\{v_k\}$ випливає нерівність

$$\left|\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\int\limits_{\Phi_{B_r}S}(\hat{v}_n-\hat{v}_k)\operatorname{div}\mathbf{Z}\,d\mu\right|\leq C\sigma_r(A_n),$$

а з нерівності

$$\left|\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\int\limits_{\Phi_{B_r}S}\hat{v}_k\operatorname{div}\mathbf{Z}\,d\mu+\int\limits_S\mathbf{Z}v_k\,d\sigma\right|\leq$$

$$\leq C\sigma_r(A_n)+\left|\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\int\limits_{\Phi_{B_r}S}\hat{v}_n\operatorname{div}\mathbf{Z}\,d\mu+\int\limits_S\mathbf{Z}v_n\,d\sigma\right|+\left|\int\limits_S\mathbf{Z}v_k\,d\sigma-\int\limits_S\mathbf{Z}v_n\,d\sigma\right|$$

і збіжності (22) — рівномірність по n такої збіжності при $r\to 0$:

$$\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\int\limits_{\Phi_{B_r}S}\hat{v}_n\operatorname{div}\mathbf{Z}\,d\mu\longrightarrow-\int\limits_S\mathbf{Z}v_n\,d\sigma.$$

Тепер на підставі класичної теореми аналізу приходимо до висновку про існування і рівність повторних границь:

$$\lim_{r\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\int\limits_{\Phi_{B_r}S}\hat{v}_n\operatorname{div}\mathbf{Z}\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\lim_{r\to 0}\left(-\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\int\limits_{\Phi_{B_r}S}\mathbf{Z}\hat{v}_n\,d\mu\right),$$

звідки випливає рівність (19), рівносильна (18). При цьому $\int\limits_S\operatorname{div}\mathbf{Z}\,d\mu_\omega$ трактується у сенсі означення 1.

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** При $m = 0$ з доведення теореми випливає формула Гаусса – Остроградського

$$\int\limits_{\partial S}\langle\alpha,\mathbf{W_0}\rangle\,d\mu_\alpha=\int\limits_S\operatorname{div}\mathbf{W_0}\,d\mu,$$

де S — область в M, $\operatorname{div}\mathbf{W_0}\in L_1(M,\mu)$ (порівн. з [4]).

***Зауваження* 2.** У випадку (нескінченновимірного) ріманового многовиду M (див., наприклад, [14]) можна розглядати „нормальний полівектор” $\vec{\mathbf{n}}=\vec{\mathbf{n}}_S=\mathbf{n_1}\wedge\mathbf{n_2}\wedge\ldots\wedge\mathbf{n_m}$ до поверхні S, де для кожної точки $x\in S$ вектори $\mathbf{n_1}(x),\mathbf{n_2}(x)\ldots\mathbf{n_m}(x)$ утворюють ортонормований базис простору $T_xM\ominus T_xS$. Полівектор $\vec{\mathbf{n}}$ породжує асоційовану форму до S за принципом $\omega_{\vec{\mathbf{n}}}(\mathbf{Y_1},\ldots\mathbf{Y_m})=\big(\vec{\mathbf{n}}(\cdot),\vec{\mathbf{Y}}(\cdot)\big)=\det\big(\mathbf{n_i}(\cdot),\mathbf{Y_j}(\cdot)\big)$. Якщо $\mathbf{n}_\partial$ — таке векторне поле на M, що у кожній точці $x\in\partial S$ вектор $\mathbf{n}_\partial(x)$ є нормованим вектором в $T_xS\ominus T_x(\partial S)$, то формула (18) набирає вигляду

$$\int\limits_{\partial S}\langle\mathbf{n}_\partial\wedge\vec{\mathbf{n}},\vec{\mathbf{W}}\rangle\,d\mu_{\mathbf{n}_\partial\wedge\vec{\mathbf{n}}}=\int\limits_S\langle\vec{\mathbf{n}},\operatorname{div}\vec{\mathbf{W}}\rangle\,d\mu_{\vec{\mathbf{n}}}$$

(тут $\mu_{\vec{\mathbf{n}}}:=\mu_{\omega_{\vec{\mathbf{n}}}}$).

Література

1. А. В. Скороход, *Интегрирование в гильбертовом пространстве*, Наука, Москва (1975).
2. Х.-С. Го, *Гауссовские меры в банаховых пространствах*, Мир, Москва (1979).
3. A. V. Uglanov, *Integration on infinite-dimensional surfaces and its applications*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2000).
4. Ю. В. Богданский, *Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса – Остроградского*, Укр. мат. журн., **64**, № 10, 1299 – 1313 (2012).
5. Ю. В. Богданский, *Формула Гаусса – Остроградского в L_2-версии. Приложение к задаче Дирихле*, Укр. мат. журн., **70**, № 5, 611 – 624 (2018).
6. Н. В. Смородина, *Формула Гаусса – Остроградского для пространства конфигураций*, Теория вероятностей и ее применения, **35**, № 4, 727 – 739 (1990).
7. D. L. Finkelshtein, Yu. G. Kondratiev, A. Yu. Konstantinov, M. Rockner, *Gauss formula and symmetric extensions of Laplacian on configuration spaces*, Infinite Dimens. Anal., Quantum Probab. and Relat. Top., **4**, № 4, 489 – 509 (2001).
8. Э. Ю. Шамарова, Н. Н. Шамаров, *Дифференциальные формы на локально выпуклых пространствах и формула Стокса*, Изв. вузов. Математика, № 8, 84 – 97 (2016).
9. О. Г. Смолянов, *Потоки де Рама и формула Стокса в гильбертовом пространстве*, Докл. АН СССР, **286**, № 3, 554 – 558 (1986).
10. Ю. В. Богданский, Е. В. Моравецкая, *Поверхностные меры на банаховых многообразиях с равномерной структурой*, Укр. мат. журн., **69**, № 8, 1030 – 1048 (2017).
11. Ю. В. Богданский, Е. В. Моравецкая, *Транзитивность поверхностных мер на банаховых многообразиях с равномерной структурой*, Укр. мат. журн., **69**, № 10, 1299 – 1309 (2017).
12. С. Ленг, *Введение в теорию дифференцируемых многообразий*, Мир, Москва (1967).
13. Ю. Л. Далецкий, Я. И. Белопольская, *Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия*, Вища шк., Киев (1989).
14. Ю. В. Богданский, А. Ю. Потапенко, *Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле. I*, Укр. мат. журн., **68**, № 7, 897 – 907 (2016).
15. R. Fry, S. McManus, *Smooth bump functions and the geometry of Banach spaces. A brief survey*, Exposit. Math., **20**, № 2, 143 – 183 (2002).
16. D. H. Fremlin, *Measurable functions and almost continuous functions*, Manuscripta Math., **33**, № 3-4, 387 – 405 (1981).

Одержано 05.01.20,
після доопрацювання — 23.06.20