DOI: 10.37863/umzh.v72i8.2300

УДК 517.9

Т. О. Комлєва, А. В. Плотніков (Одес. держ. акад. буд-ва та архітектури)

ОДНА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОЇ ШВИДКОДІЇ ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ КЕРОВАНОЇ БАГАТОЗНАЧНОЇ СИСТЕМИ

We consider the time-optimal control problem for a set-valued linear control system in the case where a section of the solution of the system coincides with a target set. For this problem, we obtain the solvability conditions as well as the optimal time and optimal controls. The results are illustrated by model examples.

Розглядається задача оптимальної швидкодії для лінійної керованої багатозначної системи у випадку, коли переріз розв'язку цієї системи збігається з цільовою множиною. Отримано умови розв'язності даної задачі, а також оптимальний час та оптимальні керування. Результати проілюстровано на модельних прикладах.

1. Вступ. У 1969 р. F. S. de Blasi та F. Iervolino розглянули багатозначні диференціальні рівняння з похідною Хукухари [1]. Після цього багато авторів досліджували властивості розв'язків багатозначних диференціальних рівнянь [2 – 11], багатозначних інтегро-диференціальних і інтегральних рівнянь [12 – 18], багатозначних імпульсних рівнянь [19 – 22], багатозначних дискретних систем [23 – 25], а також багатозначних диференціальних включень [2, 22, 26, 27]. Багатозначні рівняння широко застосовуються при дослідженні звичайних диференціальних (інтегральних, імпульсних та інших) включень [2, 6, 19, 20, 28] і нечітких диференціальних (інтегральних, імпульсних та інших) рівнянь і включень [3, 29 – 35]. Останнім часом інтенсивно досліджувалися багатозначні та нечіткі системи керування [36 – 53], тобто системи, в яких поведінка об'єкта описується керованими багатозначними або нечіткими рівняннями.

У даній статті розглянуто одну задачу оптимальної швидкодії для лінійної багатозначної керованої системи й отримано умови існування розв'язку для такої задачі, а також оптимальний час та оптимальні керування. Результати проілюстровано на модельних прикладах.

2. Основні означення і позначення. Нехай $\mathrm{conv}(R^n)$ — простір непорожніх, опуклих, компактних підмножин простору R^n з метрикою Гаусдорфа

$$h(A, B) = \min\{r \geq 0 \colon A \subset B + B_r(0),\ \ B \subset A + B_r(0)\},$$

де $A, B \in \mathrm{conv}(R^n),\ B_r(c) = \{x \in R^n : \|x - c\| \leq r\}$.

Крім звичайних теоретико-множинних операцій розглянемо у просторі $\mathrm{conv}(R^n)$ ще дві операції: суму множин і добуток скаляра на множину:

$$A + B = \{a + b \colon a \in A,\ b \in B\} \qquad \text{та} \qquad \lambda A = \{\lambda a \colon a \in A,\ \lambda \in R\}.$$

Справджуються такі основні властивості [2, 3]:

1) $(\mathrm{conv}(R^n), h)$ — повний метричний простір,

2) $h(A + C, B + C) = h(A, B)$,

3) $h(\lambda A, \lambda B) = |\lambda| h(A, B)$ для всіх $A, B, C \in \mathrm{conv}(R^n)$ і $\lambda \in R$.

Однак простір $\mathrm{conv}(R^n)$ не є лінійним простором щодо наведених операцій, оскільки в загальному випадку неможливо ввести поняття протилежного елемента для $A \in \mathrm{conv}(R^n)$, тобто в загальному випадку $A+(-1)A \neq \{0\}$, хоча якщо A належить до R^n, то для нього протилежний елемент існує. Відсутність протилежного елемента у просторі $\mathrm{conv}(R^n)$ призводить до неоднозначного введення поняття різниці множин і умов її існування.

У даній статті ми будемо використовувати різницю Хукухари [54].

Означення 1 [54]. *Нехай $X, Y \in \mathrm{conv}(R^n)$. Множина $Z \in \mathrm{conv}(R^n)$ така, що $X = Y+Z$, називається різницею Хукухари множин X, Y і позначається $X \overset{H}{\text{---}} Y$.*

***Зауваження* 1.** Різниця Хукухари є окремим випадком різниці Мінковського, коли Y повністю вимітає множину X [2, 3, 19].

***Зауваження* 2.** Очевидно, що різниця Хукухари двох множин може не існувати. Наприклад, якщо $A = \{a \in R^2 : \|a\| \leq 1\},\ B = \{b \in R^2 : |b_i| \leq 1,\ i = 1, 2\}$, то різниця Хукухари $A \overset{H}{\text{---}} B$ не існує.

Так само, якщо $A, B \in \mathrm{conv}(R^n)$ і $\mathrm{diam}(A) < \mathrm{diam}(B)$, то різниця Хукухари $A \overset{H}{-} B$ не існує. Наприклад, якщо $A = B = \{a \in R^2 : \|a\| \leq 1\}$, то різниця Хукухари $A \overset{H}{-} tB$ не існує для всіх $t > 1$.

Наведемо основні властивості різниці Хукухари [2, 3, 19]:

1) якщо різниця Хукухари двох множин $A \overset{H}{\text{---}} B$ існує, то вона єдина,
2) $A \overset{H}{\text{---}} A = \{0\}$ для всіх $A \in \mathrm{conv}(R^n)$,
3) $(A + B) \overset{H}{\text{---}} B = A$ для всіх $A, B \in \mathrm{conv}(R^n)$.

Означення 2 [2, 3, 19, 54]. *Багатозначне відображення $X(\cdot) : R^1 \to \mathrm{conv}(R^n)$ має похідну за Хукухарою в точці $t_0 \in R^1$, якщо існує множина $D_H X(t_0) \in \mathrm{conv}(R^n)$ така, що границі*

$$\lim_{\Delta \to 0_+} \Delta^{-1}\big(X(t_0 + \Delta) \overset{H}{\text{---}} X(t_0)\big), \qquad \lim_{\Delta \to 0_+} \Delta^{-1}\big(X(t_0) \overset{H}{\text{---}} X(t_0 - \Delta)\big)$$

існують та рівні $D_H X(t_0)$.

Відомо, що якщо відображення $X(\cdot)$ диференційовне за Хукухарою на сегменті $[a, b]$, то функція $t \to \mathrm{diam}(X(t)),\ t \in [a, b]$, є неспадною на цьому сегменті.

***Зауваження* 3.** Властивості похідної за Хукухарою розглянуто докладніше в [2, 3, 19, 54].

3. Багатозначна система керування. Нехай поведінка об'єкта описується лінійним керованим диференціальним рівнянням з похідною Хукухари

$$D_H X(t) = v(t)X(t) + u(t), \quad X(0) = X_0, \tag{1}$$

де $X : R_+ \to \mathrm{conv}(R^n)$ — багатозначне відображення; $X_0 \in \mathrm{conv}(R^n)$ — початкова множина; $D_H X(t)$ — похідна Хукухари від багатозначного відображення $X(\cdot)$ в момент часу $t \in R^n$; $v(\cdot),\ u(\cdot)$ — допустимі керування, тобто вимірні за Лебегом функції, такі, що $v(t) \in [0, 1]$ та $|u_i(t)| \leq 1,\ i = \overline{1, n}$, для всіх $t \in R_+$.

Як відомо з [19, 20], для будь-яких допустимих керувань $v(\cdot)$ і $u(\cdot)$ багатозначний розв'язок $X(\cdot, v, u)$ системи (1) існує для всіх $t \geq 0$ і його можна записати у вигляді

$$X(t, v, u) = e^{\int_0^t v(s)\, ds} X_0 + e^{\int_0^t v(s)\, ds} \int\limits_0^t e^{-\int_0^s v(\tau) d\tau} u(s)\, ds. \tag{2}$$

Зрозуміло, що рівняння (2) можна записати у вигляді суми багатозначного відображення $F(t, X_0, v)$ і векторної функції $g(t, v, u)$, тобто

$$X(t, v, u) = F(t, X_0, v) + g(t, v, u),$$

де $F(t, X_0, v) = e^{\int_0^t v(s)\,ds} X_0,\ g(t, v, u) = e^{\int_0^t v(s)\,ds} \displaystyle\int_0^t e^{-\int_0^s v(\tau)d\tau} u(s)\,ds.$

Отже, початкова множина X_0 визначає „форму” перерізу багатозначного відображення $X(t, v, u)$ в момент часу t, а допустиме керування $v(\cdot)$ — зміну його розміру. Зазначимо, що багатозначне відображення $F(t, X_0, v)$ має такі властивості:

1) $F(0, X_0, v) = X_0$,

2) для будь-якого $t > 0$ множина $F(t, X_0, v)$ гомотетична початковій множині X_0 зі сталою $k(t) = e^{\int_0^t v(s)\,ds} \geq 1$,

3) якщо $v(t) \equiv 0$ для всіх $t \geq 0$, то $F(t, X_0, v) = X_0$.

Так само очевидно, що векторна функція $g(t, v, u)$, яка залежить від допустимих керувань $v(\cdot)$ і $u(\cdot)$, задає додаткові зсуви перерізу багатозначного відображення $X(t, v, u)$ в момент часу $t > 0$ відносно початкової множини X_0.

Нехай задано деяку множину $X_K \in \mathrm{conv}(R^n)$ (цільову множину).

Розглянемо таку задачу оптимального керування: *знайти мінімальний час* $T^* > 0$ *і допустимі керування* $v^*(\cdot)$, $u^*(\cdot)$ *такі, що багатозначний розв'язок системи* (1) *задовольняє умову* $X(T^*, v^*, u^*) = X_K$.

***Зауваження* 4.** З огляду на наведені вище властивості розв'язку системи (1) можна сформулювати необхідну умову існування розв'язку даної задачі оптимального керування: множина X_K повинна бути гомотетична множині X_0 з коефіцієнтом $a \geq 1$, тобто повинні існувати такі $a \geq 1$ і $b \in R^n$, що $X_K = aX_0 + b$.

Якщо ця умова не виконується, то розглянута задача оптимального керування розв'язку не має.

Спочатку розглянемо випадок, коли $X_0 = B_c(d)$. Тоді, згідно із зауваженням 4, цільова множина $X_K = aX_0 + b = aB_c(d) + b = B_{ac}(ad + b)$.

***Зауваження* 5.** Якщо $a = 1,\ b = 0$, то $X_K = B_c(d) = X_0$. Отже, початкова множина X_0 і цільова множина X_K збігаються, тобто в цьому випадку дана задача оптимального керування не має сенсу.

Далі розглянемо два можливих випадки:

1) $a = 1,\ b \in R^n \setminus \{0\}$,

2) $a > 1,\ b \in R^n$.

Випадок 1: $a = 1,\ b \neq 0$. Тоді $X_K = B_c(d + b)$.

Отже, $X_K = X_0 + b = B_c(d) + b$. На підставі властивості 3 розв'язку системи (1) керування $v^*(t) \equiv 0$. Тоді система (1) набирає вигляду

$$D_H X(t) = u(t), \qquad X(0) = B_c(d),$$

і її розв'язок можна записати у вигляді

$$X(t, v, u) = B_c(d) + \int\limits_0^t u(s)\,ds.$$

Отже, необхідно знайти деяке мінімальне T^* і припустиме керування $u^*(\cdot)$ такі, що

$$X(T^*, v^*, u^*) = B_c(d) + \int\limits_0^{T^*} u^*(s)\, ds = B_c(d) + b,$$

тобто

$$\int\limits_0^{T^*} u_i^*(s)\, ds = b_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Звідси $T^* = \max_{i=\overline{1,n}} |b_i|$, а оптимальне керування $u^*(\cdot) = \big(u_1^*(\cdot), \ldots, u_n^*(\cdot)\big)^T$ таке, що $|u_i^*(t)| \leq$ $\leq 1,\ i = \overline{1, n}$, та існує хоча б одне $j \in \{1, \ldots, n\}$ таке, що $|u_j^*(t)| \equiv 1$ для всіх $t \in [0, T^*]$.

Очевидно, що у класі сталих функцій таким оптимальним керуванням буде таке $u^*(\cdot) =$ $= (u_1^*, \ldots, u_n^*)^T$, що $u_i^* \equiv \dfrac{b_i}{b_{\max}}$, $i = \overline{1, n}$, де $b_{\max} = \max_{i=\overline{1,n}} |b_i|$.

Випадок 2: $a > 1,\ b \in R^n$. Тоді $X_K = B_{ac}(ad + b)$, тобто $X_K = aX_0 + b$.

Візьмемо $v(t) \equiv 1$, оскільки в цьому випадку таке керування забезпечує максимально стрімке зростання діаметра перерізу розв'язку системи (1) та максимальний зсув його центра у просторі R^n.

Тоді система (1) набирає вигляду

$$D_H X(t) = X(t) + u(t), \qquad X(0) = B_c(d), \tag{3}$$

і її розв'язок можна записати у вигляді

$$X(t, v, u) = e^t B_c(d) + e^t \int\limits_0^t e^{-s} u(s)\, ds \tag{4}$$

або

$$X(t, v, u) = B_{ce^t}(de^t) + e^t \int\limits_0^t e^{-s} u(s)\, ds. \tag{5}$$

Очевидно, що в момент часу $T_1 = \ln(a)$ діаметр перерізу розв'язку $X(T_1, v, u)$ буде дорівнювати довжині діаметра цільової множини X_K.

Також із (5) маємо, що центр розв'язку системи (3) буде рухатись у просторі R^n за траєкторією

$$x(t, v, u) = de^t + e^t \int\limits_0^t e^{-s} u(s)\, ds. \tag{6}$$

Тоді при виборі оптимального керування $u^*(\cdot)$ в деякий момент часу T_2 повинна виконуватись умова

$$de^{T_2} + e^{T_2} \int\limits_0^{T_2} e^{-s} u^*(s)\, ds = ad + b. \tag{7}$$

Отже, можливі три випадки: a) $T_1 = T_2$; b) $T_1 > T_2$; c) $T_1 < T_2$.

Розглянемо послідовно всі ці випадки.

a) $T_1 = T_2 = T^* = \ln(a)$. З (4) і (7) маємо

$$ce^{T_2} = ce^{T_1} = ce^{T^*} = ac, \qquad ad + a\int\limits_0^{T^*} e^{-s}u^*(s)\,ds = ad + b,$$

тобто існує таке керування $u^*(\cdot) = \big(u_1^*(\cdot), \ldots, u_n^*(\cdot)\big)^T$, що

$$\int\limits_0^{T^*} e^{-s}u_i^*(s)\,ds = \frac{b_i}{a}, \quad |u_i^*(t)| \le 1$$

для всіх $t \in [0, T^*]$ та $i = \overline{1,n}$.

Оскільки $u^*(\cdot)$ — оптимальне керування, то існує хоча б одне $j \in \{1, \ldots, n\}$ таке, що $|u_j^*(t)| \equiv 1$ і $|b_j| = \max_{i=\overline{1,n}} |b_i|$. Відтак $\int_0^{T^*} e^{-s}ds = \dfrac{|b_j|}{a}$, тобто $a - 1 = |b_j| = \max_{i=\overline{1,n}} |b_i|$.

Також зазначимо, що оптимальним керуванням $u^*(\cdot) = \big(u_1^*(\cdot), \ldots, u_n^*(\cdot)\big)^T$ з класу сталих функцій буде $u_i^*(t) = \dfrac{b_i}{b_{\max}}$ для всіх $t \in [0, T^*]$ та $i = \overline{1,n}$.

b) $T_1 > T_2$. З (4) і (7) маємо

$$ce^{T_2} < ce^{T_1} = ac, \qquad de^{T_2} + e^{T_2}\int\limits_0^{T_2} e^{-s}u^*(s)\,ds = ad + b,$$

тобто $a - 1 > \max_{i=\overline{1,n}} |b_i|$.

Отже, при виборі оптимального керування $u^*(\cdot)$ переведення центра перерізу розв'язку системи, згідно з рівнянням (6), у центр цільової множини X_K відбудеться за час $T_2 < T_1$. Тим самим переріз розв'язку системи в момент часу T_2 буде мати радіус, менший за радіус цільової множини, тобто $X(T_2, v, u^*) \subset X_K$.

Тому в цьому випадку оптимальними будуть час $T^* = T_1 = \ln(a)$, керування $v^*(t) \equiv 1$ і $u^*(\cdot) = \big(u_1^*(\cdot), \ldots, u_n^*(\cdot)\big)^T$ таке, що $|u_i^*(t)| \le 1$ і $\int_0^{T^*} e^{-s}u_i^*(s)\,ds = \dfrac{b_i}{a}$ для всіх $t \in [0, T^*]$ та $i = \overline{1,n}$. Наприклад, таким оптимальним керуванням у класі сталих функцій буде таке $u^*(\cdot) = (u_1^*, \ldots, u_n^*)^T$, що $u_i^* = \dfrac{b_i}{a-1}$, $i = \overline{1,n}$.

c) $T_1 < T_2$. З (4) та (7) маємо

$$ce^{T_2} > ce^{T_1} = ac, \qquad de^{T_2} + e^{T_2}\int\limits_0^{T_2} e^{-s}u^*(s)\,ds = ad + b,$$

тобто $a - 1 < \max_{i=\overline{1,n}} |b_i|$.

Отже, при виборі оптимального керування $u^*(\cdot)$ переведення центра перерізу розв'язку системи, згідно з рівнянням (6), у центр цільової множини X_K відбудеться за час $T_2 > T_1$.

Тим самим переріз розв'язку в момент часу T_2 буде мати радіус, більший за радіус цільової множини, тобто $X_K \subset X(T_2, v^*, u^*)$.

Тоді в даному випадку не можна вибирати $v^*(t) \equiv 1$ на проміжку $[0, T_2]$, тобто ми повинні вибрати таке $v^*(\cdot)$, що $0 \leq v^*(t) \leq 1$ для всіх $t \geq 0$ і $v^*(t) \not\equiv 1$. Також зазначимо, що в цьому випадку час T переведення центра перерізу розв'язку системи (5) у центр цільової множини X_K буде більшим за T_2.

Запишемо таку систему:

$$e^{\int_0^T v^*(s)\,ds} = a,$$

$$de^{\int_0^T v^*(s)\,ds} + e^{\int_0^T v^*(s)\,ds} \int\limits_0^T e^{-\int_0^t v^*(s)\,ds} u^*(t)\,dt = ad + b.$$

Звідси маємо

$$e^{\int_0^T v^*(s)\,ds} = a, \qquad \int\limits_0^T e^{-\int_0^t v^*(s)\,ds} u^*(t)\,dt = \frac{b}{a}.$$

Оскільки $|u_j^*(t)| \equiv 1$ і $|b_j| = \max_{i=\overline{1,n}} |b_i|$ для деякого $j \in \{1, \ldots, n\}$, то

$$e^{\int_0^{T^*} v^*(s)\,ds} = a, \qquad \int\limits_0^{T^*} e^{-\int_0^t v^*(s)\,ds} dt = \frac{\max_{i=\overline{1,n}} |b_i|}{a}.$$

Якщо $v^*(t) = v^* = \text{const}$, то

$$e^{T^* v^*} = a, \qquad \int\limits_0^{T^*} e^{-tv^*} dt = \frac{\max_{i=\overline{1,n}} |b_i|}{a}.$$

Отже,

$$T^* = \frac{\ln(a) \max_{i=\overline{1,n}} |b_i|}{a-1} \qquad \text{та} \qquad v^* = \frac{a-1}{\max_{i=\overline{1,n}} |b_i|}. \tag{8}$$

Тоді оптимальне керування $u^*(\cdot) = \big(u_1^*(\cdot), \ldots, u_n^*(\cdot)\big)^T$ повинно задовольняти умову

$$|u_i^*(t)| \leq 1, \qquad \int\limits_0^{T^*} e^{-tv^*} u_i^*(t)\,dt = \frac{b_i}{a}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Наприклад, таким оптимальним керуванням у класі сталих функцій буде таке $u^*(\cdot) = (u_1^*, \ldots$ $\ldots, u_n^*)^T$, що $u_i^* = \dfrac{b_i}{b_{\max}}$, $i = \overline{1,n}$.

Проілюструємо отримані результати на прикладах.

***Приклад* 1.** Нехай поведінка системи описується рівнянням (1), де $X_0 = B_c(d)$, $X_K =$ $= B_c(g)$, $c = \dfrac{2}{7}$, $d = \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)^T$, $g = \left(\dfrac{4}{3}, 2\right)^T$.

Очевидно, що множина X_K гомотетична початковій множині X_0, тобто $X_K = aX_0 + b$ і $a = 1$, $b = \left(\dfrac{11}{6}, 1\right)^T$. Тоді $T^* = \max\left\{\dfrac{11}{6}, 1\right\} = \dfrac{11}{6}$, $v^* \equiv 0$, $u^* = \left(1, \dfrac{6}{11}\right)^T$ (див. рис. 1).

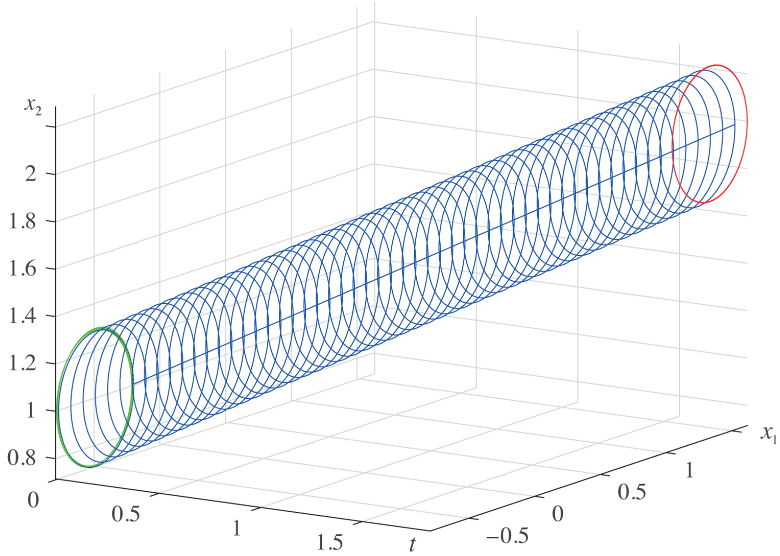

Рис. 1. $X(t, v^*, u^*)$, $t \in \left[0, \dfrac{11}{6}\right]$.

Приклад **2.** Нехай поведінка системи описується рівнянням (1), де $X_0 = B_c(d)$, $X_K = B_f(g)$, $c = \dfrac{2}{7}$, $f = \dfrac{3}{2}$, $d = \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)^T$, $g = \left(\dfrac{4}{3}, 2\right)^T$.

Очевидно, що множина X_K гомотетична початковій множині X_0, тобто $X_K = aX_0 + b$ і $a = \dfrac{21}{4}$, $b = \left(\dfrac{95}{24}, -\dfrac{13}{4}\right)^T$. Оскільки $a > 1$ і $a - 1 = \dfrac{17}{4}$,

$$\max\left\{|b_1|, |b_2|\right\} = \max\left\{\left|\frac{95}{24}\right|, \left|-\frac{13}{4}\right|\right\} = \frac{95}{24},$$

то $a - 1 > \max\left\{|b_1|, |b_2|\right\}$.

Для $v^* \equiv 1$ з (4) і (7) маємо $T_1 = \ln(a) = \ln\left(\dfrac{21}{4}\right)$, $T_2 = \ln\left(\dfrac{14}{3}\right)$. Оскільки $T_1 > T_2$, то $e^{T_1} > e^{T_2}$. Отже, якщо взяти керування $u'(\cdot)$, яке максимально швидко переведе центр початкової множини X_0 у центр цільової множини X_K, то $X(T_2, v^*, u') \subset X_K$, але $X(T_2, v^*, u') \neq X_K$ (див. рис. 2).

Тому оптимальним часом буде $T^* = T_1 = \ln\left(\dfrac{21}{4}\right)$, а оптимальне керування $u^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot))^T$ повинно задовольняти умову $|u_i^*(t)| \leq 1$ і $\displaystyle\int_0^{T_1} e^{-s} u_i^*(s)\, ds = \frac{b_i}{a}$ для всіх $t \in [0, T_1]$ та $i = 1, 2$.

Наприклад, оптимальним керуванням $u^*(\cdot) = \left(u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot)\right)^T$ у класі сталих функцій буде $u_1^* \equiv \dfrac{95}{102}$, $u_2^* \equiv -\dfrac{13}{17}$ (див. рис. 3).

Приклад **3.** Нехай поведінка системи описується рівнянням (1), де $X_0 = B_c(d)$, $X_K = B_f(g)$, $c = \dfrac{2}{7}$, $f = 1$, $d = \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)^T$, $g = \left(\dfrac{4}{3}, 2\right)^T$.

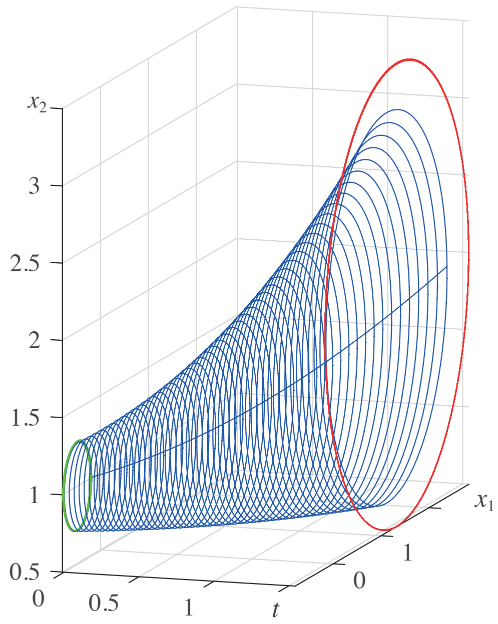

Рис. 2. $X(t, v^*, u')$, $t \in \left[0, \ln\left(\frac{14}{3}\right)\right]$.

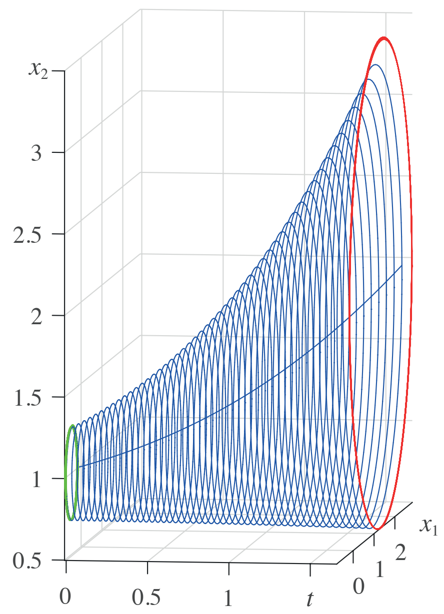

Рис. 3. $X(t, v^*, u^*)$, $t \in \left[0, \ln\left(\frac{21}{4}\right)\right]$.

Очевидно, що множина X_K гомотетична початковій множині X_0, тобто $X_K = aX_0 + b$ і $a = \frac{7}{2}$, $b = \left(\frac{37}{12}, -\frac{3}{2}\right)^T$. Оскільки $a > 1$ та $a - 1 = \frac{5}{2}$,

$$\max\left\{|b_1|, |b_2|\right\} = \max\left\{\left|\frac{37}{12}\right|, \left|-\frac{3}{2}\right|\right\} = \frac{37}{12},$$

то $\frac{5}{2} = a - 1 < \max\left\{|b_1|, |b_2|\right\} = \frac{37}{12}$.

Для $v' \equiv 1$ з (4) і (7) маємо $T_1 = \ln(a) = \ln\left(\frac{7}{2}\right)$, $T_2 = \ln(5)$. Оскільки $T_2 > T_1$, то $e^{T_2} > > e^{T_1}$. Отже, якщо взяти керування $u'(\cdot)$, яке максимально швидко переведе центр початкової множини X_0 в центр цільової множини X_K, то $X_K \subset X(T_2, v', u')$, але $X(T_2, v', u') \neq X_K$ (див. рис. 4).

Отже, не можна вибирати $v(t) \equiv 1$ для всіх $t \geq 0$. Тоді з (8), (9) маємо $v^* \equiv \frac{30}{37}$, $u_1^* \equiv 1$, $u_2^* \equiv -\frac{18}{37}$, $T^* \equiv \frac{37}{30} \ln\left(\frac{7}{2}\right)$ (див. рис. 5).

***Зауваження* 6.** Якщо цільова множина X_K гомотетична початковій множині X_0, тобто $X_K = aX_0 + b$ і сфери S_K, S_0 описані навколо множин (або вписані у множини) X_K, X_0 відповідно, то відповідні кулі B_K і B_0 гомотетичні та $B_K = aB_0 + b$.

***Зауваження* 7.** Якщо множини $X_0 \in \mathrm{conv}(R^n)$ і $Y_0 \in \mathrm{conv}(R^n)$ такі, що $X_0 \subset Y_0$, то для будь-яких допустимих керувань $v(\cdot)$ і $u(\cdot)$ багатозначні розв'язки $X(\cdot, v, u, X_0)$ і $X(\cdot, v, u, Y_0)$ системи (1) задовольняють умову $X(t, v, u, X_0) \subset X(t, v, u, Y_0)$ для всіх $t \geq 0$ [19, 20].

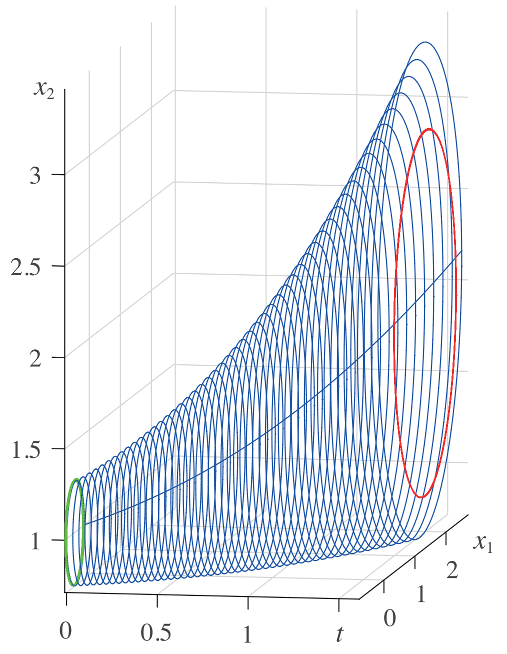

Рис. 4. $X(t, v', u')$, $t \in [0, \ln(5)]$.

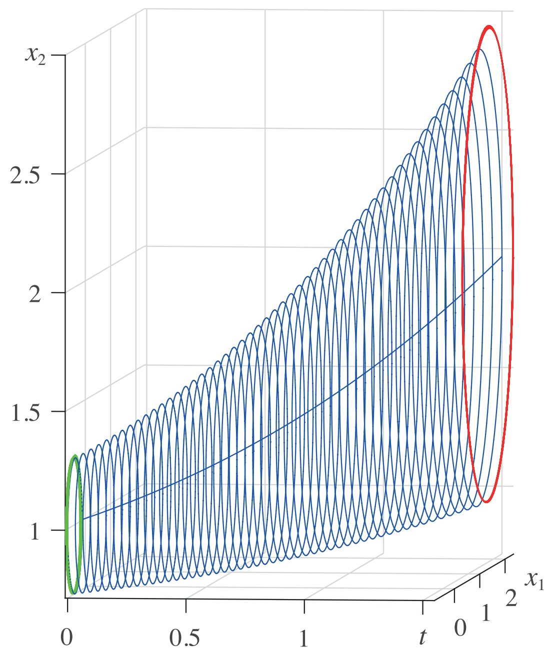

Рис. 5. $X(t, v^*, u^*)$, $t \in \left[0, \frac{37}{30}\ln\left(\frac{7}{2}\right)\right]$.

З огляду на всі попередні міркування сформулюємо таку теорему.

Теорема 1. *Якщо множини X_0 і X_K є гомотетичними з коефіцієнтами $a \geq 1$ і $b \in R^n$, то відповідну задачу оптимального керування можна розв'язати, причому оптимальним часом T^* і оптимальними керуваннями v^*, u^* в класі сталих функцій будуть*

$$T^* = \begin{cases} b_{\max}, & a = 1, \\ \ln(a), & a > 1, \quad a - 1 \geq b_{\max}, \\ \dfrac{\ln(a) b_{\max}}{a-1}, & a > 1, \quad a - 1 < b_{\max}, \end{cases}$$

$$v^* = \begin{cases} 0, & a = 1, \\ 1, & a > 1, \quad a - 1 \geq b_{\max}, \\ \dfrac{a-1}{b_{\max}}, & a > 1, \quad a - 1 < b_{\max}, \end{cases}$$

$$u^* = \begin{cases} \dfrac{b_i}{b_{\max}}, & a = 1, \\ \dfrac{b_i}{a-1}, & a > 1, \quad a - 1 \geq b_{\max}, \\ \dfrac{b_i}{b_{\max}}, & a > 1, \quad a - 1 < b_{\max}, \end{cases}$$

де $b_{\max} = \max_{i=\overline{1,n}} |b_i|$.

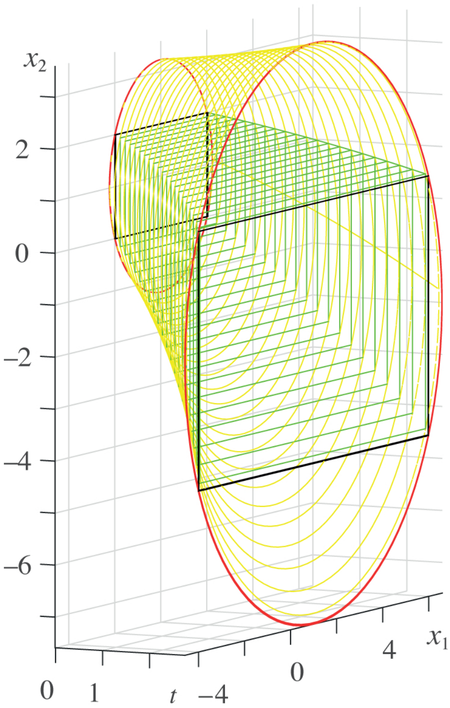

Рис. 6. $X(t, v^*, u^*)$, $t \in \left[0, 3\ln\left(\frac{5}{2}\right)\right]$.

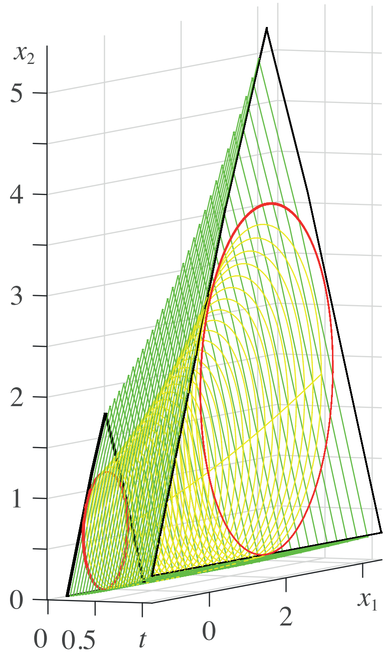

Рис. 7. $X(t, v^*, u^*)$, $t \in [0, \ln(3)]$.

Проілюструємо цю теорему на деяких прикладах.

***Приклад* 4.** Нехай поведінка системи описується рівнянням (1), де $X_0 = \{(x_1, x_2)^T \mid |x_1| \le 2,\ |x_2 - 1| \le 1\}$, $X_K = \{(x_1, x_2)^T \mid |x_1 - 1| \le 5,\ |x_2 + 2| \le 2{,}5\}$ — прямокутники.

Описаними колами B_0 і B_K відповідно будуть

$$B_0 = \left\{(x_1, x_2)^T \mid x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \le 5\right\},$$

$$B_K = \left\{(x_1, x_2)^T \mid (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 2)^2 \le 31{,}25\right\}.$$

Легко перевірити, що множина X_K гомотетична початковій множині X_0, тобто $X_K = aX_0 + b$ і $a = 2$, $b = (1, -4{,}5)^T$. Оскільки $a > 1$ і $a - 1 = 1$, $\max\{|b_1|, |b_2|\} = \max\{|1|, |-4{,}5|\} = 4{,}5$, то $1 = a - 1 < \max\{|b_1|, |b_2|\} = 4{,}5$.

Тоді з теореми 1 маємо $v^* \equiv \frac{1}{3}$, $u_1^* \equiv \frac{2}{9}$, $u_2^* \equiv -1$, $T^* = 3\ln\left(\frac{5}{2}\right)$ (див. рис. 6).

***Приклад* 5.** Нехай поведінка системи описується рівнянням (1), де X_0 — рівнобедрений трикутник з вершинами у точках $(0, \sqrt{3})$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$, X_K — рівнобедрений трикутник з вершинами у точках $(1{,}5; 2 + 3\sqrt{2})$, $(-1{,}5; -1)$, $(4{,}5; -1)$.

Відповідно, вписаними колами B_0 і B_K будуть

$$B_0 = \left\{(x_1, x_2)^T \,\middle|\, x_1^2 + \left(x_2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \le \frac{1}{3}\right\},$$

$$B_K = \left\{(x_1, x_2)^T \,\middle|\, \left(x_1 - \frac{3}{2}\right)^2 + (x_2 - 2)^2 \le 3\right\}.$$

Очевидно, що множина X_K гомотетична початковій множині X_0, тобто $X_K = aX_0 + b$ і $a = 3$, $b = \left(1{,}5; 2-\sqrt{3}\right)^T$. Оскільки $a > 1$ і $a-1 = 2$, $\max\left\{|b_1|, |b_2|\right\} = \max\left\{|1{,}5|, \left|2-\sqrt{3}\right|\right\} = 1{,}5$, то $2 = a - 1 > \max\{|b_1|, |b_2|\} = 1{,}5$.

Тоді з теореми 1 маємо $v^* \equiv 1$, $u_1^* \equiv \dfrac{3}{4}$, $u_2^* \equiv \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$, $T^* = \ln(3)$ (див. рис. 7).

Література

1. F. S. de Blasi, F. Iervolino, *Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso*, Boll. Unione Mat. Ital., **2**, № 4-5, 491 – 501 (1969).
2. В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк, *Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы*, АстроПринт, Одесса (1999).
3. А. В. Плотников, Н. В. Скрипник, *Дифференциальные уравнения с четкой и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы*, АстроПринт, Одесса (2009).
4. V. Lakshmikantham, T. Granna Bhaskar, J. Vasundhara Devi, *Theory of set differential equations in metric spaces*, Cambridge Sci. Publ. (2006).
5. A. A. Martynyuk, *Qualitative analysis of set-valued differential equations*, Springer Nature Switzerland AG, Birkhäuser, Cham (2019).
6. А. А. Толстоногов, *Дифференциальные включения в банаховом пространстве*, Наука, Новосибирск (1986).
7. Е. В. Очеретнюк, В. И. Слынько, *Оценки площади решений псевдолинейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары в пространстве* $\operatorname{conv}(R^2)$, Укр. мат. журн., **69**, № 2, 189 – 214 (2017).
8. A. V. Plotnikov, N. V. Skripnik, *An existence and uniqueness theorem to the Cauchy problem for generalised set differential equations*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A, Math. Anal., **20**, № 4, 433 – 445 (2013).
9. А. В. Плотников, Н. В. Скрипник, *Многозначные дифференциальные уравнения с обобщенной производной*, Укр. мат. журн., **65**, № 10, 1350 – 1362 (2013).
10. Н. В. Скрипник, *Схема ступенчатого усреднения для многозначных дифференциальных уравнений с обобщенной производной*, Нелінійні коливання, **20**, № 3, 391 – 400 (2017).
11. A. V. Plotnikov, T. A. Komleva, L. I. Plotnikova, *Averaging of a system of set-valued differential equations with the Hukuhara derivative*, J. Uncertain Systems, **13**, № 1, 3 – 13 (2019).
12. А. В. Плотников, А. В. Тумбрукаки, *Интегро-дифференциальные уравнения с многозначными траекториями*, Укр. мат. журн., **52**, № 3, 359 – 367 (2000).
13. А. В. Плотников, А. В. Тумбрукаки, *Интегро-дифференциальные включения с производной Хукухары*, Нелінійні коливання, **8**, № 1, 80 – 88 (2005).
14. Н. В. Скрипник, *Усреднение многозначных интегральных уравнений*, Нелінійні коливання, **16**, № 3, 408 – 415 (2013).
15. V. Babenko, *Numerical methods for solution of Volterra and Fredholm integral equations for functions with values in L-spaces*, Appl. Math. and Comput., **291**, 354 – 372 (2016).
16. V. Babenko, *Calculus and nonlinear integral equations for functions with values in L-spaces*, Anal. Math., **45**, № 4, 727 – 755 (2019).
17. A. V. Plotnikov, T. A. Komleva, I. V. Molchanyuk, *Existence and uniqueness theorem for set-valued Volterra – Hammerstein integral equations*, Asian-Eur. J. Math., **11**, № 3 (2018), 11 p.
18. A. V. Plotnikov, N. V. Skripnik, *Existence and uniqueness theorem for set integral equations*, J. Adv. Res. Dyn. and Control Syst., **5**, № 2, 65 – 72 (2013).
19. Н. А. Перестюк, В. А. Плотников, А. М. Самойленко, Н. В. Скрипник, *Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью*, Ин-т математики НАН Украины, Киев (2007).
20. N. A. Perestyuk, V. A. Plotnikov, A. M. Samoilenko, N. V. Skripnik, *Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities*, De Gruyter Stud. Math., **40**, Walter De Gruyter GmbH& Co, Berlin; Boston (2011).
21. Н. А. Перестюк, Н. В. Скрипник, *Усреднение импульсных многозначных систем*, Укр. мат. журн., **65**, № 1, 126 – 142 (2013).
22. Н. В. Скрипник, *Усреднение импульсных дифференциальных включений с производной Хукухары*, Нелінійні коливання, **10**, № 3, 416 – 432 (2007).

23. И. В. Атамась, В. И. Слынько, *Устойчивость неподвижных точек одного класса квазилинейных каскадов в пространстве* $\mathrm{conv}(R^n)$, Укр. мат. журн., **69**, № 8, 1166 – 1179 (2017).
24. Т. А. Комлева, Л. И. Плотникова, А. В. Плотников, *Одна многозначная дискретная система и ее свойства*, Укр. мат. журн., **70**, № 11, 1519 – 1524 (2018).
25. T. A. Komleva, L. I. Plotnikova, A. V. Plotnikov, *Partial averaging of discrete-time set-valued systems*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., **63**, № 4, 539 – 548 (2018).
26. Т. А. Комлева, А. В. Плотников, *Дифференциальные включения с производной Хукухары*, Нелінійні коливання, **10**, № 2, 229 – 246 (2007).
27. А. В. Плотников, *Усреднение дифференциальных включений с производной Хукухары*, Укр. мат. журн., **41**, № 1, 121 – 125 (1989).
28. Н. В. Плотникова, *Аппроксимация пучка решений линейных дифференциальных включений*, Нелінійні коливання, **9**, № 3, 386 – 400 (2006).
29. Н. В. Скрипник, *Периодические решения линейных дифференциальных включений с импульсами*, Укр. мат. журн., **60**, № 9, 1287 – 1296 (2008).
30. V. Lakshmikantham, R. N. Mohapatra, *Theory of fuzzy differential equations and inclusions*, Taylor & Francis, London (2003).
31. Н. А. Перестюк, Н. В. Скрипник, *Усреднение нечетких систем*, Укр. мат. журн., **70**, № 3, 412 – 428 (2018).
32. Т. А. Комлева, А. В. Плотников, Н. В. Скрипник, *Дифференциальные уравнения с многозначными решениями*, Укр. мат. журн., **60**, № 10, 1326 – 1337 (2008).
33. А. В. Плотников, Т. А. Комлева, *Усреднение нечетких дифференциальных уравнений на конечном промежутке*, Нелінійні коливання, **14**, № 4, 516 – 527 (2011).
34. A. V. Plotnikov, T. A. Komleva, *The full averaging of fuzzy integrodifferential equations*, J. Adv. Res. Dyn. and Control Syst., **4**, № 1, 48 – 59 (2012).
35. A. V. Plotnikov, T. A. Komleva, *Averaging of the fuzzy differential equations*, J. Uncertain Systems, **6**, № 1, 30 – 37 (2012).
36. А. В. Арсирий, А. В. Плотников, *Системы управления многозначными траекториями с многозначным критерием качества*, Укр. мат. журн., **61**, № 8, 1142 – 1147 (2009).
37. Т. А. Комлева, И. В. Молчанюк, Н. В. Скрипник, А. В. Плотников, *Одна линейная многозначная задача управления*, Дослідження в математиці і механіці, **24**, № 2(34), 45 – 66 (2019).
38. Т. А. Комлева, Л. И. Плотникова, А. В. Плотников, Н. В. Скрипник, *Усреднение нечетких управляемых систем*, Нелінійні коливання, **14**, № 3, 325 – 332 (2011).
39. А. В. Плотников, *Управляемые квазидифференциальные уравнения и их некоторые свойства*, Дифференц. уравнения, **34**, № 10, 1332 – 1336 (1998).
40. В. А. Плотников, О. Д. Кичмаренко, *Усреднение управляемых уравнений с производной Хукухары*, Нелінійні коливання, **9**, № 3, 376 – 385 (2006).
41. Y. Feng, L. Hua, *On the quasi-controllability of continuous-time dynamic fuzzy control systems*, Chaos, Solitons, Fractals, **30**, № 1, 177 – 188 (2006).
42. R. Jafari, S. Razvarz, A. Gegov, W. Yu, *Fuzzy control of uncertain nonlinear systems with numerical techniques: A survey*, Adv. Comput. Intell. Systems, UKCI 2019, **1043**, Springer, Cham (2020), p. 3 – 14.
43. R. Jafari, W. Yu, *Fuzzy control for uncertainty nonlinear systems with dual fuzzy equations*, J. Intell. Fuzzy Syst., **29**, 1229 – 1240 (2015).
44. S. Melliani, A. El Allaoui, L. S. Chadli, *Controlled fuzzy evolution equations*, Recent Adv. Intuition. Fuzzy Logic Systems, **372**, Springer, Cham (2019), p. 113 – 126.
45. M. Najariyan, M. H. Farahi, *Optimal control of fuzzy controlled system with fuzzy initial conditions*, Iran. J. Fuzzy Syst., № 10, 21 – 35 (2013).
46. M. Najariyan, M. H. Farahi, M. Alavian, *Optimal control of HIV infection by using fuzzy dynamical systems*, J. Math. and Comput. Sci., № 2, 639 – 649 (2011).
47. A. V. Plotnikov, T. A. Komleva, *The averaging of control linear fuzzy 2π-periodic differential equations*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. B, Appl. Algorithms, **18**, № 6, 833 – 847 (2011).
48. N. D. Phu, N. V. Hoa, H. Vu, *On comparisons of set solutions for fuzzy control integro-differential systems*, J. Adv. Res. Appl. Math., **4**, № 1, 84 – 101 (2012).

49. N. D. Phu, T. T. Tung, *Some properties of sheaf solutions of sheaf set control problems*, Nonlinear Anal., Hybrid Syst., **67**, 1309 – 1315 (2007).
50. N. D. Phu, T. T. Tung, *Existence of solutions of set control differential equations*, Science & Technology Development, **10**, № 6, 5 – 14 (2007).
51. L. T. Quang, N. D. Phu, N. V. Hoa, H. Vu, *On maximal and minimal solutions for set integro-differential equations with feedback control*, Nonlinear Stud., **20**, № 1, 39 – 56 (2013).
52. W. Witayakiattilerd, *Nonlinear fuzzy differential equation with time delay and optimal control problem*, Abstr. and Appl. Anal., **2015**, Article ID 659072 (2015), 14 p.
53. W. Yu, R. Jafari, *Modeling and control of uncertain nonlinear systems with fuzzy equations and Z-number*, Wiley-IEEE Press (2019).
54. M. Hukuhara, *Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe*, Funkcial. Ekvac., № 10, 205 – 223 (1967).

Одержано 09.01.20